پیک ریاضی

جلددوم، شمارهٔ سوم پاییز ۱۳۶۶

ریشه‌های تاریخی نظریهٔ فضاهای برداری توپولوژیک

نوشتهٔ : نیکلا بورباکی

ترجمهٔ : ارسلان شادمان

یادداشت مترجم

همه می‌دانند که آنالیز تابعی بخشی بسیار وسیع و شدیداً "فعال" از ریاضیات امروزی است. این بخش، که تحت عنوان نامهای دیگری نظیر آنالیز نوین نیز مطرح شده است، به قدری مسلط بر همهٔ فعالیتهای آنالیز است که برخی از ریاضیدانان بنام نظیر ژان دیودونه اندک اندک صفات "تابعی"، "نوین" و امثال آن را زاید تشخیص داده و معتقد شده‌اند که تنها کلمهٔ " آنالیز" خودوافی مطلب است.

درسی تحت عنوان " آنالیز تابعی" یکی از درسهای رسمی ریاضی در اواخر دورهٔ کارشناسی و یا اوایل دورهٔ کارشناسی ارشد است. قبل از انقلاب نیز این درس تحت همین نام و گاهی نامهای خاص نظیر فضاهای تابعی فضاهای برداری توپولوژیک، نظریهٔ توزیع، نظریهٔ طیفی، نظریهٔ عملگرها وغیره در دانشگاههای کشور و منجمله دانشگاه تهران تدریس می‌شده است. درس سال گذشتهٔ "آنالیز تابعی" کارشناسی ارشد دانشگاه تهران، یک بار دیگر

به عهده حقیر واگذار شد که مرجع اصلی درس را کتاب معروف رودین قرار دادیم . سه بخش عمدهٔ کتاب ،فضا های برداری توپولوژیک ،نظریهٔ توزیع ،وجبرهای باناخ است .درضمن سعی شد مروری برمراجع موجود وقابل دسترس بشود . درضمن این مرور ،معلوم شد که اثر بنیادی بورباکی درزمینهٔ فضا های برداری توپولوژیک با چکیده اش وبا یادداشتهای تاریخی اش برای دانشجویان جالب است .هرچند این یادداشتها به ۱۹۵۱ ختم می‌شود ومی‌دانیم ازآن پس آنالیزتابعی رشد فوق العاده ای داشته است ،به نظر رسید یادداشت بورباکی هنوز می‌تواند خوانندگان زیادی را در ایران به خود جلب کند .شاید دلیل این امر آن باشد که دسترسی ما به منابع اصیل قرن نوزدهم ناقص ویا هیچ است .درعین حال گروه بورباکی مولفی است که اولین کتاب جامع رادرنظریهٔ فضا های برداری توپولوژیک وهمچنین یکی از جامعترین کتابها را درتوپولوژی عمومی نوشته است .کتاب فضا های برداری توپولوژیک بورباکی سه قسمت عمده ومتمایز دارد .یکی اصل کتاب است در دو مجلد وپنج فصل که فصل یکم آن به فضا های برداری توپولوژیک روی یک هیات K با قدرمطلق | | اختصاص دارد وفصول دیگرش به فضا های آشناترحقیقی یا مختلط می‌پردازند .دسته های عمده ای ازفضا ها نظیرفضا های بشکه ای ،منتل ،فرشه ،و... ودوگا ینهای مختلف ازمطالب مطرح شده دراثر اوهستند .یک قسمت دیگر کتاب چکیده ای است که پیش ازچاپ نهایی پنج فصل برای "کاربرد" چاپ شده است ،تعاریف وقضایا را بدون اثبات دربر دارد وفقط به فضا های حقیقی ومختلط می‌پردازد وازاین رو با اصل کتاب فرق دارد .قسمت سوم با آن دوفرق دارد وآن هم یادداشت تاریخی است . به جای روش معمولی بورباکی که یادداشتها را فصل به فصل می‌نوشته است ، دراین موردیکجا یادداشتهای فصلهای یکم تا پنجم را باهم نوشته است وآن هم

عمدتا "ریشه‌های تاریخی برایش مطرح بوده است ونه مراحل مختلف وضع این دسته یا آن دسته ازفضاها. همان طورکه می‌دانیم یادداشتهای تاریخی کتابهای مختلف بورباکی دریک مجلدتحت عنوان "مقدمات تاریخ ریاضیات" درمجموعه "تاریخ تفکر" ازانتشارات هرمان پاریس به‌سال ۱۹۶۰ منتشر گردیده است. علی‌رغم سندیت بورباکی، دربرخی ازبخشها نارساییهایی عمدی یا غیرعمدبه‌چشم می‌خورد. امادرقسمتهای مربوط به‌قرون جدیدتقریبا" کارا و یکی ازبهترین "پیگیریهای سیرتفکرریاضی" است ودرموردفضاهای برداری‌توپولوژیک خواننده‌خواهددیداین مدعی بی‌اساس نیست.

نکته‌ای که اکنون پس ازگذشت قریب ۴۰ سال می‌توان به‌یادداشتها افزوداین است که‌بدبینی بورباکی درموردادامهٔ مطالعه‌فضاهای باناخ چندان بجانبوده است. کارهای جدیدووسیع درهمه‌قسمتهای فضاهای باناخ مجردوفضاهای تابعی ازجمله‌پایه‌های شودر، فضاهای هاردی‌و... نظراورا ردکرده‌اند. برعکس تشویق اوبه‌مطالعه‌فضاهای وسیعتروامیدی که‌به‌نظریهٔ توزیع بسته‌بوده است به‌جابوده وگسترش چشمگیری‌دردهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰ داشته‌است. آنالیزحقیقی ومختلط درفضاهای برداری‌توپولوژیک خودبعد جدیدی به‌آنالیزداده‌است ازجمله‌کاربردهای توابع پلوریسوز هارمونیک درجبرهای باناخ می‌توانندتوجیه‌گرکارهای برنارداوپتی باشدگرچه تا انتشارکتاب خود [1] تحت عنوان "ویژگیهای طیفی جبرهای باناخ" دررسری درسنامه‌های اشپرینگر (شمارهٔ ۷۳۵) به‌سال ۱۹۷۹ دیده‌نمی‌شودکه‌ازکارها برمرمن [2] للنگ [5] وشاگردانش نووراز [6] کره [4] ومخلص[3] استفاده کرده‌باشد. جالب توجه است ریاضیدانانی بنام مانندهیمن وسایرین، براثر تلفیق ننمودن نتایج نظریه‌های مختلف "آنالیزکلاسیک" و "آنالیز تابعی" نتایجی راپخش می‌کنندکه‌بااندک توجهی به "آنچه‌دراطراف

می‌گذرد" دقیقتروساده‌ترمطرح می‌شد.

اگریکی ازهدفهای پیک ریاضی راشناخت موقعیت ریاضی درگذشته وحال بدانیم شایداین مقاله بتواندکمک مختصری به‌خوانندگان جوان ما کند.

امیدوارم‌درآینده‌ای نزدیک تاریخچه مروری برقسمتهای دیگر آنالیزرا به‌خوانندگان تقدیم‌کنم.

مقالهٔ حاضرترجمهٔ یا بندیادداشتهای تاریخی بورباکی برفضاهای برداری توپولوژیک است که می‌تواننددریکی ازدومرجع زیربه‌زبان اصلی مطالعه‌شود:

BOURBAKI,N., Elements d' histoire des mathematiques, Hermann, Paris, 1960 (Collection Històire de lapensee, Vol. IV).

BOURBAKI,N., Espaces vectoriels topologiques,Hermann,Paris,1967 (Collection Actualites Scientifiques et Industrielles, No 1229).

فضا های بردا ری توپولوژیک
یا دداشت تاریخی

نظریهٔ عمومی فضاهای برداری توپولوژیک درفاصلهٔ سالهای ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰ تاسیس شده‌است. اما ازمدتها پیش، براثرمطالعهٔ مسائل متعددآنالیز تابعی، این نظریه تدارک شده‌بود. ازاین رونمی‌توان تاریخچهٔ این نظریه رابه‌رشتهٔ تحریردرآوردمگرآنکه، دست‌کم‌به‌اختصار، خاطرنشان کردکه‌چگونه بررسی این مسائل ریاضیدانان رابه‌تدریج واداشت (خصوصا" ازاوائل قرن بیستم‌به‌این طرف) آگاهی یابندبه‌اینکه‌بین مسائل موردنظرازطرفی

وامکان طرح‌ودستوربندی مسائل با کلیت خیلی بیشتروبکارگیری روشهای یکنواخت حل آنها قرابت وجوددارد .

می‌توان گفت که شباهت بین جبروآنالیزواین فکرکه معادلات تابعی را (یعنی‌معادلاتی راکه‌درآنها مجهول یک تابع است)به‌عنوان "حالت حدی "معادلات جبری منظوردارند ،برمی‌گرددبه‌اوائل حساب بینهایت کوچکها ،که‌خودبه‌یک معنی پاسخی است به‌نیازتعمیم "ازمتناهی به نامتناهی " . اما پدربزرگ مستقیم حساب بینهایت کوچکها حساب تفاضلات متناهی است (رجوع‌شودبه‌یادداشت تاریخی فصلهای ۱، ۲و۳ صفحات ۱۶۱ تا ۱۶۶ کتاب توابع یک متغیرحقیقی)ونه‌حل دستگاههای خطی کلی.پیش ازاواسط قرن هیجدهم ،شباهتی بین دستگاههای اخیرومسائلی ازحساب دیفرانسیل به‌چشم‌نمی‌خوردما دراین تاریخ نخستین شباهتها رادرمورد معادلهٔ تارهای مرتعش می‌توان دید .اینجا واردجزئیات تاریخی این مساله‌نمی‌شویم ،امالازم‌است‌پیدایش دوایدهٔ اساسی را ،که‌ازآن پس همواره ظاهرمی‌شوند ،خاطرنشان سازیم .این دوایده‌ظاهرا "مدیون د. برنولی‌اند . نخستین ایده‌این است که‌نوسان تارموردنظررا به‌عنوان "حالت حدی"نوسان دستگاه‌متشکل از n جرم‌نقطه‌ای درنظربگیریم هنگامی‌که m بینهایت افزایش می‌یابد .می‌دانیم که‌برای n متناهی‌مفروض ،این مساله‌اندکی بحدمنجربه نخستین مثال ازجستجوی مقادیرویژهٔ یک تبدیل خطی‌می‌شود (رجوع‌شودبه یادداشت تاریخی فصلهای ۶و۷جبر). هنگام "عبوربه‌حد" آنچه‌به‌این مقادیرویژه‌وابسته‌می‌شود ،تناوب "نوسانهای ویژه" تارموردنظراست که ازمدتها پیش موردمشاهدهٔ تجربی قرارگرفته‌ووجودنظری آنها نیزدرآغاز قرن (خصوصا "به‌وسیلهٔ تیلور)ثابت شده‌بود .این شباهت صوری،هرچندکه ندرتا " مورداشاره‌قرارگرفته‌است (رجوع‌شودبه‌اشتورم ۱۸۳۶، صفحهٔ ۳۹۰)

ظاهرا "درطول قرن نوزدهم هیچگاه از نظر دور نمانده است. اما همان طور که خواهیم دید، تمام وکمال اهمیت خودرا فقط درسالهای ۱۸۹۰ تا ۱۹۰۰ به دست آورد.

ایده‌ٔ دوم برنولی (که آن هم شاید از امور تجربی الهام گرفته باشد) "قاعده‌ٔ برهمنهش" است که می‌گوید نوسان عمومی تار مرتعش باید بتواند "تجزیه" شود به برهمنهش نوسهای ویژه. به زبان ریاضی، معنی این عبارت این است که جواب عمومی معادله تارهای مرتعش باید قابل بسط به یک سری $\sum_n c_n\psi_n(x,t)$ باشد که در آن $\psi_n(x,t)$ ها نوسانهای ویژه را نشان می‌دهند. می‌دانیم که این قاعده موجب بروز جدلی طولانی شد، جدل برسر اینکه آیا یک تابع "دلخواه" را می‌توان برحسب سری مثلثاتی بسط داد یا نه. خاتمهٔ جدل فقط به وسیلهٔ کارهای فوریه ودیریکله درثلث نخست قرن نوزدهم صورت پذیرفت. اما حتی قبل از اخذ نتیجه، با مواردیگری نیز از بسط به سریهای "متعامد" برخورد شده بود (هرچند اصطلاح متعامد قبل از کارهای هیلبرت دیده نشده است): توابع کروی وبسجمله‌های لژاندر، همچنین دستگاههای گوناگون به شکل $(e^{i\lambda_n x})$ که λ_nها دیگر مضارب یک عدد مفروض نیستند. این دستگاهها وتوابع، از قرن هیجدهم درمورد مسائل نوسان وهمچنین به وسیلهٔ فوریه وپواسن با تحقیقات آنها روی معادلهٔ حرارت موردبحث واقع شده بودند.

حدود سال ۱۸۳۰، همهٔ این پدیده‌ها که درموارد متنوع مخصوص مشاهده شده بودند به وسیلهٔ اشتورم (۱۸۳۶، a و b) ولیوویل (۱۸۳۶و۱۸۳۷) دریک نظریهٔ کلی نوسانهای توابع یک متغیر تنظیم گردیدند: ایشان معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\rho(x)y=0, \quad (\rho(x)>0\ ,\ p(x)>0) \tag{1}$$

را با شرایط مرزی

$$\begin{aligned} &y'(a)-h_1y(a)=0\\ &y'(b)+h_2y(b)=0\end{aligned} \qquad (h_1\geqslant 0, h_2\geqslant 0, a<b) \tag{2}$$

درنظر می‌گرفتند وثابت کردند که نتایج اساسی زیر برقرار است :

۱) مساله فقط هنگامی جواب غیرصفر دارد که λ یکی از مقادیر دنباله‌ای از اعداد مثبت مانند (λ_n) باشد که همگرا به $+\infty$ است ؛

۲) به ازای هر λ_n ، جوابها مضاربی از یک تابع v_n اند که می‌توان آن را با شرط $\int_a^b \rho v_n^2 dx=1$ "نرمدار" ساخت و به علاوه داریم $\int_a^b \rho v_m v_n dx=0$ هرگاه که $m\neq n$.

۳) هر تابع f که دوبار مشتق پذیر در $[a,b]$ باشد و در شرایط مرزی (2) صدق کند ، قابل بسط به سری همگرای یکنواخت

$$f(x)=\sum_n c_n v_n(x)$$

است که $c_n=\int_a^b \rho f v_n dx$.

۴) برابری $\int_a^b \rho f^2 dx=\sum^{a} c_n^2$ را داریم . (این برابری در ۱۷۹۹ در مورد دستگاههای مثلثاتی ، اما با شیوه‌ای کاملاً صوری، به وسیله پارسوال ثابت شده بود که از آن بیدرنگ "نامساوی بسل" نتیجه می‌شود ، نامساوی بسل در ۱۸۲۸ به وسیلهٔ بسل در مورد سریهای مثلثاتی بیان شده بود.)

نیم قرن پس از کارا شتورم ولیوویل ، این ویژگیها به وسیلهٔ کارهای گرام (۱۸۸۳) تکمیل می‌شوند که در پی پژوهشهای چبیچف ، رابطهٔ بین بسط به سری توابع متعامد و مسالهٔ " بهترین تقریب تربیعی" را روشن می‌سازد که خود مسالهٔ بهترین تقریب تربیعی مستقیما "از روش کمترین مربعات" گاوس در نظریهٔ خطا ها سرچشمه گرفته است . روش کمترین مربعات این است یک دنبالهٔ متناهی از توابع مانند $(\Psi_i)_{1\leq i\leq n}$ در دست است ، مطلوب است به ازای هر تابع f آن ترکیب خطی $\sum_i a_i \Psi_i$ که انتگرال $\int_a^b (f-\sum_i a_i\Psi_i)^2 dx$ را مینیموم سازد .

مساله مورد بحث یک مساله پیش پا افتادهٔ جبر خطی بیش نیست، اما گرام آن را با شیوه‌ای اصیل حل می‌کند بدین ترتیب که روند "متعامدسازی یکه‌ای" را در مورد ψ_i ها به کار می‌برد. ما این روش را در فصل پنجم بند دوم شرح داده‌ایم که معروف به روش ارهارد اشمیت است. گرام، پس از پرداختن به یک دستگاه متعامد یکه‌ای نامتناهی (ψ_n) این سوال را مطرح می‌کند که آیا اختلاف μ_n "بهترین تقریب تربیعی" تابع مفروض f با ترکیبات خطی n تابع نخست از دستگاه مورد نظر، یعنی $\psi_n,\dots,\psi_1$ هنگامی که n به بینهایت افزایش یابد به صفر میل می‌کند یا خیر؟ باید توجه داشت که در تمام این بررسی، گرام خود را به توابع پیوسته محدود نمی‌کند اما اصرار می‌ورزد که شرط مهم $\int_a^b \rho f^2 dx<+\infty$ رعایت شود. با طرح سوال فوق، گرام به تعریف یک دستگاه متعامد یکه‌ای کامل هدایت می‌شود و درمی‌یابد که این خاصیت برای دستگاه (ψ_n) هم‌ارز است با آنکه فقط تابع صفر بر همهٔ ψ_n ها عمود باشد. او حتی سعی می‌کند مفهوم "همگرائی با میانگین تربیعی" را روشن نماید، اما پیش از ظهور مفاهیم اساسی نظریهٔ اندازه نمی‌توانسته است در این جهت نتایجی همه جانبه به دست آورد و لذا نتایج او در این زمینه فقط نتایج حالتهای خاص اند.

در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم تلاش اصلی آنالیزدانها غالبا" راجع می‌شد به تعمیم نظریهٔ اشتورم ـ لیوویل به توابع چندمتغیره، زیرا که مسائل مرزی معادلات با مشتقات جزئی نوع بیضوی فیزیک ریاضی منجر به این نظریه می‌شوند. توجه اساسا" متمرکز بوده است روی معادله "پرده‌های مرتعش"

$$L_\lambda(u) = \Delta u+\lambda u=0 \tag{3}$$

وجستجوی جوابهایی برای این معادله در یک میدان بس منظم G که روی مرز

میدان صفرشوند. با روشهایی که درموردتوابع یک متغیره موفق بوده‌اند، نمی‌توان برمشکلات این مساله فائق آمد. درواقع، مشکلات تحلیلی قابل ملاحظه‌ای دراین مساله هست که با روشهای یک متغیره حل آنها به تصورهم در نمی‌آید. مراحل اصلی حرکت به سوی جواب را یادآوری کنیم: دخالت "تابع گرین" میدان G که وجودآن به وسیلهٔ شوارتس ثابت شد؛ اثبات وجودکوچکترین مقدارویژه، که این هم کارشوارتس است؛ سرانجام در ۱۸۹۴ در رساله‌ای مشهور، هـ. پوانکاره موفق می شودوجودو ویژگیهای اساسی همهٔ مقادیرویژه را ثابت کندبدین طریق که برای یک "طرف ثانی" مفروض f، جواب معادلهٔ $L_\lambda u=f$ را که روی مرزمیدان صفرمی‌شوددرنظرمی‌گیردوبا تعمیمی ماهرانه ازروش شوارتس نشان می‌دهدکه این جواب u_λ تابعی مرومورف ازمتغیرمختلط λ است که فقط قطبهایی ساده وحقیقی λ_n داردکه دقیقا "مقادیرویژهٔ مطلوب اند.

این پژوهشها درارتباط تنگاتنگی به آغازنظریهٔ معادلات انتگرال خطی وصل می‌شوند، که بدون شک بیشترین سهم را درتجلی افکارجدیددارا می‌باشند. به اشاراتی مختصردرموردرشداین نظریه قناعت می‌کنیم. (جزئیات بیشتررا به یادداشتهای تاریخی برفصولی ازشرح ماکه اختصاص به نظریهٔ طیفی دارندموکول می‌کنیم*). این نوع معادلات تابعی که نخست به شکل متفرق درنیمهٔ اول قرن نوزدهم ظاهرشدند (آبل، لیوویل)، هنگامی اهمیت یافتندکه بیر و س. نیومن** حل "مسالهٔ دیریکله" را برای یک میدان بس منظم به حل "معادلهٔ انتگرالی نوع دوم"

---

* کتاب اول نظریهٔ طیفی بورباکی حاوی یادداشت تاریخی نیست. مترجم

** با R.Baire و von Neuman اشتباه نشود. مترجم.

$$(4)\qquad u(x)+\int_a^b K(x,y)u(y)\,dy=f(x)$$

با تابع مجهول u برگرداندند. نیومن موفق شد این معادله را با روش "تقریبات متوالی" درسال ۱۸۷۷ حل کند. در ۱۸۹۶، هانری پوانکاره که بدون شک به شباهتهای جبری نامبرده و به همان اندازه به نتایج خود راجع به معادلهٔ پرده‌های مرتعش به هیجان آمده بود، این فکر را یافت که یک ضریب λ در مقابل انتگرال موجود در معادلهٔ (4) قرار دهد و اعلام دارد که مانند معادلهٔ پرده‌های مرتعش، جواب معادله، تابعی مرومورف از λ است. اما او به اثبات این نتیجه نرسید، درحالی که فردهولم چهار سال پس از آن اثبات را در مورد یک "هستهٔ" پیوستهٔ K و یک فاصلهٔ کراندار $[a,b]$ ارائه داد. این دانشمند شاید آگاهانه‌تر از پیشینیان خود توجه کامل دارد به اینکه شباهت موجود بین معادلهٔ (4) و دستگاه خطی

$$(5)\qquad \sum_{q=1}^{n}\left(\delta_{pq}+\frac{1}{n}a_{pq}\right)x_q=b_p\qquad (1\leqslant p\leqslant n)$$

راهنمایش در حل (4) باشد تا آنکه جواب (4) را به عنوان خارج قسمت دو عبارت به دست آورد، عبارتهایی که مانند مدل دترمینانها در دستورهای کرامر تشکیل می‌شوند. وانگهی این فکری تازه نبود: از اوائل قرن نوزدهم، روش "ضرایب نامعین" منجر به دستگاههای خطی بینهایت مجهولی"

$$(6)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j=b_i\qquad (i=1,2,\ldots)$$

شده بود (روش ضرایب نامعین این است که یک تابع مجهول را با فرض آنکه قابل بسط به سری $\sum_n c_n\psi_n$ برحسب توابع معلوم ψ_n باشد، به کمک محاسبهٔ ضرایب c_n به دست آورند). فوریه که با یک چنین دستگاهی برخورد می‌کند،

آن را هنوز مانند یک ریاضیدان قرن هیجدهم "حل می‌کند": همهٔ جمله‌هایی را که اندیس i یا j آنها بیش از n است حذف می‌کند، دستگاه متناهی به دست آمده را به کمک دستورهای کرامر حل می‌کند، سپس جواب‌ها را با "گذر به حد" هنگامی که n به $+\infty$ میل کند، درنظر می‌گیرد. بعدها، هنگامی که دیگر تردستی‌های از این قبیل مجاز نبود، باز هم نظریهٔ دترمینانها به عنوان ابزاری برای حمله به این مساله نخست مورد استفاده قرار می‌گیرد. از ۱۸۸۶ (به دنبال کارهای هیل)، هانری پوانکاره، سپس فون کخ یک نظریهٔ "دترمینانهای نامتناهی" را برپا کردند که اجازه می‌دهد برخی از انواع معادلات (6) با مدل کلاسیک حل شود. این نتایج هرچند مستقیما "قابل استعمال" در مساله فردهولم نبودند، اما مطمئنیم که لااقل نظریهٔ فون کخ را برای فومولبندی "دترمینانهایش" مورد استفاده قرار داده است.

در این زمان است که هیلبرت وارد صحنه می‌شود و تکان جدیدی به نظریه می‌دهد. او شروع می‌کند به تکمیل کارهای فردهولم بدین ترتیب که گذر به حد را واقعا "تحقق می‌بخشد به قسمی که حل (4) منجر به حل (5) گردد. اما بلافاصله گذر به حد را در مورد صورتهای تربیعی حقیقی به آنچه به دست آورده است می‌افزاید. می‌دانیم معادلات انتگرالی با هستهٔ متقارن (یعنی درحالتی که $(K(y,x)=K(x,y)$ که از مهمترین و متواترترین معادلات فیزیک ریاضی‌هستند به طور طبیعی منجر به صورتهای تربیعی حقیقی می‌شوند. بدین ترتیب، او موفق به اخذ فرمول اساسی می‌شود که تعمیمی مستقیم از تحویل یک صورت تربیعی به محورهایش است. این فرمول چنین است:

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)x(s)x(t)\,ds\,dt=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_a^b \psi_n(s)x(s)\,ds\right)^2 \tag{7}$$

که λ_n ها مقادیرویژهٔ (الزاماً "حقیقی") متناظربه هستهٔ $\bar{K}$ اند و ψ_n ها تشکیل دهندهٔ یک دستگاه متعامدیکه‌ای توابع ویژهٔ مربوط به λ_n وطرف دوم برابری (7) یک سری همگرا به‌ازای xی است که درشرط $\int_a^b x^2(s)ds\leqslant 1$ صدق کند.

او همچنان نشان می‌دهدچگونه هرتابع "قابل نمایش" به‌شکل $f(x)=\int_a^b K(x,y)g(y)dy$ دارای یک "بسط" به‌شکل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int_a^b \psi_n(y)f(y)dy$$

است وبا ادامهٔ مشابهات بین این نظریه ونظریهٔ کلاسیک صورتهای تربیعی، روشی رابرای محاسبهٔ λ_n ها ارائه می‌دهد. این روش که یک روش تغییراتی است همان است که درواقع تعمیم ویژگیهای نهائی کاملاً" شناخته شدهٔ محورهای یک مقطع تربیعی (مخروطی م.) است (هیلبرت ۱۹۱۲، صفحات ۱۰ تا ۳۸).

این نخستین نتایج هیلبرت را، اشمیت بیدرنگ به‌شکلی کلیتر و ساده‌تربه‌کاربرد. او از دخالت "دترمینانهای فردهولم" احترازنمود و همچنین عبوراز متناهی به‌نامتناهی را کنارزد. ازهمین موقع شکل ارائه او خیلی شبیه شکل مجرداست، که ویژگیهای خطی ومثبت بودن انتگرال یگانه ویژگیهای مورداستفاده دراثبات می‌باشند (اشمیت ۱۹۰۷). اما هیلبرت به مفاهیمی خیلی کلیتردست یافته بود. همهٔ کارهای پیشین ازاهمیت توابع با مربع انتگرالپذیردم‌زده بودندودستورپارسوال ارتباطی نزدیک بین این توابع ودنباله‌های (c_n) باشرط $\sum c_n^2<+\infty$ رابرپاداشته‌بودند. بی‌گمان همین فکرراهنمای هیلبرت دررساله‌های ۱۹۰۶ بوده‌است (هیلبرت ۱۹۰۴، ۱۹۰۵، ۱۹۰۶، ۱۹۱۰، ۱۹۱۲ فصلهای ۱۱ تا ۱۳). دراین رساله‌ها، هیلبرت ایدهٔ "ضرایب نامعین" را ازسرمی‌گیردونشان می‌دهدکه حل معادلهٔ انتگرالی (4) معادل است باحل دستگاه بینهایت معادلهٔ خطی

$$(8) \qquad x_p+\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}\, x_q=b_p \qquad (p=1,2,\ldots)$$

برای " ضرایب فوریه " تابع مجهول u برحسب یک دستگاه متعامدیکه ای کامل مفروض (w_n)

$$x_p=\int_a^b u(t)w_p(t)\,dt$$

که b_p و k_{pq} چنین اند

$$b_p=\int_a^b f(t)w_p(t)\,dt \quad , \quad k_{pq}=\int_a^b\int_a^b K(s,t)w_p(s)w_q(t)\,ds\,dt$$

به علاوه ،یگانه جوابهای (8) که با این دیدگاه باید منظور داشت آنهایی هستند که در شرط $\sum x_n^2<+\infty$ صدق کنند. از این رواست که هیلبرت خود را منظما " به این نوع جوابها محدود می‌کند. برعکس ،او شرایط تحمیل شده به "ماتریس بینهایت " (k_{pq}) را وسعت می‌بخشد (که در (8) این ماتریس چنان است که $\sum_{p,q} k_{p,q}^2<+\infty$)از همین زمان ،روشن است که "فضای هیلبرت " دنباله های $x=(x_n)$ از اعداد حقیقی با شرط $\sum x_n^2<+\infty$ زیربنای همهٔ نظریه است و به عنوان " گذر به حد "فضای اقلیدسی بعدمتناهی ظاهرمی‌شود ، هرچند که این فضای هیلبرت به صراحت وارد نشده است .به علاوه آنچه که در بسطهای آیندهٔ نظریه اهمیت ویژه ای دارد این است :هیلبرت نه تنها این فضا را درنظر می‌گیرد ،بلکه به آنجا کشیده می‌شود که در آن دومفهوم همگرایی متمایز وارد خالت دهد ،تازه اگر فقط یک مفهوم همگرایی را درنظر گرفته بود با زکارجالبی بود ولی دومفهوم همگرایی اهمیت فوق العاده دارد. این دومفهوم همگرایی ، متناظراند به آنچه از آن پس بنام توپولوژی ضعیف وتوپولوژی قوی نامیده

شده است *. همچنین هیلبرت یک "قاعده‌ٔ انتخاب" را وارد کرده بود که در واقع همان فشردگی ضعیف گوی یکه است. جبر خطی نوینی که هیلبرت برای حل دستگاه (8) بسط می‌دهد، به تمامی متکی بر این مفاهیم توپولوژیک است: نگاشتهای خطی، صورتهای خطی وصورتهای دوخطی (وابسته به نگاشتهای خطی) که همگی به اعتبار ویژگیهای "پیوستگی**" شان دسته‌بندی وبررسی می‌شوند. هیلبرت خصوصا "کشف می‌کند که موفقیت روش فردهولم متکی بر مفهوم "پیوستگی کامل" است که آن را در مورد صورتهای دوخطی استخراج می‌کند***" وعمیقا" به بررسی آن می‌پردازد. برای جزئیات بیشتر در این زمینه، خواننده را به قسمتی از این شرح مراجعه می‌دهیم که در آن این مفهوم مهم گسترش می‌یابد و کارهای عمیق وتحسین آمیز هیلبرت نظریهٔ طیفی صورتهای دوخطی متقارن (کراندار یا بیکران) را تاسیس می‌کند.

---

* پیش از آن، حساب تغییرات به نحوی طبیعی موجب شده بود همگراییهای گوناگون روی یک مجموعهٔ توابع منظور شود (برحسب آنکه فقط همگرایی یکنواخت خود توابع را بخواهیم ویا آنکه همگرایی یکنواخت خود توابع و تعدادی از مشتقهای آنها مطلوب باشد). اما نوع همگرایی تعریف شده به وسیلهٔ هیلبرت از نوعی کاملا" جدید برای این عصر است.

** باید توجه داشت که تا حوالی ۱۹۳۵، منظور از تابع "پیوسته" همواره عملا" نگاشتی است که هر دنبالهٔ همگرا را به یک دنبالهٔ همگرا تبدیل کند.

*** از نظر هیلبرت، یک صورت دوخطی $B(x,y)$ کاملا" پیوسته است هرگاه برای هر دنبالهٔ (x_n) وهر دنبالهٔ (y_n) که ضعیفا" همگرا به x و y باشند، $B(x_n,y_n)$ همگرا به $B(x,y)$ باشد.

زبان هیلبرت هنوز هم کلاسیک است و درسراسر کتابش "پایه‌های معادلات انتگرالی" ("Grundzuge")، بلاانقطاع کاربردهای نظریه را مطمح نظر می‌سازد و مثالهای متعددی را بررسی می‌کند (تقریبا "نصف مجلد به مثالها اختصاص دارد). نسل پس از او دیدگاهی باز هم کلیتر دارد. تحت تاثیر افکار فرشه و ریتس درباره‌ٔ توپولوژی عمومی (رجوع شود به تاریخچه‌ٔ توپولوژی)، اشمیت (رجوع شود به اشمیت ۱۹۰۸) و خود فرشه در سالهای ۱۹۰۷ و ۱۹۰۸ زبان هندسه اقلیدسی را در مورد "فضای هیلبرت" (حقیقی یا مختلط) بی محابا به کار می‌برند. در این آثار است که برای نخستین بار نرم (با علامتگذاری متداول $||x||$)، نامساوی مثلثی درباره‌ٔ آن و این نکته که فضای هیلبرت "تفکیکپذیر" وکامل است به چشم می‌خورند. به علاوه اشمیت ثابت می‌کند که تصویر قائم روی یک واریته‌ٔ خطی بسته وجود دارد و این به او اجازه می‌دهد که نظریه‌ٔ دستگاههای خطی هیلبرت را به شکلی ساده‌تر و کلیتر بیان کند. باز هم در ۱۹۰۷، فرشه و ریتس نشان می‌دهند که فضای توابع با مربع انتگرالپذیر دارای "هندسه"ای کاملا" مشابه است. چند ماه بعد ریتس و فیشر نشان می‌دهند که این فضا کامل است و با "فضای هیلبرت" ایزومورف است و بدین ترتیب تشابه مورد نظر با صراحت کامل واضح می‌گردد. آنها در عین حال به شیوه‌ای خیره‌کننده اعتبار ابزار جدیدی را که به وسیله‌ٔ لبگ اختراع شده است آشکار می‌سازند. از همین زمان می‌توان فکر کرد که نقاط اصلی نظریه‌ٔ فضاهای هیلبرتی تسخیر شده‌اند. در میان کارهای جدیدتر، می‌توان ارائه اصل موضوعی این نظریه را در حوالی ۱۹۳۰ به وسیله‌ٔ م.ه. استون و ج. فون نیومن نام برد. همچنین در حدود سال ۱۹۳۴ فرض "تفکیکپذیری" به وسیله‌ٔ رلیخ، لوویک وف. ریتس کنار زده می‌شود.

با وجود این، جریانهای فکری دیگر نیز در اوایل قرن بیستم پا به

صحنه گذاشتند تا گرایش به سوی نظریهٔ فضاهای برداری نرمدار را تقویت کنند. ایدهٔ کلی " تابعیها "، یعنی توابعی که مقادیرشان عددی است ولی در مجموعه‌ای تعریف شده‌اند که اعضای آن مجموعه خود تابع هستند، در آخرین دهه‌های قرن نوزدهم در ارتباط با حساب تغییرات و از طرف دیگر در ارتباط با معادلات انتگرالی سر در می‌آورد. این ایده و همچنین ایدهٔ کلی "عملگر"ها هرچند مدیون مکتب ایتالیا است که در پرتو کارهای پینچرله وخصوصا "ولترا به روشنایی رسید، اما کارهای این مکتب برا ثر کمبود یک تحلیل پیشرفته از مفاهیم توپولوژیک، غالبا "مربوط به مسائل ویژه می‌شدند و خیلی کم جنبهٔ صوری بخود می‌گرفتند. در ۱۹۰۳، هادامار نظریهٔ جدید همزادی "توپولوژیک" را تاسیس می‌کند. او با این کار در جستجوی عمومی ترین "تابعیها" خطی پیوسته روی فضای $\mathcal{C}(I)$ است، که I یک فاصلهٔ فشرده و $\mathcal{C}(I)$ فضای توابع پیوستهٔ حقیقی بر I مجهز به توپولوژی همگرایی یکنواخت است. وی این تابعیات را به عنوان حد دنباله‌های انتگرال

$$x \longmapsto \int_I k_n(t)x(t)\,dt$$

سرشنمایی می‌کند. در ۱۹۰۷، فرشه و ف . ریتس نشان می دهند که روی فضای هیلبرت، صورتهای خطی پیوسته دقیقا "صورتهای "کراندار" هستند که هیلبرت معرفی کرده بود. سپس در ۱۹۰۹، ف . ریتس قضیهٔ هادامار را به شکل قطعی درمی‌آورد: هر تابع خطی پیوسته روی $\mathcal{C}(I)$ به وسیلهٔ یک انتگرال استیلجس بیان می‌شود. این قضیه بعدها به عنوان نقطهٔ عزیمت نظریهٔ جدید انتگرال به کار گرفته می‌شود (رجوع شود به یادداشت تاریخی برنظریهٔ انتگرال)

سال بعد، باز هم ریتس (ریتس ۱۹۱۰) پیشرفتهای جدید و مهمی به نظریه می‌دهد، بدین ترتیب که با تقلید از نظریهٔ فضای هیلبرت، به فضاهای

$L^p(I)$ می‌پردازد یعنی به ازای یک p مفروض، $1 < p < +\infty$، فضای توابعی را بررسی می‌کند که توان pام آنها در فاصلهٔ I جمع‌پذیر است. متعاقب آن، سه سال بعد، به بررسی مشابهی در مورد فضاهای دنباله‌ها $L^p(N)$ می‌پردازد. این تحقیقات همان طور که خواهیم دید تاثیر عمده‌ای در روشن شدن مفاهیم مربوط به همزادی دارند، چرا که برای نخستین بار دو فضای همزاد وغیر ایزومورف در آنها به چشم می‌خورد (ریتس ۱۹۱۳).

از همین زمان، ف ریتس به یک بررسی اصل موضوعی فکر می‌کرد تا همگی این نتایج را فرا گیرد (ریتس ۱۹۱۸) وگمان می‌رود که اگر او مقالهٔ مشهور خود را جع به نظریهٔ فردهولم (ریتس ۱۹۱۸) را بدین شکل نوشته است بر اثر وسواسی است که به عنوان آنالیزدان اندیشناک دچار شده است تا مبادا بیش از حد از ریاضیات کلاسیک دور شود. او در این مقاله عمدتا "فضای $C(I)$ تشکیل شده از توابع پیوسته روی یک فاصلهٔ فشردهٔ I را در نظر می‌گیرد. لیکن پس از آنکه نرم این فضا را تعریف می‌کند و می‌بیند که $C(I)$ مجهز به این نرم کامل است، در استدلالهایش دیگر به هیچ وجه چیزی جز اصول فضاهای نرمدار کامل را به کار نمی‌برد*. بدون آنکه خواسته باشیم اینجا به نقد جزئیات این کار بپردازیم، اشاره کنیم که در این مقاله برای بار اول مفهوم نگاشت خطی کاملا "پیوسته دیده می‌شود (این نگاشتها خاصیتشان این است که یک همسایگی را به یک مجموعهٔ نسبتا" فشرده تبدیل

---

* وانگهی ریتس صراحتا "خاطرنشان می‌سازد که کاربرد این قضایا در توابع پیوسته (که در آنجا ملاحظه می‌شود) چیزی بیش از "سنگ محکی" برای مفاهیمی بسیار کلی‌تر نیست (ریتس ۱۹۱۸، صفحه ۷۱).

می‌کنند*. وبا شاهکاری از آنالیز اصل موضوعی، تمامی نظریهٔ فردهولم (ازدیدگاه کیفی‌اش) به تنها یک قضیهٔ اساسی برمی‌گردد و آن هم این است که هرفضای نرمدار موضعاً "فشرده با بعد متناهی است.

تعریف کلی فضاهای نرمدار در ۲۲–۱۹۲۰ به وسیلهٔ س. باناخ، هـ. هان و ا. هلی داده شد (شخص اخیر فقط فضاهایی را درنظر می‌گیرد که از دنباله‌های اعداد حقیقی یا مختلط تشکیل شده باشند). درمدت ده سال متعاقب این تاریخ، نظریهٔ این فضاها حول دو مطلب که اهمیت اساسی درکاربرد دارند رشد می‌یابد: یکی نظریهٔ دوگانی و دیگری قضایای مربوط به مفهوم "کاتگوری" بئر.

دیدیم که فکر دوگانی (به معنی توپولوژیک) برمی‌گردد به اوایل قرن بیستم، این فکر زیربنای نظریهٔ هیلبرت است و درمجموعهٔ آثار ریتس جایگاهی مرکزی دارد. مثلاً" ریتس در ۱۹۱۱ (ریتس ۱۹۱۱، ص ۴۲–۴۱) مشاهده می‌کند که رابطهٔ

$$|f(x)| \leqslant M\,\|x\|$$

(که درفضای هیلبرت به‌عنوان تعریف تابعیهای خطی "کراندار" گرفته شده بود) معادل با پیوستگی f است. البته ریتس این را هنگامی درنظر می‌گیرد که درفضای $\mathcal{C}(I)$ قرار گیرد، اما استدلال او شیوه‌ای کاملاً" عمومی

---

* درکارهایش روی فضاهای L^p، ف. ریتس نگاشتهای کاملاً" پیوسته را به عنوان نگاشتهایی که هردنبالهٔ ضعیفاً "همگرا را به یک دنبالهٔ قویاً "همگرا مبدل می‌سازند تعریف کرده بود. با توجه به آنکه گوی یکه درفضاهای L^p $(1<p<\infty)$ ضعیفاً "فشرده است، معلوم است که دراین حالت تعریف پیوستگی کامل با تعریف قبلی هم‌ارز است. بعلاوه، ف. ریتس خاطرنشان ساخته بود که درمورد فضای L^2 تعریف او هم‌ارز با تعریف هیلبرت است (با ترجمه از زبان نگاشتهای خطی به زبان صورتهای دوخطی). (هیلبرت ۱۹۱۰، ص ۴۸۷).

دارد. درباره‌ٔ سرشت‌نمائی تابعیهای خطی‌روی $\mathcal{C}(I)$ ایشان ملاحظه می‌کنندکه شرط چگال بودن یک مجموعه A در $\mathcal{C}(I)$ این‌است که روی I هیچ اندازه‌ٔ استلیجس $\mu \neq 0$ وجودنداشته باشدکه بوهمه‌ٔ توابع‌عضو A "عمود" باشد (او بدین ترتیب شرط گرام را درمورددستگاههای متعامدیکه‌ای کامل تعمیم می‌دهد). او همچنین دراین اثرنشان می‌دهدکه‌دوگان فضای L^{∞} ازفضای اندازه‌های استلیجس "بزرگتر" است (ریتس ۱۹۱۱، ص ۶۲).

ازسوی دیگر، درکارهایش راجع به‌فضاهای $L^p(I)$ و $L^p(N)$، ف. ریتس موفق می‌شودروش اشمیت (اشمیت ۱۹۰۸) رابرای حل دستگاههای خطی درفضای هیلبرت به‌قسمی عوض کندکه‌بتوان آن رادرموردفضاهای کلیتر به‌کاربرد. ایده‌ٔ اشمیت دراین خلاصه می‌شودکه‌یک جواب "نهائی" دستگاه (6) راتعیین کندبدین ترتیب‌که‌ازبین نقاط واریته‌ٔ خطی بسته‌ای که‌با معادلات (6) نمایش داده‌شده‌است، آن نقطه‌ای رابیابدکه‌فاصله‌اش ازمرکز کمینه‌باشد. با به‌کارگرفتن همین ایده، ریتس‌نشان می‌دهدکه‌یک شرط لازم‌وکافی برای وجودیک تابع $x \in L^2(a,b)$ که‌درمعادله‌ٔ

$$(9) \qquad \int_a^b \alpha_i(t)x(t)dt=b_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$

صدق کندوبعلاوه‌شرط $\int_a^b |x(t)|^p dt \leqslant M^p$ رانیزبرآورد (α_i ها متعلق به L^q باقید $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ هستند) آن است‌که‌به‌ازای هردنباله‌ٔ متناهی ازاعدادحقیقی $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$، داشته‌باشیم:

$$(10) \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right| \leqslant M\left(\int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

در ۱۹۱۱ (ریتس ۱۹۱۱)، وی به‌شیوه‌ای مشابه‌به "مساله‌ٔ گشتاورهای تعمیم یافته" راحل می‌کند. این مساله‌عبارت است ازحل دستگاه

$$(11)\qquad \int_a^b \alpha_i(t)\,d\xi(t)=b_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$

که در آن α_i ها پیوسته اند و مجهول یک اندازهٔ استیلجس ξ است*. آشکارا دیده می‌شود که می‌توان این مساله را چنین بیان کرد: مطلوب تعیین یک تابعی خطی پیوسته روی $\mathfrak{C}(I)$ به کمک مقادیر این تابعی روی دنباله‌ای مفروض از نقاط این فضا است. به همین شکل است که هلی در ۱۹۱۲ به مساله می‌پردازد و شرایط ریتس را با روشی دیگر که خود برد وسیعی دارد** حل می‌کند. دا و این روش را در ۱۹۲۱ تحت شرایطی بسیار کلی‌تر از سر می‌گیرد با آوردن مفهوم نرم (در مورد فضاهای دنباله‌ها) همان طور که قبلاً نیز دیدیم، هلی ملاحظه می‌کند که این مفهوم تعمیمی از مفهوم "سنج" (یا jauge) جسم محدب در فضای n بعدی است که مینکوفسکی در آثار مشهورش راجع به "هندسه اعداد" به کار برده بود (مینکوفسکی ۱۸۹۶). در اثنای این کارها مینکوفسکی

---

* "مسالهٔ گشتاورها" به شکل کلاسیک مربوط به حالتی است که فاصلهٔ (a,b) یکی از فاصله‌های $(0,+\infty)$ یا $(-\infty,+\infty)$ است و $\alpha_i(t)=t^i$ و بعلاوه شرط مثبت بودن نیز به اندازه تحمیل می‌شود (ف. ریتس در رسالهٔ ۱۹۱۱ اش نشان می‌دهد که چگونه باید این شرایط را برای جستجوی جوابهایی از این دست عوض کرد). در میان روشهای گوناگون حل مسالهٔ کلاسیک گشتاورها، باید خصوصاً "روش م. ریتس را گوشزد کرد که با برازندگی افکار عمومی حساب تابعی را با نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط درهم می‌آمیزد تا شرایط صریحی را روی b_i ها به دست آورد (مراجعه شود به مقاله‌اش، اندر مسالهٔ گشتاورها، قسمت سوم، مجلهٔ Ark. fur Math. جلد ۱۷ (۲۳-۱۹۲۲)، شماره ۵۲۱۶ صفحه).

** همانند ریتس (ریتس ۱۹۱۱، ص ۵۰-۴۹)، در این اثبات، هلی یک "قاعدهٔ انتخاب" را به کار می‌برد که البته چیزی جز فشردگی ضعیف گوی یکه در فضای اندازه‌های استیلجس نیست.

مفهوم فوق صفحهٔ تکیه و "تابع تکیه" را (در R^n) تعریف کرده بود (مینکوفسکی ۱۹۱۱). او ثابت کرده بود که از هر نقطهٔ مرزی یک جسم محدب یک فوق صفحهٔ تکیه می‌گذرد (مینکوفسکی ۱۸۹۶ ص ۳۵–۳۳). هلی این مفاهیم را به یک فضای E دنباله‌ها، مجهز به یک نرم دلخواه، تعمیم می‌دهد. او یک دوگانی بین E و فضای E' تشکیل شده از دنباله‌های $u=(u_n)$ به قسمی که به ازای هر $x=(x_n)\in E$ سری $(u_n x_n)$ همگرا باشد برقرار می‌کند. چنانچه $<u,x>$ مجموع این سری باشد، او در E' یک نرم به کمک دستور $\sup \frac{|<u,x>|}{\|x\|}$ تعریف می‌کند که در حالت فضاهای بعدمتناهی همان تابع تکیه را به دست می‌دهد*. مساله حل دستگاه (6) در E، به شرط آنکه هریک از دنباله‌های $u_i=(a_{ij})\, j\geqslant 1$ عضو E' فرض شود، همان طور که هلی ملاحظه می‌کند، برمی‌گردد به آنکه دو مسالهٔ زیر حل شود: اولاً مطلوب است یک صورت خطی پیوسته L روی فضای نرمدار E' به قسمی که به ازای هر اندیس i داشته باشیم $L(u_i)=b_i$، ثانیاً مطلوب است تعیین آنکه آیا یک چنین صورت خطی می‌تواند به شکل $u\to <u,x>$ به ازای x ی در E نوشته شود. می‌دانیم که قسمت اولاً به شرایطی از نوع (10) بر می‌گردد، همان طور که هلی خاطرنشان می‌سازد. قسمت ثانیاً، همان طور که هلی مشاهده می‌کند، الزاماً جواب ندارد هرچند L وجود داشته باشد. هلی خود را محدود می‌کند به اینکه شرایطی کافی برای وجود جواب $z\in E$ در چند حالت خاص به دست دهد (هلی ۱۹۲۱).

این افکار شکل قطعی خود را در ۱۹۲۷ یافتند و این در یک رسالهٔ اساسی ه. هان بود (هان ۱۹۲۷). قضایای مندرج در این رساله دو سال بعد (مستقلاً) به وسیلهٔ س. باناخ مجدداً به دست آمد (باناخ ۱۹۲۹). فرآیند

---

* برای آنکه بدین ترتیب یک نرم به دست آید، باید فرض کرد که از رابطه $<u,x>=0$ به ازای هر $x\in E$، لازم آید $x=0$، همان طور که هلی نیز به صراحت بیان می‌دارد.

مینکوفسکی ـ هلی به وسیلهٔ هان در یک فضای نرمدار دلخواه به کار گرفته می‌شود و لذا روی دوگان، یک ساختمان فضای نرمدار (کامل) را به دست می‌دهد. همین مطلب بیدرنگ به هان اجازه می‌دهد که دوگانیهای متوالی یک فضای نرمدار را در نظر بگیرد و بطور کلی مسالهٔ فضاهای منعکس را مطرح سازد. هلی این فضاها را به طور مبهم دیده بود. اما فوق همهٔ اینها آن است که مسالهٔ عمدهٔ تمدید یک تابعی خطی پیوسته با حفظ نرم به وسیلهٔ هان حل شده است آن هم به شکلی کاملاً کلی و با استدلالی متکی بر استقراء فرا ـ متناهی (ترانسفینی) که یکی از نخستین مثالهای یک کاربرد مهم اصل انتخاب در آنالیز تابعی است *. باناخ یک بررسی پیشرفته‌ای از روابط بین نگاشتهای خطی پیوسته و ترانهادهٔ آنها را به نتایج فوق می‌افزاید. بدین ترتیب نتایجی را که تا آن زمان فقط در مورد فضاهای L^p شناخته شده بود (ریتس ۱۹۱۰)، در مورد فضاهای نرمدار کلی تعمیم می‌دهد. وسیله‌ای که به کار می‌برد قضیه‌ای بسیار عمیق راجع به بخشهای ضعیفاً "بستهٔ" یک دوگان است (فصل ۴ بند ۲ قضیهٔ ۵ ملاحظه شود). این نتایج به نحوی تکان دهنده با استفاده از مفهوم فضای خارج قسمت یک فضای نرمدار بیان می‌شوند. این مفهوم را چند سال بعد، هاوسدورف و خود باناخ وارد کردند. سرانجام باز هم باناخ است که ارتباط بین فشردگی ضعیف گوی یکه انعکاسی بودن فضا را دست کم در مورد فضاهای از نوع شمارش‌پذیر در می‌یابد (همان طور که اشاره کردیم قبلاً در موارد خاص متعدد فشردگی ضعیف گوی یکه مشاهده شده بود) (باناخ ۱۹۳۲، ص ۱۸۹). نظریهٔ دوگانی فضاهای نرمدار را می‌توان از این زمان به بعد در بزرگراههایش مستقر به حساب آورد.

---

* پیش از آن، در ۱۹۲۳، باناخ استدلالی مشابه برای تعریف یک اندازهٔ تغییرناپذیر در صفحه آورده بود (که برای هر بخش کراندار معین باشد) (باناخ ۱۹۲۳).

درهمین عصر، قضایایی با کرداری متناقض‌نما پا برعرصه گذاشتند. نخستین مثالهای این قضایا برمی‌گردد به ۱۹۱۰. هلینگر و توپلیتس در این سال به اختصار ثابت کرده بودند که دنباله‌ای مانند $B_n(x,y)$ از صورتهای دوخطی کراندار روی یک فضای هیلبرت که برای هر زوج مفروض (a,b) مقادیرش $B_n(a,b)$ کراندار بماند (کراندار به عددی که بستگی به b,a دارد)، در واقع کراندار یکنواخت درهرگوی است. اثبات آنها با برهان خلف و با ساختن یک زوج مخصوص (a,b) است که فرض را زیرپا گذارد. روش ساختن آنها یک روش استقرایی است که از آن پس بنام "روش کوهان لغزیده" معروف گشته و هنوز هم در مسائل مشابه خیلی به درد می‌خورد (رجوع شود به فصل ۴، بند ۵، تمرین ۴). وانگهی در ۱۹۰۵، لبگ روش مشابهی به کار برده بود تا ثابت کند توابع پیوسته‌ای هستند که سری فوریهٔ آنها در بعضی نقاط واگرا است. در همان سال ۱۹۱۰، لبگ نیز همین روش را به کار می‌برد تا ثابت کند که در L^1 یک دنبالهٔ ضعیفا "همگرا یک دنبالهٔ کراندار از حیث نرم است*. به این مثالها در طول سالهای بعد اضافه شد اما بی آنکه فکر جدیدی وارد شود، تا آنکه در ۱۹۲۷، باناخ و اشتاینهاوس (با همکاری جزئی س. ساکس) این پدیده‌ها را به مفهوم مجموعهٔ لاغر و به قضیهٔ بئر در فضاهای متریک کامل مربوط می‌سازند و یک قضیهٔ کلی که همهٔ نتایج خصوصی پیشین را دربرمی‌گیرد به دست می‌آورند (باناخ و اشتاینهاوس، ۱۹۲۷). از سوی دیگر، مطالعهٔ مسائل مربوط به

---

* قضیهٔ مشابهی (که ساده‌تر است) در ۱۹۰۷ به وسیلهٔ لاندا و به اثبات رسید: اگر سری با جملهٔ عمومی $u_n x_n$ یک سری همگرا به ازای هر دنبالهٔ $(x_n)\in L^q(N)$ باشد، آنگاه دنبالهٔ (u_n) متعلق است به $L^q(N)$ با قید $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ این قضیهٔ نقطهٔ عزیمت ف. ریتس در نظریه‌اش راجع به فضاهای L^p گردید.

"کاتگوری" درفضاهای نرمدارکامل، باناخ رادرهمین زمان به نتایج متعددی روی نگاشتهای خطی پیوسته هدایت کرده بود. جالبترین وبی‌گمان عمیق‌ترین این نتایج قضیهٔ "نمودار بسته" است که مانند قضیهٔ باناخ واشتاینهاوس به عنوان ابزاری ترازاول درآنالیزتابعی جدید ظهور کرده است (باناخ ۱۹۲۹).

انتشارکتاب باناخ راجع به "اعمال خطی" (باناخ ۱۹۳۲) را می‌توان ابتدای سن بلوغ برای نظریهٔ فضاهای نرمدار نامید. همهٔ نتایجی که در سطور پیش مورد بحث قرار دادیم، با بسیاری قضایای دیگر در این مجله به چشم می‌خورند. هرچند هنوز اندکی بی‌نظمی در ارائه قضایا هست، امامثالهای متعدد و تکان دهنده‌ای، که از حوزه‌های مختلف آنالیزگرفته شده‌اند، این نتایج را همراهی می‌کنند، ودرآن زمان گمان می‌رفت که این مثالها نشانهٔ آینده‌ای درخشان برای نظریه‌اند. حقیقتاً "این اثرموفقیتی چشمگیری داشت ویکی ازتاثیرات آنی آن این بود که زبان وعلامت گذاریها باناخ پذیرش کمابیش عمومی بخودگرفت. اما علی رغم تعداد بسیار زیادی تحقیقات دراین ۲۰ سال کارروی فضاهای باناخ، پیشرفت اندکی درمسائل حل نشده‌ای که باناخ حل نشده باز گذاشته بود حاصل شده است. ازطرف دیگر، به استثنای نظریهٔ جبرهای باناخ وکاربردهایش درآنالیزهمساز، فقدان تقریباً کامل کاربردهای جدیدی از نظریهٔ فضاهای باناخ درمسائل آنالیز کلاسیک، امیدهای متکی براین نظریه را تا حدودی تبدیل به یاس کرده است.

گسترشهای باروترنظریه، بیشتر درجهت توسعه وتحلیل اصولی بیشتری ازمطالب وابسته به فضاهای نرمدار حاصل گشته‌اند. هرچندفضاهای تابعی که ازآغاز قرن بیستم ملاحظه شده بودند غالباً "مجهز به یک نرم "طبیعی" بوده باشند، اما استثنائاتی هم دیده شده بود. حدود ۱۹۱۰، ا. هـ. مور پیشنهاد

کرده بود که همگرایی یکنواخت به "همگرایی یکنواخت نسبی" تعمیم یابد که در آن یک همسایگی O تشکیل شود از توابعی مانند f که در رابطه‌ای نظیر $|f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$ صدق کنند، g یک تابع همه جا مثبت است که می‌توانند با همسایگی مورد نظر تغییر کند. از طرف دیگر، پیش از ۱۹۳۰ مشاهده شده بود که مفاهیمی از قبیل همگرایی ساده، همگرایی به اندازه برای توابع اندازه پذیر، یا همگرایی فشرده برای توابع تام، نمی‌توانستند به کمک یک نرم تعریف شوند. در ۱۹۲۶، فرشه ملاحظه کرده بود که فضاهایی برداری از این دست می‌توانند متریک پذیر و کامل باشند. اما نظریهٔ این فضاهای کلیتر، گسترشی ثمربخش نمی‌توانست یافت مگر آنکه ارتباطی با تحدب برقرار کند. مفهوم تحدب (که دیدیم نزد هلی آشکار شد) موضوع مطالعات باناخ و شاگردانش قرار گرفت. ایشان بازشناختند که می‌توان قضایای متعددی از نظریهٔ فضاهای نرمدار را با در نظر گرفتن تحدب تعبیر کرد. بدین ترتیب راه برای تعریف کلی فضاهای موضعا "محدب که در ۱۹۳۵ به وسیلهٔ ج فون نیومن داده شد هموار گشت. نظریهٔ این فضاها وخصوصا "مسائل مربوط به دوگانی در ده سال اخیر بیش از همه گسترش یافته اند. ما در این کتاب نتایج اصلی این بررسیها را گنجانده ایم. لازم به تذکر است که در این مورد از طرفی چه ترفیاتی در سادگی و کلیت اثباتها وارائه به چشم می‌خورد که امکان آن مدیون پایه ریزی روشن مفاهیم توپولوژی عمومی است که خود در سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۴۰ تحقق یافت. از طرف دیگر اهمیتی که مفهوم مجموعهٔ کراندار بخود گرفته است، این مفهوم در ۱۹۳۵ به وسیلهٔ کولموگوروف وفون نویمن وارد شد ونقش اساسی آن در نظریهٔ دوگانی به وسیلهٔ کارهای ماکی روشن گردید (ماکی ۱۹۴۵ و ۱۹۴۶). بالاخره وما فوق همه مطمینم که فشار عمده‌ای که انگیزهٔ این تحقیقات است در امکانات جدید کاربردشان در آنالیز است، آن هم در حوزه‌هایی که نظریهٔ

با ناخ نمی‌توانست عمل کند. در این زمینه باید از نظریهٔ فضای دنباله‌ها، کارکوت، توپلیتس وشاگردهایشان دریک سلسله مقاله (کوت ۱۹۵۱)، تاسیس جدیدنظریهٔ تابعیهای تحلیلی "فانتاپیه وعلی الخصوص نظریهٔ توزیعهای شوارتس نام برد (شوارتس ۵۱-۱۹۵۰) درنظریهٔ شوارتس، نظریهٔ جدید فضاهای موضعا "محدب به دشت وسیعی ازکاربردها دست یافته است که بی‌گمان به این زودیها بایرنمی‌شود.

مـــراجع مقدمهٔ مترجم

[1] AUPETIT, B., Proprietes Spectrales des Algebres de Banach, Lecture Notes 735,Springer 1979.

[2] BREMERMANN, H.J., Holomorphic Functions and Complex Convexity in Banach spaces, Pacific J.Math, Vol.7,1957,PP 811-831.

[3] CHADEMAN, A., Sur les Notions Elementaires de la Theorie spectrak, These,Universite paris ,1970.

[4] CŒURE,G., Le theoreme de convergence dans les espaces localement convexes complexes,C.R. Acad.Sci: Paris,t.264 (1967),PP 287-290.

[5] LELONG,P., Fonctions Plurisousharmoniques dans les Espaces vectoriels Topologiques, Lecture Notes 7 (Sprixger 1968.

[6] NOVERRAZ,P., Fonctions plurisousharmoniques et Analytiques dans les Espaces Vectoriels Topologiques, Ann.Inst.Fourier,t.19 n°2 (1969),PP. 419-493.

فهرست نا مهـــا

آ بـل	Abel
ا شتا ینـها وس	Steinhaus
ا ستلـیجس	Stieljes
با نا خ ،س .	S. Banach
برنولـی،د .	D. Bernoulli
بسل	Bessel
بیر	Beer
بئر	Baire
پا رسوا ل	Parseval
پوا سن	Poisson
پوا نکا ره ،هـ.	H. Poincare
پیـنچرلـه	Pincherle
توپلـیتس	Toeplitz
چبیچف	Tchebitchev
دیریکلـه	Dirichlet
رلـیخ	Rellich
ریـتس ،ف .	F. Riesz
سا کس ،س .	S. Saks
ستون ،م.هـ.	M.H. Stone
شتـور م	Sturm
شمیت	Schmidt
شوا رتز ،ل .	Schwarz

فا نتا پـیـه	Fantappie
فـردهولـم	Fredholm
فـرشه	Frechet
فوریـه	Fourier
فیشر	Ficher
کرا مر	Gramer
کخ ،فـو ن	Von Koch
کوت	Kothe
کولـموگوروف	Kolmogoroff
گرا م	Gram
گریـن	Green
لاندا و	Landau
لـبگ	Lebesgue
لـژا ندر	Legendre
لـوویگ	Lowig
لـیـوویـل	Liouville
ما کی	Mackey
مور	E.H. Moore
مینکوفسکی	Minkowski
نیـومن ، C	C, Neuman
نیـومن،فـون،ج.	J.Von Neumann
ولـترا	Volterra

Hadamard	ها دا ما ر
H. Hahn	هـا ن
E. Helly	هلـی،ا .
Hellinger	هلـینگر
Hausdorff	ها وسدورف
Hill	هیـل

مراجــــــع

(I) C. STURM : a) Sur les equations differentielles lineaires du second ordre,Journ.de math. (1),t.I (1836),P. 106-186;b) Sur une classe d'equations a differences partielles,ibid., P. 373-444.

(II) J. LIOUVILLE : a) Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series dont les divers termes sont assujettis a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre contenant un parametre variable, Journ. de Math. (1),t.I (1836),P. 253-265,t. II (1837),P.16-35 et 418-436;
b) D'un theoreme du a M.Sturm et relatif a une classe de fonctions transcendantes,ibid.,t. I(1836),P.269-277.

(III) J.P. GRAM, Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate,J. de Crelle,t. XCIV (1883),P.41-73.

(IV) H.MINKOWSKI : a) Geometrie der Zahlen,1re ed.,Leipzig (Teubner),1896; b) Theorie der konvexen Korper,Gesammelte Abhandlungen, t. II,P.131-229, Leipzig-Berlin (Teubner),1911.

(V) H. POINGARE : a) Sur les equations de la Physique mathematique,Rend. Palermo, t. VIII (1894), P. 57-156 (= Œuvres, t. IX, P. 123-196, Paris (Gauthier-Villars), 1954); b) La methode de Neumann et le probleme de Dirichlet, Acta Mathematica, t. XX (1896),P. 59-142 (= Œuvres , t. IX, P. 202-272,Paris (Gauthier-Villars),1954).

(VI) I.FREDHOLM, Sur une classe d'equations fonctionnelles, Acta Mathematica, t. XXVII (1903),p.365-390.

(VII) D. HILBERT, Grundzuge einer allgemeinen Theorie des linearen Integralgleichungen, Leipzig-Berlin (Teubner), 1912(= Gott. Nachr., 1904, 1905,1906,1910).

(VIII) E. SCHMIDT: a) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwickelung Willkurlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener,Math. Ann., t. LXIII (1907),p. 433-476 ; b) Ueber die Auflosung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten,Rend.Palermo, t. XXV (1908),p.53-77.

(IX) F. RIESZ : a) Untersuchungen uber Systeme integrierbarer Funktionen,Math.Ann.,t.LXIX (1910),p.449-497 ; b) Sur certains systemes singuliers d'equations integrales, Ann. Ec. Norm.Sup.(3),t. XXVIII (1911),p.33-62;
c) Les systemes d'equations lineaires a une infinite d'inconnues,Paris (Gauthier-Villars),1913;d) Ueber lineare Funktionalgleichungen,Acta Mathematica,t.XLI (1918),p. 71-98; e)Zur Theorie des Hilbertschen Raumes,Acta litt.ac scient.(Szeged),t.VII (1934-35),p.34-38:

(X) E. HELLY, Ueber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten,Monatshefte fur Math.und Phys.,t.XXXI (1921),p.60-91.

(XI) H. HAHN, Ueber lineare Gleichungssysteme in linearen Raumen,J.de Crelle, t.CLVII (1927),P.214-229.

(XII) S.BANACH: a) Sur le probleme de la mesure, Fund. Math., t.IV (1923),p. 7-33; b) Sur les fonctionnelles lineaires, Studia Math.,t.I (1929),p.211-216 et 223-239; c) Theorie des operations lineaires,Warszawa,1932.

(XIII) S.BANACH et H. STEINHAUS, Sur le principe de condensation des singularites,Fund.Math.,t.IX (1927),p.50-61.

(XIV) G.W. MACKEY: a) On infinite-dimensional linear spaces, Trans.Amer.Math. Soc., t.LVII (1945),p.155-207 ;b)On convex topological spaces,Trans.Amer.Math.Soc.,t.LX (1946),p. 519-237.

(XV) G. KOTHE, Neubegrundung der Theorie der vollkommenen Raume, Math. Nachr.,t.IV (1951),p.70-80.

(XVI) L.SCHWARTZ,Theorie-des distributions,Actual.Scient.et Ind., n^{os} 1091 et 1122,Paris (Hermann),1950-51.