آیا وارون تعمیم‌یافتهٔ A با A جابجاپذیر است؟

نوشتهٔ: ادوارد. ت. ونگ
ترجمهٔ: منصور آقاسی

هر دانشجوی مبتدی در جبر خطی با مفهوم ماتریس وارون پذیر A و وارون آن، A^{-1}، آشنایی دارد. چنانکه معمول است، ابتدا نشان داده می‌شود که A و A^{-1} جابجاپذیرند و سپس قابل بیان بودن A^{-1} به صورت بسجمله‌ای برحسب A نشان داده می‌شود. اخیراً "وارون تعمیم‌یافتهٔ (وارون مور- پنروز)(۱)" A^+ برای ماتریس A مبحثی مهم در تئوری و کاربرد جبر خطی شده است [1] و [2]. طبیعی است سوال شود که آیا الزاماً "A^+ با A جابجاپذیر است؟ به طوری که نشان خواهیم داد در حالت کلی چنین نیست اما هنوز جای این سوال باقی است: چه وقت A با A^+ جابجاپذیر است؟ آیا اگر A با A^+ جابجاپذیر باشد می‌توان A^+ را به صورت بسجمله‌ای برحسب A بیان کرد؟ در این یادداشت به این دو سوال پاسخ خواهیم داد. پیش از پرداختن به این سوالات، برای فراهم آوردن اطلاعات زمینه‌ای دربارهٔ A^+ اندکی درنگ می‌کنیم.

وارون تعمیم‌یافته یا وارون مور- پنروز یک ماتریس را می‌توان به طور جبری یا هندسی مشخص کرد. از نظر هندسی با تبدیل خطی $A: V \longrightarrow W$ سروکار داریم که در آن V و W فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی هستند. علامت $(\,|\,)$ را برای ضرب داخلی و علامت $\|\ \|$ را برای نرم بردارها در فضاهای V و W به کار می‌بریم. فضاهای پوچ و برد A را به ترتیب با N_A و R_A نشان می‌دهیم. همچنین $N_A^\perp$ و $R_A^\perp$ را متممهای متعامد آنها می‌گیریم. در این صورت $V = N_A \oplus N_A^\perp$ و $W = R_A \oplus R_A^\perp$. به ازای هر $\beta \in W$، به طور منحصربفرد داریم $\beta = \beta_1 + \beta_2$، که در آن $\beta_1 \in R_A$ و $\beta_2 \in R_A^\perp$. به عبارت دیگر β_1 تصویر متعامد β روی R_A است. چون A به صورت یک به یک مجموعهٔ $N_A^\perp$ را روی R_A تصویر می‌کند، بردار منحصربفردی مانند α_β در $N_A^\perp$ وجود دارد به طوری که $A(\alpha_\beta) = \beta_1$. نگاشت A^+ از W به V که به صورت $A^+(\beta) = \alpha_\beta$ تعریف می‌شود وارون تعمیم‌یافتهٔ A است، [1] و [4].

به بیان معادل، $A^+ = \tilde{A}Q$ که در آن Q نگاشت تصویر متعامد W روی R_A است و $\tilde{A}$ وارون تحدید A به $N_A^\perp$ است. به ازای هر $\beta \in W$، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $\alpha \in V$ داریم، $\| A(A^+\beta)-\beta \| \leq \| A\alpha - \beta \|$. بعلاوه اگر $\alpha \in V$ و $\| A\alpha - \beta \| = \| A(A^+\beta)-\beta \|$، آنگاه $\| A^+(\beta) \| \leq \| \alpha \|$، [1] و [2] و [4].

از نظر جبری، می‌توان نشان داد که به ازای هر ماتریس حقیقی یا مختلط $m\times n$ نظیر A، ماتریس منحصربفرد $n\times m$ ی مانند A^+ وجود دارد به طوری که: (1) $AA^+A=A$ و $A^+AA^+=A^+$ (2) AA^+ ، A^+A خودالحاق باشند (ماتریس خودالحاق اگر حقیقی باشد متقارن و اگر مختلط باشد مزدوج متقارن است). درحقیقت ماتریس منحصربفرد A^+ چیزی نیست جز همان وارون تعمیم‌یافته که قبلاً به صورت هندسی بیان گردید [1] و [2] و [3] و [5]. بنابراین بعضی شرایط (۱) و (۲) را به عنوان تعریف

وارون تعمیم‌یافته درنظر می‌گیرند. ما هردو مورد را برای A^+ دربحث زیر که مربوط به شرایط جابجاپذیری A و A^+ است، به‌کار خواهیم برد. ابتدا از توصیف جبری استفاده می‌کنیم. اگر A ماتریس مربعی نباشد، A^+A و AA^+ بعدهای متفاوتی دارند. بنابراین بهتر است توجه خود را به ماتریسهای مربع محدودسازیم. بنابراین اگر A و A^+ جابجاپذیر باشند، می‌توانیم بلافاصله شرط (۱) را به‌کار ببریم و تساوی $A=A^2A^+$ را نتیجه بگیریم. بنابراین به‌ازای هر k، داریم $A=A^k(A^+)^{k-1}$. درنتیجه $A=0$ به‌شرط آنکه A پوچ توان[۳] باشد. پس برای ماتریس پوچ توان وناصفر A، ماتریسهای A و A^+ نمی‌توانند جابجاپذیر باشند. بسیار خوب، چه‌وقت این ماتریسها جابجاپذیرند؟ اولین قضیه جوابها را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و A یک تبدیل خطی از V به V باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

(۱) $AA^+ = A^+A$.

(۲) $N_A^\perp = R_A$.

(۳) $N_A = N_{A^*}$، که‌در آن A^* ماتریس الحاقی[۴] A است.

(۴) $A^*=PA$، که‌در آن P یک تبدیل خطی وارون پذیر روی V است.

به‌عبارت دیگر اگر A و A^* را به‌عنوان ماتریس درنظر بگیریم صورت پلکانی تحویل یافتهٔ سطری آنها یکی است.

اثبات: معادل بودن شرایط (۱) و (۲)، (۲) و (۳)، و (۳) و (۴) را اثبات خواهیم کرد.

فرض کنیم (۱) برقرار باشد، آنگاه به‌ازای هر $\alpha \in N_A^\perp$ داریم:

$\alpha=A^+(A\alpha)=A(A^+\alpha) \in R_A$. همچنین اگر $\alpha \in R_A$ آنگاه $\alpha=A(A^+\alpha)=A^+(A\alpha) \in N_A^\perp$. بنابراین $N_A^\perp = R_A$. فرض کنیم (۲) برقرار باشد. آنگاه $R_A^\perp = N_A$. به‌ازای هر $\alpha \in V$ داریم $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ که‌در آن $\alpha_1 \in N_A^\perp$ و $\alpha_2 \in N_A=R_A^\perp$ بنابراین

$(A^+A)\alpha = A^+(A\alpha_1) = \alpha_1$ و $(AA^+)\alpha = A(A^+\alpha)=A(A^+\alpha_1)=\alpha_1$

درنتیجه $AA^+=A^+A$. از رابطهٔ $(A\alpha|\beta)=(\alpha|A^*\beta)$ به‌ازای هر α و β در V، داریم $N_A = R_{A^*}^\perp$. یا به‌بیان معادل $N_{A^*}=R_A^\perp$. اگر (۲) برقرار باشد، آنگاه $N_A = R_A^\perp = N_{A^*}$. برعکس اگر $N_A=N_{A^*}$، آنگاه $N_A=R_A^\perp$ و یا $N_A^\perp = R_A$.

فرض کنیم $N_A = N_{A^*}$ و $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\ldots,\alpha_n\}$ یک پایهٔ V باشد که‌در آن $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_t\}$ پایه‌ای برای $N_A=N_{A^*}$ است. مجموعه‌های $\{A\alpha_{t+1},\ldots,A\alpha_n\}$ و $\{A^*\alpha_{t+1},\ldots,A^*\alpha_n\}$ مستقل خطی هستند. فرض کنیم P یک تبدیل خطی وارون پذیر روی V باشد به‌طوری‌که $P(A^*\alpha_j)=A\alpha_j$ به‌ازای $j=t+1,\ldots,n$. آنگاه به‌ازای هر $\cancel{i=1,2,\ldots,n}$ داریم $PA^*(\alpha_i)=A(\alpha_i)$. بنابراین $PA^*=A$. طرف دیگر واضح است.

به‌یاد آورید که یک تبدیل خطی نرمال است اگر با الحاق خودش جابجاپذیر باشد. اگر A نرمال باشد، آنگاه به‌ازای هر $\alpha \in V$ داریم $(A\alpha|A\alpha)=(A^*\alpha|A^*\alpha)$. از اینجا نتیجه می‌شود که $N_A=N_{A^*}$. از سوی دیگر ماتریس حقیقی

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نه نرمال است و نه وارون پذیر، اما $N_A = N_{A^t}$. بنابراین A با A^+ برای مجموعه‌ای گسترده‌تر از مجموعهٔ ماتریسهای نرمال جابجاپذیر است. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که ماتریسهایی که با وارون تعمیم‌یافتهٔ خود جابجاپذیرند، دقیقاً" همانهایی هستند که وارون تعمیم‌یافته‌شان قابل بیان بصورت یک بسجمله برحسب ماتریس اصلی است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و A یک تبدیل خطی از V به V باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

(۱) $AA^+ = A^+A$.

(۲) A^+ را می‌توان به صورت یک بسجمله برحسب A بیان کرد.

اثبات. مسلماً" از (۲) می‌توان (۱) را نتیجه گرفت. فرض کنیم A و A^+ جابجاپذیر باشند. طبق قضیهٔ ۱ زیرفضاهای $N_A^{\perp}$ و R_A یکی هستند. این زیرفضا را W می‌نامیم. تحدید A به W یک ایزومرفیسم روی W است و تحدید A^+ به W ایزومرفیسم وارون است. بنابراین نسبت به یک پایه برای V که از توسعهٔ یک پایه از W حاصل شود، ماتریسهای A و A^+ بصورت

$$A=\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}, \quad A^+=\begin{pmatrix}D^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}$$

هستند، که در آن D یک ماتریس $r\times r$ وارون پذیر است.

فرض کنیم $m(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$ بسجملهٔ مینیموم D باشد. آنگاه:

$$a_0 I_r = -(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D) = -D(D^{m-1}+a_{m-1}D^{m-2}+\dots+a_1I_r)$$

چون D وارون پذیر است و $m(D)=0$ و $a_0\neq 0$ بنابراین:

$$D^{-1} = -\frac{1}{a_0}(D^{m-1}+a_{m-1}D^{m-2}+\dots+a_2D+a_1I_r)$$

$$= -\frac{1}{a_0^2}(a_0D^{m-1}+a_{m-1}a_0D^{m-2}+\dots+a_2a_0D+a_1a_0I_r)$$

$$= \frac{1}{a_0^2}|a_1D^m+(a_1a_{m-1}-a_0)D^{m-1}+\dots+(a_1^2-a_2\alpha_0)D|$$

$$=P(D)$$

که $P(D)$ یک بسجمله برحسب D با جملهٔ ثابت صفر است. بنابراین:

$$A^+ = \left[\begin{array}{c|c}D^{-1}&0\\\hline 0&0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}P(D)&0\\\hline 0&0\end{array}\right] = P\left(\left[\begin{array}{c|c}D&0\\\hline 0&0\end{array}\right]\right) = P(A)$$

و قضیهٔ (۲) ثابت شده است.

Edward T.Wong, Does the Generalized Inverse of A Commute with A?, *Mathematics Magazime*, Vol.59, No.4, October 1986.

توضیحات :

1. Moore-Penrose
2. setf-adjoint
3. nilpotent
4. adjoint
5. row-reduced echelon
6. isomorphism

منابع :

[1] S.L.Campbell and C.D. Meyer Jr., Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London and San Francisco, 1979.

[2] R.E.Cline, Elements of the Theory of Generalized Inverses for Matrics, EDC/UMAP, Newton, Mass., 1979.

[3] R.A.Penrose,A generalized invers for matrics,Proc. Cambridge Phil.Soc.,51(1955)406-413.

[4] Edward T.Wong,Generalized inverses as linear transformations.Math.Gaz.63(1979)176-181.

[5] , Involutory functions and Moore-Penrose inverses of matrices in an arbitrary field,Linear Algebra and Its A-plications, 48(1982) 283-291.

پیک ریاضی

جلددوم ،شماره‌ٔ دوم ،تابستان ۶۶

روشی یکپارچه برای اثبات قضیه‌های گوناگون آنالیزمقدماتی

نوشته‌ٔ : مایکل و.بوتسکو

ترجمه‌ٔ : قهرمان طاهریان

هدف ازاین نوشتار به‌دست دادن روشی یکپارچه برای اثبات تعدادی ازقضیه‌های آنالیزمقدماتی است .بعلاوه ،اثباتها با روش پیشنهادی غالبا "ساده‌ترشده‌اند .

اساس روش ما برتعریف ولم زیر است که از [1] گرفته شده است .

تعریف . مجموعهٔ C اززیربازه‌های بستهٔ بازه [a,b] یک پوشش کامل [a,b] است هرگاه به‌ازای هر x در [a,b] عددی مانند $\delta(x)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که هرزیربازهٔ بستهٔ [a,b] شامل x که طولش کمتر از $\delta(x)$ باشد متعلق به C باشد.

لم . اگر C یک پوشش کامل [a,b] باشد آنگاه C شامل یک پارش [a,b] است، یعنی اعداد $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ یافت می‌شوند به‌طوری که به‌ازای هر k داشته باشیم $x_{k-1}<x_k$ و $I_k=[x_{k-1},x_k]$ متعلق به C است .

اثبات . فرض کنیم C شامل هیچ پارش [a,b] نباشد .دراین صورت با