پیک ریاضی

جلددوم‌شماره‌ٔ اول ،بهار ۱۳۶۶

آمـــوزش اعدادحقیقی

نوشته‌ٔ : ریچاردا شتانیر

ترجمه‌ٔ : شعله‌ٔ میرعبدالباقی

درآموزش آنالیزچنین معمول است‌که اغلب بدون اثبـــات فرض می‌کنندکه اعدادحقیقی یک میدان کامل تشکیل می‌دهند (ویا بــا عبارتی باهمین مضمون با واژه‌های ابتدایی تر). اگرهم‌اثباتی‌آمــوزش داده‌شود ،معمولا" متکی به‌ساختمانی ازاعدادحقیقی است‌که‌با استفــاده ازروشی مانندبریدگیهای ددکیندساخته می‌شود .دراینجا قصددارم‌توضیـــح دهم‌که‌چرا این شیوه‌ها رانا مطلوب می‌دانم

ظاهرا "ایده‌ای که‌دروزای این شیوه‌ها قراردارداین است‌کــه ریاضیات عبارت است ازمطالعه‌ٔ دستگاهها با تکیه‌براصول موضوع ،واینکــه این اصول موضوع‌را می‌توان بدلخواه انتخاب کرد ،فقط مشروط براینکــه سازگارباشند .این رهیافت درشاخه‌هایی نظیرنظریه‌ٔ گروهها ،آنجاکه‌گـروه به‌صورت دستگاهی که‌برپایه‌اصول موضوع‌معینی قراردارد‌تعریف می‌شــود ، کاملا" مناسب است‌ونتایج درستی‌به‌با رمی‌آورد .امابا اعدادحقیقـــی نمی‌توان با این روش ره‌یافت ،چه‌دانشجویان ازقبیل این نوع اعـــداد

را می‌شناسند (احتمالا" به‌صورتی نسبتا "مبهم). بنابراین نتایجی را که درنظر داریم بایستی براساس آنچه که دانشجویان ازقبیل درمورداعدادحقیقی می‌دانندثابت کنیم ، ونمی‌توانیم ازتعاریف یا ساختمانهای جدیداستفاده کنیم . بویژه ، اگریک میدان مرتب کامل بسازیم ، فقط نشان داده‌ایم که میدان مرتب کاملی وجوددارد ، ونشان نداده‌ایم که اعدادحقیقی یک میدان مرتب کامل تشکیل می‌دهند .

بدین ترتیب مسا له این است که دانشجویان را متقاعدسازیم که اعداد حقیقی یک میدان مرتب کامل تشکیل می‌دهند . اینکه اعدادحقیقی یک میدان مرتب تشکیل می‌دهندراهمه می‌دانند ، اما آنچه که اشکال ایجاد می‌کندکمال این میدان است . دراینجالازم است بدانیم که دانشجویان عدد حقیقی را چگونه می‌انگارند . من تصورمی‌کنم که دوامکان وجوددارد ، یا به‌صورت یک اندازه (مثلا" اندازه‌یک طول)ویا بصورت یک عدداعشاری . اگراعداد حقیقی را به‌صورت یک اندازه‌درنظربگیریم ، آنگاه کمال را فقط می‌توان با توسل به‌درک شهودی توجیه کرد ، که ممکن است قانع کننده نباشد . اما اگر اعدادحقیقی را به‌صورت اعداداعشاری درنظربگیریم ، آنگاه می‌توان کمال را درقالب هریک ازفرمولبندیهای متداولش بشکل قانع کننده‌ای نشان داد . مثلا" ، تورستون [1] اثبات می‌کندکه هرمجموعهٔ غیرتهی‌ای ازاعداداعشاری کراندارازبالادارای کوچکترین کران بالااست . مثلا" ، نشان خواهم داد که هرعدداعشاری حددنباله‌ای ازاعدادگویاست ، وهردنبالهٔ کوشی ازاعداد اعشاری یک حددارد . درواقع واضح است که یک عدداعشاری را می‌توان به عنوان حددنباله‌ای متشکل ازبریده‌شده‌های آن عدددرنظرگرفت (مثلا" π حد دنبالهٔ ۳ ، ۳/۱ ، ۳/۱۴ ، ... است)بعلاوه اگر (a_n) دنباله‌ای کوشی ازاعداد اعشاری باشد ، آنگاه می‌توان یک عدداعشاری حددا ربصورت زیرساخت :

$$L = m + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots \qquad (0 \leq d_i \leq 9 \text{ و اعداد صحیح } d_i \text{ ، } m)$$

که در آن m عبارت است از بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی هریک از بیشمار اعضای دنباله و $m+\frac{d_1}{10}$ بزرگترین عدد در بین اعداد m و $m+\frac{1}{10}, \dots, m+\frac{9}{10}$ که کوچکتر یا مساوی هریک از بیشمار اعضای دنبالهٔ باشد، والی آخر. به ازای $r=0,1,2,\dots$ بازهٔ بسته‌ای به طول 10^{-r} شامل L و بینهایت اعضای دنباله می‌توان ساخت که با استفاده از آن و با توجه به اینکه این دنباله، دنباله‌ای کوشی است، می‌توان گفت که عدهٔ شماره‌پذیری از اعضای آن در فاصلهٔ 2×10^{-r} از L قرار می‌گیرند. بنابراین L حد دنباله است.

به نظر من اثباتی از این نوع باید در هر درس آنالیز گنجانده شود.

ملاحظات

۱ـ این اثبات را طوری تنظیم کرده‌ام که از بیان این واقعیت که یک عدد حقیقی معین می‌توانند نمایشهای اعشاری متفاوتی داشته باشد پرهیز کنم (مثلاً" $1=0/999\dots$)، زیرا فکر می‌کنم که اکثرا" به این واقعیت عقیده ندارند.

۲ـ بررسی اعداد حقیقی به صورت اصل موضوعی به دو سوال که توسط ریاضی کاران حرفه‌ای مطرح می‌شود پاسخ می‌دهد. این دو سوال عبارتند از:

الف ـ آیا اعداد حقیقی یکسانی را می‌توان با استفاده از ساختمانهای متفاوت، مثلاً" اعداد در مبنای ۲، به دست آورد؟

ب ـ آیا اعداد اعشاری واقعا" یک میدان مرتب تشکیل می‌دهند؟

جواب مثبت است ،زیرا اولا" همهٔ میدانهای مرتب کامل ایزومورف هستند ،وثانیا "می‌توان میدان مرتب کاملی ساخت (مثلا"با استفاده ازبریدگیهای ددکنید)ونشان داد که اعضایش بنحومناسبی مانند بسطهای اعشاری رفتار نموده اند .اما اعداد حقیقی را باید آنگونه که معمولا" پذیرفته می‌شوند شروع کرد نه با این ایده‌های پیشرفته ریاضی.

۳ـ من صحت فرضهای آنالیز نااستاندارد راکمتر از فرضهای آنالیز استاندارد می‌بینم .بنابراین به نظر من آنالیز نااستاندارد روش خوبی برای اثبات نتایج درمراحل ابتدایی نیست ،گرچه می‌تواند روش خوبی برای کشف این نتایج باشد.

Richard Steiner

Teaching about the real numbers American Mathematical Monthly March 1984.

[1]. H.A. Thurston.Differentiation and Integration,Blackie, London and Glasgow,1961.