لاکاتوش: اثبات و ابطال

یحیی تابش

ایمره لاکاتوش[1] پس از مرگ زودرس خود آثاری باقی گذاشت که دیدگاه تازه‌ای را در فلسفهٔ ریاضی مطرح می‌سازد. این دیدگاه نوین، تحرکی در فلسفهٔ ریاضی پدید آورده است به طوری که به نظر می‌رسد ایده‌های لاکاتوش می‌توانند مایهٔ شکل گرفتن مکتب جدیدی در فلسفهٔ ریاضی باشد.

فلسفهٔ ریاضی مشتمل بر مباحث هستی‌شناسی[2]، شناخت شناسی[3]، و روش شناسی[4] است. هستی شناسی به بررسی اشیاء و مفاهیم ریاضی و نحوهٔ وجود آنها می‌پردازد. در مباحث شناخت و روش شناسی، مسایلی از قبیل ماهیت اثبات ریاضی، منشاء اعتقاد به قضایای ریاضی، و فرآیند رشد نظریات ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرند. البته مرز بین این مباحث نسبت به یکدیگر کاملا" مشخص نیست و هر مکتب فلسفهٔ ریاضی بایستی موضع منسجمی در برابر این

مقولات اتخاذ کنند.

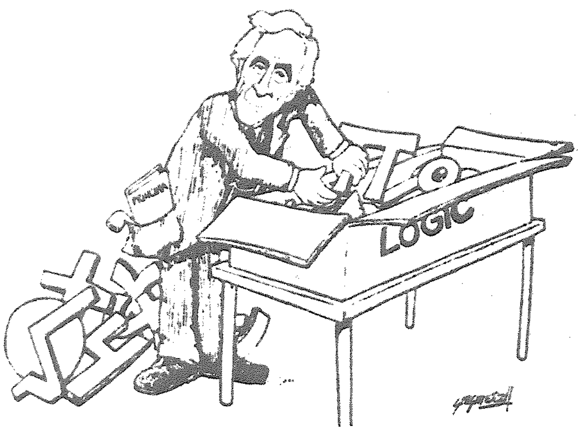
مکاتب عمدهٔ فلسفهٔ ریاضی را می‌توان به افلاطون گرایی (5)، منطق‌گرایی (6) ساخت گرایی (7)، وصورت‌گرایی (8) تقسیم بندی‌کرد. توجه اصلی این مکاتب تحکیم "یقین" در ریاضیات است. "یقین" ریاضی، که یکی‌از مشخصه های اصلی ریاضیات است، درچندقرن اخیر دستخوش تزلزلهایی شد، وسه مکتب اخیر هریک به نحوی‌درتکاپوی بازیابی این "یقین" بودند. ولی‌پیامد این تلاشها منجربه ارائهٔ تصویر مسخ شده‌ای‌از ریاضیات گردید که با چگونگی تکوین ریاضیات سازگار نیست وبا فعالیتهای روزمرهٔ ریاضی‌کاران حرفه‌ای نیز مطابقت ندارد. ازاین رو، ایده‌های جدیدلاکاتوش هیجان انگیزونویدبخش بوده است.

فلسفهٔ ریاضی‌ا فلاطون گرایی براین‌باوراستواراست که اشیاء ریاضی واقعی‌اندومستقل ازشناخت ومعرفت ما به‌آنها وجوددارند. البته اینها اشیائی‌مادی‌نیستندودرفراسوی زمان وفضای فیزیکی‌وجوددارند. این اشیاء تغییرناپذیرندوریاضیدان همچون یک دانشمندعلوم‌تجربی، ابداع‌کنندهٔ هیچ چیزنیست، زیراهمه‌چیزوجوددارد وریاضیدان تنها به‌کشف‌آنها می‌پردازد.

منطق گرایی پس ازپی‌گذاری‌نظریهٔ مجموعه‌ها توسط کانتورمطرح شد. پیداشدن پارادوکسهای معروف، مبانی ریاضیات رادستخوش بحران ساخت. گروهی‌به رهبری‌راسل (9)، فرگه (10)، ووایتهد (11) براین باوربودند که با درنظرگرفتن منطق به‌عنوان اساس ریاضیات وبازسازی ریاضیات بر اساس منطق، ریاضیات را ازاین بحران خواهندرهانیدواین پارادوکسها راکنارخواهندگذاشت، وبراین اساس مکتب منطق گرایی شکل‌گرفت. کار روی این برنامه‌نقشی اساسی درپیشرفت وتوسعهٔ منطق ایفاکردولی

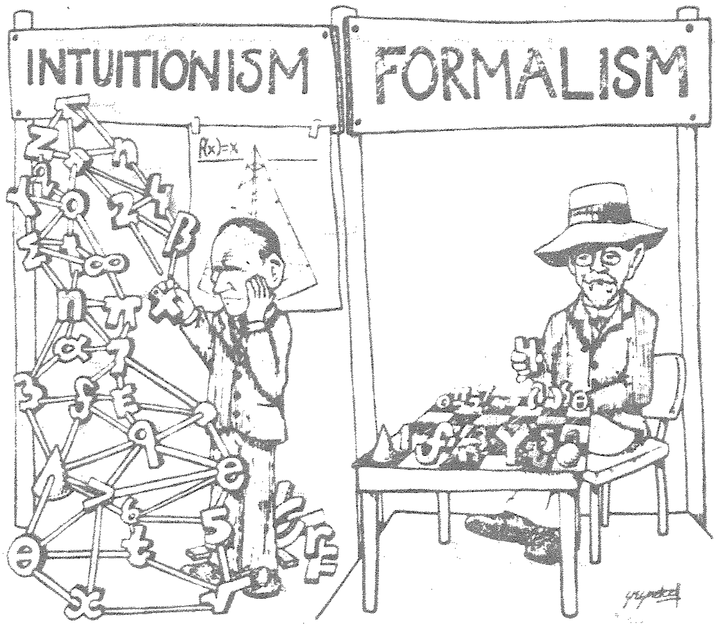
درراه هدف اصلی خودکه بازسازی تمامی ریاضیات مبتنی بر منطق بود با شکست مواجه شد. زیرا ساختار بسیار پیچیده ای برای ریاضیات عنوان شد که تحت این ساختار بررسی "قواعداستدلالهای درست "به سختی امکانپذیر میشد. اثرعظیمی که راسل با همکاری وایتهد به این خاطر تألیف کرد کتاب پرینسیپیا ماتماتیکا [۱۲] است. ولی درنوشته ای در اواخرعمرخود، راسل به شکست هدف بازسازی ریاضیات براساس منطق معترف شده است.

مکتب ساخت گرایی توسط ریاضیدان هلندی براوئر [۱۳] درحدود ۱۹۰۸ میلادی پایه گذاری شد. براوئر معتقدبودکه مجموعهٔ اعداد طبیعی براساس یک شهود بنیادی درست است و نقطهٔ شروع همهٔ ریاضیات محسوب میشود. او مدعی بودکه همهٔ ریاضیات بایستی براساس اعداد طبیعی ساخته شود. یعنی



اشیاء ریاضی فقط وقتی اعتبار دارند که براساس اعداد طبیعی با گامهایی متناهی قابل ساخت باشند و در اثبات وجود یک شیٔ ریاضی کافی نیست که نشان دهیم عدم وجود آن منجر به تناقض می‌شود. برای ساخت‌گرایان بسیاری از اثباتهای استانده‌ٔ ریاضی نامعتبر هستند. در برخی حالات ارائهٔ اثباتی ساختنی امکانپذیر است، ولی در بسیاری حالات اثباتی ساختنی غیرقابل دسترسی است. مثالی از این نوع " قاعدهٔ سه‌گانگی" (یا اصل تثلیث) است که هر عدد حقیقی یا مثبت است، یا صفر. قاعدهٔ سه‌گانگی براساس اصول ساختن اعداد حقیقی قابل اثبات است، ولی برای ساخت‌گراها چنین مطلبی مفهومی ندارد.

صورت‌گرایی بر این اساس شکل گرفته است که هیچ شیٔ ریاضی وجود ندارد و ریاضیات فقط از اصول، تعاریف، و قضایا تشکیل شده است. به عبارت



دیگرفقط ازفرمولها ـ یعنی فقط قواعدی وجوددارندکه براساس آنها فرمولی ازفرمول دیگرمشتق می‌شود ،ولی فرمولها دربارهٔ هیچ چیزی نیستند وتنها رشته‌هایی ازنمادها هستند .البته‌آنان قبول دارندکه‌فرمولهای ریاضی‌گاهی‌اوقات درفیزیک کاربردپیدا می‌کنند .ولی یک فرمول صرف ریاضی هیچ معنا وارزش واقعی ندارد .برنامهٔ هیلبرت(۱۴)که‌ازسردمداران صورت گرایی بود ،اصل‌موضوعی‌سازی همهٔ نظریه‌های ریاضی‌واثبات سازگاری وتمامیت‌آنهاست تا تناقضهایی که " یقین" درریاضیات را به‌مخاطره می‌اندازد ازصحنهٔ آن زدوده‌شوند .ولی این ایده ،ریاضیات را به‌بازی بی مفهومی تبدیل می‌کندهرچندیقین درآن حفظ شده‌باشد .

این مکاتب سه‌گانه‌رغبت چندانی بین ریاضی‌کاران پدیدنیاوردند . دراین شرایط بودکه‌لاکاتوش دیدگاه‌جدیدی درفلسفهٔ ریاضی‌عرضه‌داشت که هدف اصلی آن بررسی نحوهٔ اکتشاف درعلم‌ریاضی‌است وبرای او "یقین" جنبهٔ موقت ومتغییردارد .

لاکاتوش درمجارستان زاده‌شدوتحصیلات خودرا درریاضیات ،فیزیک، وفلسفه‌ادامه‌داد ،پس ازرهایی‌ازچنگال نازی ها وپس ازجنگ مدتی دررژیم کمونیستی مجارستان فعال بودولی‌بعدبه‌زندان افتادوسه‌سال رادرزندان گذراند .پس ازخلاصی اززندان،مدتی، به‌کارترجمهٔ کتابهای ریاضی‌به‌زبان مجاری پرداخت ،وپس ازتحولات سال ۱۹۵۶ ،به‌انگلستان رفت ودرآنجا به تحصیل دردورهٔ دکترای فلسفه‌مشغول شد .

لاکاتوش بیش ازهمه‌ازکارهای کارل پوپر (۱۴)وجورج پولیا (۱۵) متاثربود .پولیا معتقدبودکه‌درریاضیات نیز ،مانندعلوم‌تجربی جهت

اکتشافات عمده همواره از مثالهای خاص به قضایای عمومی است وتکیه به روش قیاس تحریف تجربهٔ تاریخ ریاضی است. پوپرکه درفلسفهٔ علم ایده هایی تازه عرضه کرد، براین باوراست که قواعدعلمی به طوراستقرایی ازتجربه ها ومشاهدات خاص بیرون نمی‌آیند، ونه لازم است ونه کافی که قواعد علوم را با استدلالهای استقرایی حاصل گردانیم بلکه اوتصور می‌کردقواعد علمی به صورت فرضیه ها وحدسها ابداع شده وسپس به محک تجربه درمی‌آیند تاردیا قبول شوند. اگرنظریه ای درآزمایشها موردقبول واقع شوددرجه ای ازاعتبارپیدا می‌کندوبه طورآزمایشی استقرارمی‌یابدولی‌هیچگاه به اثبات نمی‌رسد. یک نظریهٔ علمی ممکن است به طورعینی درست باشدولی‌ما هیچگاه با قطعیت ویقین این را نمی‌دانیم.

لاکاتوش با الهام ازایده‌های پوپر، اساسی ترین اثرخودرا تحت عنوان "**اثبات وابطال: منطق اکتشاف ریاضی**"[۱۵] نوشت. دراین اثرکه یک کلاس درس درآن تصویرشده است بحث برسراثبات رابطهٔ معروف اویلر[۱۶] $V-E+F=2$ درموردچندوجهیهاست (V تعدادوجوه، E تعدادیالها، و F تعدادرئوس). این حکم درابتدا برای چندوجهیهای منتظم بیان شد، سپس برای چندوجهیهای محدب، ودرواقع دراین نوشته لاکاتوش به توصیف کوششهایی می‌پردازدکه برای یافتن قلمروی دقیق درستی این حکم انجام شده است. درقالب گفتگوها ومناظرات درون کلاس ایده‌های مؤلف مطرح می‌شود. ابتدا اثبات کوشی[۱۷] مطرح شده ودربرخوردبا مثالهای نقض بتدریج اثباتی کامل عرضه می‌گردد. به موازات مناظرات کلاس، درپانویس کتاب، لاکاتوش تاریخچهٔ دقیق مثالهای نقض رابررسی‌کرده است ودیدگاههای خودرابا شواهد

تاریخی‌همراه می‌کند. درقسمت بعدی، مؤلف اثبات پوانکاره برای همین رابطه را ارائه می‌دهد و در پایان بحثی انتقادی تاریخی درباره تابع، انتگرال ریمان، و منحنیهای راست‌پذیر مطرح می‌شوند و لاکاتوش نشان می‌دهد بسیاری از مفاهیم آنالیز ریاضی از واکنشهای بین اثبات دیریکله (18) برای بسط توابع به‌صورت سریهای فوریه و مثالهای نقض آن ناشی‌شده‌اند.

لاکاتوش سه مرحله برای هرنظریه ریاضی درنظر می‌گیرد. مرحله ما قبل صوری، مرحله صوری، و مرحله ما بعدصوری. سه مکتب فلسفه ریاضی اخیر عمدتا" به بررسی مرحله صوری می‌پردازند، ولی لاکاتوش به مرحله ما قبل صوری توجه دارد که دوره هیجان انگیزخلق یک نظریه ریاضی است. دراین هنگام اثبات ریاضی بیشترجنبه بحث اکتشافی یا آزمایشی دارد و همه تعاریف و نتیجه‌گیریها جنبه موقتی دارد و در برخورد با مثالهای نقض و تفهیم نتایج است که این مفاهیم آهسته آهسته صوری می‌شوند. لاکاتوش می‌کوشد نشان دهد که ریاضیات زنده ریاضیات ما قبل صوری است و نظریه‌های ریاضی ما قبل صوری، دستگاههایی اقلیدسی نیستند. این گونه نظریه‌ها را لاکاتوش شبه تجربی (19) می‌نامد.

درنظریه‌های ریاضی، اعم از اقلیدسی یا شبه تجربی، شبکه‌ای از اصول قرار دارد که از طریق مجراهایی منطقی به نتایجی که درزیر قرار دارند مرتبط می‌شوند. استنتاج منطقی درهر دو نظریه از بالا به پایین است. ولی اعتقاد به درستی احکام در دو نظریه متفاوت است. در دستگاه اقلیدسی درستی از بالا به پایین القاء می‌شود و لازمه درستی نتایج عبور مجاز از مجراهای منطقی است. ولی درنظریه شبه تجربی هیچ مبنای قبلی برای اعتقاد به اصول وجود ندارد، — بلکه آنچه قابل بررسی می‌باشد نتایج پایینی است، یعنی دراینجا "نادرستی"

است که از پایین به بالا منتقل می‌شود. نادرستی چگونه بررسی می‌شود؟ از یک سو مثالهای نقض، اعم از مثالهای نقض کلی و مثالهای نقض موضعی، موجب قوام یافتن یک نظریهٔ ریاضی است و از سوی دیگر ایده‌های ماقبل صوری وشهودی بایستی با ایده‌های صوری هماهنگی داشته باشند. مثلاً" اگر از اصول پئانو[۲۵] نتیجه‌ای به دست آید که با شهود اعداد طبیعی توافق نداشته باشد، این اصول پئانوست که بایستی تغییر کنند. به هر تقدیر، آغاز پیدایش یک نظریهٔ ریاضی اغلب بدین صورت است که یک یا چند حکم به صورت حدسهایی براساس تجربه با اشیاء ریاضی توسط ریاضیدانان پیشنهاد می‌شود. این حکمها در ابتدا دامنهٔ درستی محدودی دارند و نقش عمدهٔ اثبات ریاضی روشن ساختن دامنهٔ درستی یک حکم پیشنهادی است.

لاکاتوش در آثار باقیمانده از خود مسألهٔ "وجود" را مورد بررسی و شکافتن قرار نداده است. شاید مرگ زودهنگامش در ۱۹۷۴ که پنجاه و یکساله بود مانع تدوین مطالب بیشتری شد که در ذهن داشت، ولی او روح تازه و نویدبخشی در فلسفهٔ ریاضی دمیده است.

منابع:

۱ـ شهشهانی، سیاوش. **سیر تاریخی فلسفهٔ ریاضیات**. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ اول، بهار ۱۳۶۱.

2- Davis, P.J., and Hersh, R. *The Mathematical Experience*, Birkhavser, Boston, 1980.

3- Lakatos I. *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1981.

4- Snapper, E. The Three Crises in Mathematics. (Mathematics. People. Problems. Results), Wadsworth Inc, 1984.

توضیحـــات :

(1) Imre Lakatos (2) Ontology (3) Epistomology

(4) Methodology (5) Platonism (6) Logicism

(7) Constructivism (8) Formalism (9) Russel

(10) Frege (11) Whitehead (12) Principia Mathematica

(13) L.E.J.Brouwer (14) Carl Popper (15) G.Polya

(۱۵) نام این نوشته نیز از دو کتاب پوپر به نامهای زیر تقلید شده است :

i) Conjectures & Refutations حدسها و ابطالها

ii) Logic of Scientific Discovery منطق اکتشاف علمی

(16) Euler (17) Cauchy (18) Dirichlet

(19) Quasi-empirist (20) Peano