مسائل ریاضی

مقدمهٔ سخنرانی ایراد شده در کنگرهٔ جهانی ریاضیدانان در پاریس، ۱۹۰۰

پروفسور داوید هیلبرت

ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی

توضیح

اصل گزارش این سخنرانی به آلمانی در

Gottinger Nachrichten,1900,pp.235-297,

و در

Archi der Mathematik und Physik,3d ser.,
Vol.1(1901),pp.44-63 and 213-237,

چاپ شده است.

ترجمهٔ انگلیسی این سخنرانی توسط Dr.Mary Winter Newson

در Bulletin of the Amcrican Mathematical Society,
Vol.8(1908),pp.437-479,

درج گردیده است. ترجمهٔ فارسی از متن انگلیسی است.

کیست که از برداشتن پرده‌ای که آینده در پس آن نهان است و از نظر انداختن درپیشرفتهای بعدی دانش ریاضی و اسرار توسعهٔ آن، در سده‌های آتی شادمان نشود؟ ریاضیدانان پیشرو نسلهای آینده به سوی کدام هدفها همت خواهند گمارد؟ قرنهای آینده، کدام روشهای نوین و چه حقایق جدیدی را در جهان مستغنی و پهناور اندیشهٔ ریاضی برملا خواهند کرد؟

تاریخ پیوستگی و تداوم توسعهٔ علم را می‌آموزد. می‌دانیم که هر عصری مسائلی خاص خود دارد که عصر بعدی یا آنها را پاسخ می‌گوید یا به عنوان مسائلی بی‌حاصل آنها را به کناری می‌نهد، و مسائلی جدید به جایشان می‌گذارد. از توسعهٔ احتمالی ریاضیات در آیندهٔ نزدیک، اگر بخواهیم برداشتی به دست آوریم، باید اجازه دهیم سوالاتی که هنوز پاسخ داده نشده‌اند از مد نظر ما بگذرند و باید به مسائلی نظر افکنیم که دانش امروزی مطرح کرده است و ما حل آنها را از آینده انتظار داریم. چنان مروری از مسائل، درخور چنین روزی، در این گردهم آیی قرن است. اختتام یک عصر بزرگ، نه تنها ما را به مرور گذشته دعوت می‌کند، بلکه افکار ما را به آیندهٔ نامعلوم نیز معطوف می‌کند.

به طور کلی، نباید اهمیت عمیقی را که بعضی از مسائل در پیشرفت دانش ریاضی داشته‌اند و نقش مهمی را که در کار محقق ایفا می‌کنند انکار کرد. مادامی که شاخه‌ای از دانش مسائل فراوانی را عرضه می‌کند، آن شاخه زنده است؛ نبود مسائل، ما را از خاموشی و یا ایستایی گسترش مستقل آن شاخه آگاه می‌سازد. همان طور که هر تلاش بشری هدفهایی را تعقیب می‌کند، پژوهش ریاضی نیز به مسائلی نیازمند است. با حل مسائل است که محقق آبدیدگی فولاد خود را می‌آزماید؛ روشها و دیدگاه‌های جدیدی یافته، و افقهای بازتر و آزادتری به دست می‌آورد.

پیشداوری صحیح درباره‌ٔ ارزش مسائل اغلب مشکل یا غیرممکن است ؛پاداش نهایی به میزان دستاوردی بستگی داردکه از آن مساله عاید علم می‌شود .مع هذا ،این سوال را می‌توان مطرح کردکه آیا ضوابط کلی برای تعیین مساله‌ٔ خوب ریاضی وجوددارد؟ یکی ازریاضیدانان فقیدفرانسوی گفته است : " یک نظریه‌ٔ ریاضی تا وقتی که چنان روشن وواضح نشده باشد که بتوانیم آن را برای اولین کسی که درخیابان می‌یابیم تشریح کنیم ، نباید کامل فرض شود ." تاکیدی را که دراینجا برای آسانی ووضوح ادراک یک نظریه‌ٔ ریاضی منظورشده است من حتی با شدت بیشتری برای کامل بودن مسائل ریاضی قائل هستم ،زیرا که وضوح وسهولت درک مجذوب کننده است ، وپیچیدگی مایه‌ٔ احتراز .

بعلاوه ،مساله‌ٔ ریاضی درعین این که باید به اندازه‌ٔ کافی مشگل باشدتا ما را به خودجلب کند ،با این وجود ،نباید آن گونه غیرقابل وصول باشدکه به بیهودگی تلاش ما منجرشود .برای ما ،مساله‌ٔ ریاضی باید به منزله‌ٔ علامت راهنمایی درجاده‌ٔ پرپیچ وخمی باشدکه به حقایق مکتوم ختم می‌شود ، وبالاخره یادآورنشاطی که ازحل موفق آنها ما را نصیب می‌شود .

ریاضیدانان قرون گذشته ،عادت داشتندکه با اشتیاق وافری خودرا وقف حل مسائل مشکل ویژه‌ای کنند .آنها ارزش مسائل مشکل را می‌دانستند . من تنها "مساله‌ٔ کوتاهترین زمان "را یادآورمی‌شوم که یوهان برنولی مطرح کرده است .برنولی به هنگام اعلام این مساله می‌گویدکه تجربه به ما می‌آموزد که مغزهای بزرگ با طرح وحل مسائل مشکل ودرعین حال مفید ،به پیشرفت علم خدمت می‌کنندوسپس ابرازامیدواری می‌کندکه با پیروی ازمردانی چون مرسن(۱) ،پاسکال،فرما ،ویونانی(۲) ودیگران ،سپاس دنیای ریاضیات را برانگیزدوبا طرح مساله دربرابرآنالیزکاران برجسته‌ٔ زمان خود ،به عنوان محکی ،آنان را به آزمون روشها ومیزان توانائیشان ملزم سازد .حساب

تغییرات منشاء خودرا به این مساله برنولی ومسائل نظیرآن مدیون است.

چنان که معروف است ،فرما گفته بودکه معادلهٔ دیوفانتی

$x^n + y^n = z^n$ (z,y,x اعدادصحیح اند)

بجزدرموارد بدیهی حل ناپذیراست .کوشش برای اثبات این غیرممکن ، نمونهٔ شگفت انگیزی ازتاثیرالهام بخش مساله بظاهرغیرمهم ،ویژه‌ای رابر دانش بشری عرضه می‌کند .کومر [۳] ،تحت تاثیرمساله فرما ،اعدادآرمانی (ایده‌آل)رامعرفی کردوموفق به کشف قانون تجزیهٔ یکتای اعداددر هیاتهای دایره‌بر [۴] (سیکلوماتیک)به‌عاملهای اول آرمانی شد- قانونی که‌بیان تعمیم‌یافتهٔ آن توسط ددکنیدوکرونکردرمرکزنظریهٔ نوین اعداد قراردارد واهمیت آن ازمرزهای نظریهٔ اعدادفراتررفته وتاقلمروجبر ونظریهٔ توابع ،گسترش یافته است .

برای اینکه ازحوزه‌های پژوهشی کاملا" متفاوتی گفتگوشود ،من مسالهٔ سه‌جسم رایادآوری می‌کنم .روش مثمرثمرواصول دشواریابی که‌پوانکاره [۵] درمکانیک سماوی معرفی کرد ، وامروزه‌معروف است ،دراخترشناسی عملی به‌کارمی‌رود ،حاصل کوشش جدیدی است که‌پوانکاره‌دراقدام مجددبه‌حل آن مسالهٔ مشکل ،برگزیدواورا به‌حل مساله نزدیکترساخت .

دومسالهٔ اخیر- مسالهٔ فرما ومسالهٔ سه‌جسم- همانندوقطب مخالف به‌نظرمی‌آیند ،اولی یک کشف آزاد ،استدلال مطلق که‌به‌حوزهٔ نظریهٔ مجرد اعدادتعلق دارد ،درصورتی که‌دومی رااخترشناسی به‌ما تحمیل کرده‌است وبرای درک ساده‌ترین پدیدهٔ اساسی طبیعت لازم است .

ولی ،اغلب نیزاتفاق می‌افتدکه‌همان مساله‌خاص درغریب ترین شاخهٔ دانش ریاضی کاربردپیدا می‌کند .مثلا" ،مسالهٔ کوتاهترین زمان نقشی عمده وتاریخی درمبانی هندسه ،نظریهٔ خطوط وسطوح خمیده ،درمکانیک

وحساب تغییرات ایفا کرده است. فلیکس کلاین (۵) درکارخود درباره بیست وجهی، به‌نحو قانع کننده‌ای اهمیت مساله چندوجهی منتظم را درهندسهٔ مقدماتی، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ معادلات، ودرنظریهٔ معادلات دیفرانسیلی خطی نشان داده است.

برای این که اهمیت بعضی ازمسائل روشن شود، من ازوایرشتراس سخن به میان می‌آورم، که به‌خاطر یافتن مساله‌ای نظیر مساله وارون سازی ژاکوبی درشروع کارعلمی خود، ازاقبال بلندخویش یاد می‌کرد.

اینک که اهمیت کلی مسائل ریاضی را یادآورشدیم، اجازه بدهید این سوال را مطرح کنیم که ریاضیات ازچه منابعی مسائل خودرا به دست می‌آورد. محققا" اولین وقدیمی ترین مسائل درهرشاخهٔ ریاضیات ازتجربهٔ سرچشمه گرفته اندوپدیده‌های جهان خارج آنها راعرضه کرده‌اند. حتی قواعد محاسبه با اعداددرست درمراحل اولیهٔ تمدن نیزبایستی به این طریق کشف شده باشند، همان طورکه کودک امروزی، کاربرداین قوانین راازراه تجربه فرا می‌گیرد. همین موضوع درباره مسائل اولیهٔ هندسه که ازدوران باستان به میراث رسیده‌اند، مسائلی مانندتثلیث مکعب وتربیع دایره نیز صادق است؛ همچنین است قدیمی ترین مسائل نظریهٔ حل عددی معادلات، نظریهٔ خمها وحساب دیفرانسیل وانتگرال، حساب تغییرات، نظریهٔ سریهای فوریه ونظریهٔ پتانسیل - بدون این که ازمسائل عدیده‌ای که به مکانیک، اخترشناسی وفیزیک تعلق دارند نامی برده باشیم.

اما، درتوسعهٔ بیشترهرشاخهٔ ریاضیات، فکرانسان درنتیجهٔ موفقیت حاصل ازحل مسائل، تشویق می‌شودوازاستقلال خودآگاهی می‌یابد. تطورآن شاخه اغلب بدون نفوذ قابل ملاحظه‌ای ازخارج، درنتیجهٔ ترکیبات منطقی، تعمیم، تخصیص، درنتیجهٔ جداسازی وجمع آوری ایده‌ها

به‌طرق مساعدبا مسائل جدیدومثمرثمرصورت می‌گیرد ،وسپس خودبه‌صورت پرسشگرواقعی جلوه‌گرمی‌شود .به این ترتیب بودکه مساله‌ٔ اعداداول وبقیه مسائل مربوط به‌نظریه‌ٔ اعداد ،نظریه‌ٔ معادلات گالوا ،نظریه‌ٔ ناورداهای جبری ،نظریه‌ٔ توابع آبلی خودریخت (اتومورف)ـ درحقیقت بدین طریق تقریبا "همهٔ سوالات جالب حساب نوین ونظریه‌ٔ توابع ـ مطرح‌می‌شوند .

هنگامی که‌قدرت خلاق استدلال محض دست اندرکاراست ،دنیای خارج دوباره‌واردعرصه می‌شودوسوالات جدیدی رااز تجربیات واقعی به‌ما تحمیل می‌کند ،شاخه‌های جدیدی ازریاضیات تاسیس می‌شود ،ومازمانی که‌مشغول تسخیراین قلمروهای جدیدافکارمجردهستیم ،معمولا"جواب مسائل حل‌نشده‌ٔ قدیمی‌را می‌یابیم وپیشرفتهای بسیارموفقیت‌آمیزی درنظریه‌های پیشین حاصل می‌گردد .به‌نظرمن منشاء این تشابهات شگفت انگیزبیشماروآن هماهنگی ظاهرا "ازپیش ترتیب یافته‌ای‌راکه‌ریاضیدان اغلب درسوالات ،روشها و ایده‌های مربوط به‌شاخه‌های مختلف دانش خودادراک می‌کند ،بایددرتاثیرات متقابل دائمی فکروتجربه‌جستجوکرد .

حال بایدبه‌اختصاردرباره‌ٔ الزامات کلی بحث کنیم‌که‌منصفانه‌باید برای جواب مسائل ریاضی قائل شد .درآغازبایداین رابگوییم :ضرورت دارد که‌همواره‌بتوان صحت جواب مساله‌رادرتعدادی متناهی گام ،که‌براساس تعدادی متناهی فرض‌که‌ازصورت مساله‌مستفادمی‌شوندوهمیشه‌بایددقیقا" فرمولبندی شده‌باشند ،برقرارکرد .این ضرورت استنتاج منطقی درتعدادی متناهی گام‌چیزی‌نیست جزیکی ازملزمات استدلال دقیق .درحقیقت ،لزوم دقت درریاضیات که‌دیگرزبانزدهمه‌شده‌است ،به‌عنوان الزام‌کلی‌فلسفی ازادراک ما می‌باشد ،وازدیگرسو ،فقط بابرآورده‌شدن این ضرورت است که محتوای فکری ونیروی الهام‌بخشی مساله‌اثرکامل خودرامی‌یابد .یک

مساله جدید، مخصوصا" وقتی که از طرف دنیای تجربیات خارجی ارائه می‌شود شاخهٔ نورسی است که رشد و باروری آن فقط هنگامی به کمال می‌رسد که مطابق ضوابط دقیق باغبانی، به درختی پیرپیوندخورده باشد، این درخت پیر همان دستاوردهای جاافتادهٔ علم ریاضی است.

گذشته از این، تصور این که دقت در اثبات، خصم سادگی است خطاست. برعکس، مثالهای عدیده‌ای این موضوع را تائید می‌کنند که روشهای دقیق، درعین حال، ساده‌تر و قابل فهم‌تر می‌باشند. همین تلاش برای دقت بیشتر، ما را وامی‌دارد که روشهای ساده‌تری برای اثبات به دست آوریم. همچنین، اهتمام در دقت بیشتر، معمولا"، به روشهایی رهنمون می‌شوند که نسبت به روشهای قدیمی با دقت کمتر از توسعه‌پذیری بیشتری برخوردار می‌باشند. به این ترتیب، در نظریهٔ خمهای جبری، در نتیجهٔ کاربست روشهای دقیقتر نظریهٔ تابعی والقاء مداوم فنون متعالی، سادگی قابل توجه و یگانگی بیشتری حاصل شد. بعلاوه، این که در سریهای توانی، مجاز هستیم چهار عمل اصلی حساب، مشتق گیری، و انتگرالگیری جمله به جمله را به کار بریم، و تشخیص بهره‌گیری از سریهای توانی که در نتیجهٔ این اثبات حاصل آمد، به مقدار قابل توجهی به ساده شدن آنالیز، مخصوصا" به نظریهٔ حذف سازی و نظریهٔ معادلات دیفرانسیلی، و همچنین اثباتهای وجودی که در این نظریه‌ها مورد نیاز بود، کمک کرد. ولی حیرت‌آورترین مثال برای تائید ادعای من، حساب تغییرات است. بررسی و تغییرات اول و دوم انتگرالهای معین، مستلزم محاسبات بسیار پیچیده است، و فرایندهایی که ریاضیدانان پیشین به کار می‌بردند، دقت مورد نیاز را دربرنداشت. وایراشتراس راه دست یابی به اساس جدید و مطمئن حساب تغییرات را به ما نشان داد. با مثالهایی از انتگرالهای ساده و دوگانه، در پایان سخنرانی، نشان خواهم داد که چگونه این راه به

ساده‌سازی تعجب‌آوری درحساب تغییرات منجرمی‌شود.زیرا درنشان دادن ضوابط لازم‌وکافی برای وجودبیشینه وکمینه ،می‌توان کاملا" ازمحاسبهٔ تغییرات دوم ،ودرحقیقت ازقسمتی ازاستدلال کسل کننده‌ای که‌به تغییرات اول مربوط می‌شود ،صرف نظرکرد،چه رسدبه‌این که ازپیشرفتی‌که ازبرطرف کردن محدودیت تغییراتی که مطابق آن ضرایب دیفرانسیلی‌تابع به‌مقدارکمی تغییرمی‌کند ،سخن به‌میان آوریم .

من درحالی که اصراردارم‌دقت دراثبات ازملزومات حل کامل یک مساله است ،ازدیگرسو ،می‌خواهم‌مخالفت خودرابااین عقیده‌که‌فقط مفاهیم آنالیز ،وحتی تنها حساب ،قابلیت پذیرش دقت کامل رادارند ،اعلام نمایم .این عقیده راکه‌گاهی ازجانب مردان برجسته‌ای ابرازشده‌است ، کاملا" اشتباه‌آلودمی‌دانم .این نوع‌تعبیریک جانبه‌ازلزوم‌دقت ،منجربه نادیده‌گرفته‌شدن کلیهٔ مفاهیمی می‌گرددکه‌ازهندسه ،مکانیک وفیزیک ناشی می‌شوند ،وپایانی به‌جریان مسائلی خواهدبودکه‌ازدنیای خارج به‌ماعرضه‌می‌شوند ،وبالاخره ،به‌عنوان آخرین نتیجه ،به‌طردمفاهیم‌پیوستار واعدادامم‌خواهدانجامید .ولی باکنارگذاردن هندسه‌وفیزیک ریاضی ، چه‌شریان مهم‌وحیاتی ازعلوم‌ریاضی قطع می‌گردد .برعکس ،من فکرمی‌کنم دربرابرهرمفهومی که‌ازجانب نظریهٔ شناخت یاهندسه ،یاازطرف علوم طبیعی یاعلوم‌فیزیکی عرضه‌گردد ،مساله‌برای ریاضیات عبارت ازبررسی اصولی خواهدبودکه‌این مفاهیم‌برآن استوارندوبنابراین آنهارابراساس دستگاه‌ساده‌وکاملی ازاصول موضوع‌بنانهادن،یعنی برپاکردن دقت دراین مفاهیم‌جدیدوقیاسی کردن آنها ،به‌هیچ وجه‌کم‌ارج ترازآن مفاهیم قدیمی حساب نخواهدبود .

مفاهیم‌جدید ،الزاما" ،علائم‌نوینی راهمراه‌می‌آورند .این علائم رابه‌نحوی انتخاب می‌کنیم‌که‌یادآورپدیده‌هایی باشندکه‌عامل به‌وجود

آمدن آن مفاهیم جدید بوده اند. به این ترتیب، اشکال هندسی، علائم یا نشانه‌های به یادآورندهٔ شهود فضایی هستند. وبدین گونه، به وسیلهٔ ریاضیدانان به کار گرفته می‌شوند. کیست که علامت دونامساوی پی درپی، $a<b<c$، به همراه تصویر سه نقطهٔ متوالی روی یک استقامت را به عنوان تصویر هندسی مفهوم "میان بود" به کار نبرد؟ کیست که برای اثبات قضیهٔ مشکلی دربارهٔ پیوستگی یک تابع یا وجود نقطهٔ انباشتگی، قطعات یا مستطیل های متداخل ترسیم نکند؟ کیست که بتواند از نمایش میدان برداری، یا تصویر یک خانواده خم یا رویه همراه با پوش آن که نقش مهمی را درهندسهٔ دیفرانسیل، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، وبنیاد حساب تغییرات وسایر علوم ریاضی محض ایفاء می‌کند، صرف نظر کند؟

نشانه‌های حسابی، نمودارهای نوشته شده، واشکال هندسی فرمولهای ترسیمی هستند، به همان نحو که درمحاسبه نمی‌توان پرانتزها را واردوخارج کرده ویا علامات تحلیلی دیگری به کار برد، به همان طریق نیزنمی‌توان فرمولهای ترسیمی را به دورریخت.

استعمال علائم هندسی به عنوان وسیله‌ای برای اثبات دقیق، دانش دقیق ومهارت کاملی دربارهٔ اصول موضوع زیربنایی آن اشکال را پیشفرض می‌نماید، وبرای این که این اشکال هندسی جزء منظمات گنجینهٔ علائم ریاضی شوند، یک بررسی دقیق اصل موضوعی درمحتوای ادراکی آنها لازم است. درست همان طورکه درجمع کردن دوعدد، باید ارقام را با رعایت ترتیب صحیحی زیرهم قرارداد. یعنی این که تنها قواعد محاسبه اصول موضوع حساب به کاربردن صحیح ارقام را تعیین می‌کند، به همان نحو نیز استعمال علائم هندسی به وسیلهٔ اصول موضوع مفاهیم هندسی وترکیبات آنها مشخص می‌گردد.

همچنین ،توافق بین فکرهندسی وفکرحسابی دراین موضوع مشاهده می شودکه درحساب نیزمانندهندسه ،عادتا "زنجیرهٔ استدلال راتاسرحد اصول موضوع دنبال نمی‌کنیم .دربرخوردنخستین بایک مسالهٔ حساب ،بااعتماد به یک احساس حسابی درموردطرزعمل ورفتارنشانه‌های حسابی ،ماناآگاهانه وبسرعت ،ترکیب نه چندان مطمئنی ازنشانه‌ها را به‌کارمی‌بریم ،همان طورکه درحساب کمترمی‌توان ازاین کارچشم‌پوشی‌کرد ،همان طورنیزدرهندسه نمی‌توان ازتخیلات هندسی‌صرف نظرکرد .دراینجا ممکن است اثرمینکوفسکی "هندسهٔ اعداد"رابه‌عنوان مثالی متذکرشویم‌که درآن یک نظریهٔ حسابی بادقت تمام‌براساس مفاهیم‌ونشانه‌های هندسی عمل می‌کند.

حال جادارد همچنین ازمشکلاتی که مسائل ریاضی عرضه‌می‌کنند ،واز وسائلی که می‌توان برآنها غلبه‌کرد ،ذکری‌به میان آید.

اگرماموفق به‌حل یک مسالهٔ ریاضی نشویم ،غالبا "به‌علت عدم تشخیص دیدگاه‌کلی تری است که احتمالا"آن مساله‌فقط یک ارتباط منفرد ازرشتهٔ مسائل مربوط به‌آن است .بعدازیافتن آن دیدگاه‌کلی،نه‌تنها مساله‌مزبوربهتردرمدبررسی ماقرارمی‌گیرد ،بلکه درهمان حال ،مابه‌روشی دسترس می‌یابیم‌که درمسائل‌مشابهی نیزبه‌کاربستنی است .معرفی‌مسیر مختلط برای انتگرالگیری توسط کوشی ومفهوم‌آرمان(ایده‌آل)درنظریهٔ اعدادتوسط کومرمثالهای بارزی دراین زمینه‌هستند .این طریقهٔ یافتن روشهای عمومی،محققا "عملی ترین ومطمئن ترین مسیراست ،زیرادراغلب مواردکسی که‌بدون داشتن مساله‌ای مشخص ،درطلب یافتن روشی باشد، درراه‌عبثی گام‌برمی‌دارد.

به‌اعتقادمن ،درمواجهه‌بامسائل ریاضی،تخصیص اهمیتی بیشتراز تعمیم‌دارد .دراغلب مواردی که‌تلاش مابرای یافتن جواب به‌یک سوال بیهوده می‌نماید ،شایدعلت عدم‌موفقیت آن باشدکه‌مسائل ساده‌تروآسان تر

را اصلا" ،یا حتی به طور ناقص ،جواب نگفته ایم .پس موضوع کلا" به این منجر می‌شود که آن مسائل ساده‌تر را بیابیم ،و آنها را با وسائلی حتی الامکان کامل و مفاهیمی حتی‌المقدور تعمیم‌پذیر ،حل کنیم .این قاعده ،یکی از مهمترین اهرمهای غلبه بر مشگلات ریاضی‌است ،و به نظر می‌رسد که تقریبا" همیشه ،اگرچه شاید نا آگاهانه، به کار گرفته شده است .

گاهی ،اتفاق می‌افتد که ما تحت فرضیات غیرکافی ویا با تعبیر نادرست به دنبال مساله‌ای هستیم .و به همین دلیل موفق نمی‌شویم .در آن صورت مساله‌ای که پیش می‌آید عبارت است از نشان دادن حل ناپذیری آن مساله تحت فرضیات داده شده یا با تعبیر موردنظر .چنین اثباتهای امکان ناپذیری را باستانیان نیز ارائه کرده‌اند ،مثلا" اثبات این که در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین نسبت وتر به ضلع دیگر یک عدد اصم است .بعدها در ریاضیات سوالات مربوط به امکان ناپذیری بعضی از مسائل نقش ممتازی را ایفا کرد و مشاهده می‌کنیم که در این راه برای مسائل مشگل وقدیمی ،مانند اثبات اصل موضوع توازی ،تربیع دایره ،حل معادله‌ٔ درجه‌ٔ پنجم با رادیکالها ،حل های رضایت بخش ودقیقی — البته نه به آن معنای اولیه —پیدا شده است .شاید در نتیجه‌ٔ وجود این حقیقت همراه با دلایل فلسفی‌دیگر است که این اعتقاد به وجود می‌آید (که هر ریاضیدانی آن را قبول دارد ،ولی هیچکس اثباتی در تائید آن هنوز ارائه نکرده است)که با به دست آوردن یک حل واقعی ،یا نمایش امکان ناپذیری حل آن وبنابراین شکست تلاشها ،هر مساله‌ٔ معین ریاضی باید دقیقا" قابل جوابگویی باشد .مساله حل نشده‌ٔ معینی را درنظر بگیرید ،مثلا" ،سوال مربوط به اصم بودن عدد ثابت اویلر- ماسکرونی (۶) ، c ویا وجود تعداد نامتناهی اعداد اول به صورت ۱+ ۲^n. هراندازه که این مسائل دست نیافتنی به نظر آیند ،و هراندازه در مقابل آنها ناتوان بنماییم ،

با این حال، این اعتقاد راسخ را داریم که حل آنها، باید، در تعدادی متناهی گام منطقی محض حاصل گردد.

آیا اصل حل پذیری هر مساله، فقط از مشخصات مخصوص فکر ریاضی است؟ یا این که این یک قانون کلی لاینفک طبیعت ذهن آدمی است که تمامی پرسشهای فکر باید جواب پذیر باشند؟ در علوم دیگر نیز به مسائلی قدیمی برمی‌خوریم که اثبات امکان ناپذیری حل آنها مفیدترین و رضایت بخش ترین نتیجه را به دست داده است. مثلا"، مساله حرکت دائمی را مطرح می‌کنیم. بعد از تلاش بیهوده برای ساختن ماشین با حرکت دائمی، روابطی مورد بررسی قرار گرفت که می‌بایست میان نیروهای طبیعت برقرار باشند تا وجود چنین ماشینی را غیرممکن سازند، و این سوال معکوس سبب کشف قانون بقای انرژی شد که آن نیز، به توبهٔ خود، امکان پذیری حرکت دائمی را به آن معنای اولیه‌اش نفی کرد:

اعتقاد به حل پذیری هر مساله ریاضی، محرک نیرومندی برای ریاضیدانان است. ما این ندای دائمی را همیشه از درون خود می‌شنویم: این مساله وجود دارد. در جستجوی حل آن باش. می‌توانی حل آن را با استدلال محض به دست آوری، برای این که در ریاضیات مجهول مطلق (۷) وجود ندارد.

موجودی مسائل ریاضی تمام شدنی نیست، و همان آنی که به حل مساله‌ای توفیق می‌یابیم، تعداد زیادی مساله جای آن را پر می‌کند. اجازه بدهید در زیر، برای آزمایش، مسائل مشخص مخصوصی را که از شاخه‌های مختلف ریاضیات انتخاب شده‌اند، و از بحث درباره آنها پیشرفت علم را می‌توان انتظار داشت، متذکر شوم.

اجازه دهید به اصول آنالیز و هندسه نگاه کنیم. به نظر می‌رسد که

الهام‌بخش‌ترین وبارزترین کاربزرگ قرن اخیردراین رشته،یکی فرمولبندی "حسابی"مفهوم‌پیوستاردرکارهای کوشی،بولتسانو،وکانتور، ودیگری کشف هندسهٔ نااقلیدسی توسط گاوس،بولیه،ولوباچفسکی‌است. بنابراین،من توجه‌شمارانخست به‌بعضی ازمسائل دراین رشته‌ها جلب می‌کنم.

1.Mersenne　　2.Viviani　　3.Kummer

4.cyclomotic　　5.Felix Klein

6.Mascheroni　　7.ingorabimus