

واقع گرایی به عنوان فلسفه ریاضیات

نوشته: استیفن . ف بارکر

ترجمه: شرف الدین شرفی

منوچهر میثاقیان

سهم بزرگ کورت گودل (۱) به منطق ریاضی طبیعت بسیار تکنیکی دارد و اینکه مفاهیم فلسفی آن چیست موضوعی بسیار بحث انگیز است. از این رو، بررسی دیدگاهی از فلسفه ریاضی که گودل پذیرفته است جالب است. این دیدگاه باید تا حدی بتواند اهمیت فلسفی کاروی را مجسم کند. طبیعتاً "عقیده" هر اندیشمند در ارتباط با موضوع فلسفه خود قابل توجه می باشد و در مورد گودل این موضوع مخصوصاً "درست است، زیرا کاروی می تواند نتایج فلسفی مهمی داشته باشد که ارزیابی آنها دشوار است.

ی
اگرچه گودل درباره فلسفه ریاضیات چیز زیادی ننوشته است، نکته‌ها فلسفی قابل توجهی در مقاله او تحت عنوان "منطق ریاضی راسل" موجود است. در آنجا می نویسد "زده‌ها (۲) و مفهوم‌ها (۳) ممکن است .. به عنوان اشیاء (۴) واقعی (۵) تصور شوند ... که بدون وابستگی به تعریفها و تعبیرهای

ما وجود دارند. و ادامه می‌دهد که "به نظر من پذیرش چنین اشیاء فی‌نفسه
 اندازه پذیرش اجسام فیزیکی درست و برحق است و دلایل بسیار کافی برای
 اعتقاد به وجود آنها وجود دارد. همانگونه که اجسام فیزیکی برای به دست
 آوردن نظریه‌ای قانع کننده برای ادراکات حسی ما ضروری هستند، همین اشیاء
 نیز برای به دست آوردن نظریه‌ای قابل قبول از ریاضیات لازمند." (۶). به
 این ترتیب گودل دیدگاهی را می‌پذیرد که به موجب آن انواع مشخصی از اشیاء
 واقعی مانند مجموعه‌ها (رده‌ها) و مفهومیها وجود دارند که خمیرمایه (۷) -
 ریاضیات را تشکیل می‌دهند. بعلاوه در این گفته که آنها واقعی هستند،
 وی احساس می‌کند که یک فرضیه (۸) را بیان می‌کند: چیزی که ممکن است
 اشتباه باشد ولی تصدیق آن در بر تودانستینهای ما بسیار موجه به نظر می‌رسد.
 او این "فرضیه" فلسفی را در خصوص ریاضیات با این حقیقت که اجسام
 فیزیکی وجود دارند مقایسه می‌کند. اعتقاد ما مبنی بر اینکه اجسام فیزیکی
 وجود دارند از نظر او فرضیه است البته فرضیه‌ای بسیار معقول احتمالاً. به این
 دلیل که او این را بهترین توصیف علت شکل گیری احساسات ما از رفتار
 آنها می‌داند. گودل تصور می‌کند که "فرضیه" وجود اشیاء ریاضی مانند وجود
 اجسام فیزیکی برحق است. شاید به خاطر این که او فکر می‌کند که این بهترین
 دلیل اهمیت معنوی است که ریاضیات برای ما دارد.

این اظهارات گودل یک فلسفه بسیار واقع گرای ریاضی را بیان می‌کند.
 واقع گرایی به عنوان فلسفه ریاضی می‌تواند درک این آموزه (۹) باشد
 که قوانین ریاضی اصلاً "توصیف لفظی نوعی از اشیاء هستند. گودل از این
 نیز پیشتر می‌رود و در جای دیگر مقالمش تا می‌کند که دیدگاه او نوع
 مشخصی از واقع گرایی است. او بوضوح اظهار می‌دارد که مجموعه‌ها و مفهومیها
 در زمان و فضا واقع شده‌اند و در عین اینکه کاملاً ناوابسته به فکر ما هستند.

ما می‌توانیم آنها را درک کنیم و توضیح دهیم. به این ترتیب دیدگاه گودل در مقابل "نام‌گرایی" (۱۰)، دیدگاهی که بیان می‌کند هیچ‌گونه موجودات مجرد مستقل از زمان و مکان وجود ندارد، قرار می‌گیرد. واقع‌گرایی گودل همچنین با مفهوم‌گرایی (۱۱) که بیان می‌کند این‌گونه هستی مجرد وجود دارد اما توسط فعالیت‌های ذهن ما به وجود می‌آید، از در مخالفت در می‌آید.

شکل بخصوص دیدگاه واقع‌گرایی گودل در رابطه با ریاضیات سابقه‌ای دیرینه در تفکر فلسفی دارد. چه سرخ این دیدگاه به افلاطون برمی‌گردد. برنایز (۱۲) پیشنهاد می‌کند که آن را افلاطون‌گرایی (۱۳) بنامیم. به این ترتیب، افلاطون‌گرایی شکلی از واقع‌گرایی است که بر طبق آن ریاضیات برای موضوع اصلی خود یک قلمرو واقعی، از اشیاء غیرذهنی و ناوابسته به فضا و زمان دارد. و بیان می‌کند که این اشیاء می‌توانند بوسیله استدلالت بشوری درک شوند و ما می‌توانیم از طریق "چشم‌بصیرت" (۱۴) به‌مان‌گونه که هستند با آنان آشنا شویم هر چند که پنج حس ما نمی‌توانند راهی به آنها بگشایند. بر طبق این دیدگاه اهمیت معنوی دستورهای ریاضی در این حقیقت نهفته است که آنها می‌توانند این اشیاء مهم را تشریح کنند و چیزی را که در مورد آنها می‌گویند قانع کننده است. افلاطون‌گرایان معتقدند که درست‌ها همان‌گونه که یک جغرافیادان با کارت توضیح ارتباطات بین مظاهر طبیعی از قبیل قاره‌ها، اقیانوسها، رودها و کوهستانها روبروست، کار ریاضیدان طرح‌ریزی ارتباط منطقی بین اشیاء ناوابسته به زمان و مکان است. فرگه (۱۵) فقیید و راسل در اوائل سده حاضر از این شکل واقع‌گرایی افلاطونی در فلسفه ریاضی حمایت می‌کردند. (۱۶) بهر حال خوب است گفته شود که واقع‌گرایی افلاطونی و در حقیقت واقع‌گرایی در هر نوبت به عنوان فلسفه ریاضیات در سال‌های اخیر بسیار کمتر از چند دهه ابتدای سده حاضر پذیرفته شده است و این تغییر

تمایل ربطی به خود این دیدگاه ندارد.

بهر حال واقع گرایی افلاطونی چه وسعاً "پذیرفته شده باشد چه خیر، باید پرسید که تا چه حد چنین شکلی از واقع گرایی به عنوان فلسفه ریاضیات باقی خواهد ماند؟ حامی چنین شکلی از واقع گرایی ممکن است تعجب کند که چگونه ممکن است کسی وجود چیزهایی مثل مجموعه‌ها را که غیرذهنی هستند انکار کند در حالی که این هدف ریاضیات است که آنها را بدرستی تشریح کند. برای حامی این شکل از واقع گرایی احتمالاً این قضایا همانند هر چیز دیگری در فلسفه ریاضیات حق بجانب به نظر می‌رسند. با این وجود بسیاری از نویسندگان فلسفه ریاضی مشخصاً "باین دیدگاه واقع گرایی مخالفت می‌کنند و می‌خواهند اظهارات آن را بعضاً "وکلا" انکار کنند. اجازه دهید تا در ادامه مقاله با در نظر گرفتن برخی از مخالفت‌های صریحی که ارائه شده است این شکل از واقع گرایی را به اختصار ارزیابی کنیم. منطقی‌واراز مخالفت‌های صریح، مخالفت‌هایی است که هدفشان غیرقابل قبول نشان دادن این شکل از واقع گرایی فلسفه ریاضی است. اگر بخواهیم تصور جامع‌تری در این باره به دست آوریم باید همچنین مخالفت‌های غیرمستقیمی را که می‌کوشند تا فلسفه‌های ریاضی دیگری را بسازند در نظر بگیریم. با توسعه دیدگاه‌های فلسفی کاملاً گوناگون دیگری که مقبول تر باشند، البته می‌توان غیرمستقیم‌زیرپای همه انواع فلسفه واقع گرایی را خالی کرد. اما بررسی چنین کوشش‌هایی خارج از توان این مقاله است. در عوض بگذاریم که هم خود را تنها معطوف مخالفت‌های صریح با واقع گرایی افلاطونی کنیم، مخالفت‌هایی که کلاً این دیدگاه فلسفی را صحیح ندانسته و در صدد ارائه فلسفه دیگری نیستند.

در ابتدا مخالفتی را که بیشتر مردم راجع به آن فکر می‌کنند مورد توجه قرار می‌دهیم. این مخالفتی است که می‌گوید این شکل فلسفه واقع گرایی

ریاضی بیش از حد متافیزیکی است. این دیدگاه واقع‌گرای قلم‌رو
از هستی‌های مجرد غیر تجربی را مسلم می‌انگارد که مستقل از ذهن
هستند، اما از طریق عقل بشری قابل دسترسی هستند ولی تجربیات حسی ما،
ما را به وجود چنین هستی‌هایی رهنمون نمی‌گردانند، زیرا مثلا "نمی‌توانیم
همچون اجسام فیزیکی آنها را ببینیم، احساس کنیم، لمس کنیم و یا بو کنیم.
مخالفی ممکن است بگوید که بهمین دلیل ما حق تصدیق وجود چنین هستی‌هایی
را نداریم، زیرا اگر چنین کنیم بخارج از مرزهای تجربه قدم نهادیم
و درگیر گزاره‌گویی‌های متافیزیکی گشته‌ایم.

در حال این اولین مخالفت هیچ‌گونه با رقطعی و تعیین کننده‌ای ندارد.
البته باید از دیدگاه‌های متافیزیکی بی‌هوده اجتناب کرد، ولی ادعای
کسی که از فلسفه واقع‌گرای ریاضی پشتیبانی می‌کند این است که این فلسفه
وقتی که واقعیت‌اشیا ریاضی را تصدیق می‌کند دچار گزاره‌گویی‌های غیر ضروری
نیست. همچنین کسی که این دیدگاه را با حسن نظر تعلق می‌کند دقیقاً همین
نظر را دارد، زیرا احساس می‌کند که فرض واقعیت داشتن چنین اشیا بی
ساده‌ترین توضیح مناسبی است برای اینکه چرا ریاضیات از نظر عقلانی بسا
اهمیت است. این نوع استدلال که تنها هنگامی می‌توانیم به وجود نوعی
از اشیا باور داشته باشیم که مستقیماً "بوسیله احساس ما درک شوند، بیش
از آن نامناسب است که علیه فلسفه واقع‌گرای ریاضی مطرح شود. البته
کسی که افلاطون یا فرگه را قبول دارد و با ریاضیات به عنوان قلمرو اشیا
ناوابسته به زمان برخورد می‌کند بندرت می‌تواند یک تجربه‌گرای باشد و نمی‌تواند
معتقد باشد که تمام واقعیتها و اطلاعات و ادراکها مستقیماً "بازیا به تجربه
احساسی بنا شده‌اند. در حقیقت این شکل واقع‌گرایی از فلسفه ریاضی
با تجربه‌گرایی^(۱۷) به عنوان نوعی فلسفه شناخت‌نا سازگار است. و این

خود می‌توانند بر علیه واقع‌گرایی بحث مهمی را بازن کنند، البته اگر دلایلی مبنی بر جبهانشمول بودن صحت تجربه‌گرایی داشته باشیم، چیزی که وقوف بر آن آشکار نیست. واقع‌گرای افلاطونی معتقد است که دیدگاهش توضیحی کافی و مستدل از ماهیت شناخت ریاضی به دست می‌دهد که تجربه‌گرادرا انجام آن ناتوان است و بنا بر این مخالفت او اوضی ندارد.

دومین نوع بسیار متفاوت مخالفت علیه هرگونه واقع‌گرایی به عنوان فلسفه ریاضی توسط خود قضیه مهم گودل در مورد ناتمامیت (۱۸) بیان می‌شود و چه بسا می‌توان گفت که قضیه ناتمامیت گودل مشکلی جدی برای هر نوع واقع‌گرایی بوجود می‌آورد. در اینجا باید گفت که ما نمی‌توانیم فرض کنیم که درباره شیئی واقعی که خمیرمایه‌ای مستقل از ذهن دارد مطالعه می‌کنیم، چون بیدرتنگ درمی‌یابیم که هیچ نظریه صوری و جا افتاده‌ای در این مورد که هم‌تمام باشد و هم سا زکا وجود ندارد. در اینجا نیز این فرضیه نهفته است که هر قلمروی از اشیاء واقعی یا بدعلی الاصول از توصیفی‌تمام و سا زگار برخوردار باشد. به عنوان نتیجه‌ای از کار گودل اکنون می‌دانیم که نه نظریه مجموعه‌ها و نه نظریه اعداد هیچ صورت بندی هم‌تمام و هم سا زگاری ندارد. بنا بر این شاید چنین نتیجه گرفته شود که نه مجموعه‌ها و نه اعداد نمی‌توانند به عنوان اشیاء واقعی تلقی شوند.

توجه به موضوعی که خود گودل اتخاذ کرده است آموزنده خواهد بود. مقاله او تحت عنوان "منظور ریاضی راسل" در سال ۱۹۴۴ منتشر شده است، یعنی این مقاله یک دهه بعد از قضیه ناتمامیت او ارائه شده است. اظهارات گودل در این مقاله در دفاع از فلسفه واقع‌گرایی ریاضی نشان می‌دهد که او ناتمامیت دستگامالی از نوع پرینسیپیا ماتماتیکا را به عنوان دلیلی قاطع علیه فلسفه واقع‌گرایی ریاضی تلقی نمی‌کند. مسلماً این طرز

تلقی تنها برخوردار است. از دیدگاه فلسفه، واقع گرای ریاضی، قضیه،
 ناتمامیت نمی‌تواند در وجود واقعیت‌های ریاضی مستقلاً از قبیل مجموعه‌ها
 و اعداد شک کند، بلکه نشان دهنده، یک محدودیت اساسی در قدرت بیان
 نما دگرایی (۱۹) است، این محدودیت مبین این است که هیچ دستگاه نمادینی
 نمی‌تواند در مشخص کردن دستگاهی از اشیاء به غنای اعداد طبیعی موفق
 باشد، با این حال واقع گراممکن است این اعتقاد را که مجموعه‌ها و اعداد
 وجود دارند دنبال کند، اگرچه می‌داند که هیچ دستگاه سازگاری از بنیادها
 (اصل موضوع) را نمی‌توان چنان صورت بندی کرد که به طور کامل آنها را توصیف کند.
 پیش فرض نهفته در مخالفت اخیر لزومی ندارد که پذیرفته شود.

مخالفت دیگری که فلسفه، واقع گرای ریاضی را نشان گرفته است
 می‌تواند از انتقاد بنا سراف (۲۰) بر تم منطق گرای (۲۱) ناشی شود. بر طبق
 تم منطق گرای و ایتهدوراسل اعداد طبیعی به عنوان مجموعه‌های مشخص
 ویژه‌ای از مجموعه‌ها تعریف می‌شوند. و ایتهدوراسل عدد طبیعی یک را اینها
 مجموعه، همه، مجموعه‌های تک عضوی و عدد طبیعی دور این مجموعه، همه،
 مجموعه‌های دو عضوی و غیره، یکی گرفتند و توانستند نشان دهند که اعداد
 طبیعی تعریف شده به این روش می‌توانند همه، (یا حداقل بسیاری از) خواص
 معمولی ریاضی خود را دارا باشند. در هر حال رهیافت‌های دیگری نیز
 امکان پذیر است. بنا سراف خاطر نشان می‌کند که راه‌های مختلفی وجود
 دارد که اعداد طبیعی مختلف می‌توانند با مجموعه‌های مختلف یکی گرفته
 شوند. مثلاً، در نظریه، مجموعه‌ها که متکی بر نظریه، انواع (۲۲) نباشند،
 عددیک می‌توانند به عنوان مجموعه‌ای تعریف شود که تنها عضوان مجموعه، تهی
 است و عدد دوم می‌توانند به عنوان مجموعه‌ای تعریف شود که تنها عضوان یک
 است، و غیره. برای این مبنای متفاوت نیز بسط و گسترش نظریه‌ای از اعداد

طبیعی که برطبق آن اعداد خواص ریاضی معمول خود را حفظ کنند امکان پذیر است. پس تا اینجا روشهای کاملاً متفاوتی وجود دارند که اعداد طبیعی را میتوان با مجموعه‌های مشخص یکی گرفت. به علاوه روشهای متعددی نیز وجود دارند. بهر صورت، اگر چنین است، کدام مجموعه عددی را می‌تواند؟ مجموعه تمام مجموعه‌های تک‌عضوی؟ مجموعه تک‌عضوی با عضوتهی؟ یا مجموعه‌ای دیگر؟ اگر فکر کنیم که عددی، شیئی مشخصی است آن‌گاه نمی‌تواند بیش از یکی از این مجموعه‌ها باشد. بنا بر آن تا کید می‌کنند که این موضوع نشان می‌دهد که تلاش برای تعریف اعداد به عنوان مجموعه‌ها اساساً "به بیراهه رفتن" است، و هیچ دلیل موجهی مبنی بر اینکه هر عدد خاص، مجموعه‌ای خاص است وجود ندارد و بنا بر این اعداد ابداعاً "مجموعه نیستند".

پس بنا بر آن استدلال خویش را پیشتر می‌برد و با تکیه به این که اساسی‌ترین خاصیت اعداد طبیعی این است که یک تصاعد بازگشتی (۲۳) تشکیل می‌دهند اظهار می‌دارند که تنها خواص دیگر آنها از این خاصیت ناشی می‌گردند. زیرا هر دستگای از اعداد، مجموعه‌ها یا غیره که یک تصاعد بازگشتی تشکیل دهند برای هدفهای شمارش، یعنی مهمترین مورد استفاده، اعداد طبیعی، مناسب است. چیزی که مهم است وجود مستقل هر کدام از اعداد مشخص نیست بلکه ارتباطی است که اعداد با یکدیگر برقرار می‌کنند. اشیاء تنها به اعداد اطلاق نمی‌شوند، یا بکل دستگای اطلاق می‌شوند یا به هیچ کدام. در صورت بنسبتی خواص اساسی دستگای اعداد، صرفاً "یک ساختمان مجرد را مشخص می‌کنند". بنا بر آن این خط فکری را تا به دست دادن یک دلیل قوی مبنی بر اینکه اعداد هیچ شیئی از این نوع نیستند دنبال می‌کنند. مخالفت وی مخالفتی است بر علیه این نظریه که اعداد شیئی هستند. البته آن‌گونه که اظهار می‌شود این نظریه مخالفتی مستقیم بر علیه اینکه مجموعه‌ها و مفهومیها (هستیهای بی

که گودل متذکر شده است، (شیء هستند، نیست، بهر حال موقعیت واقع گرایبی
 به عنوان فلسفه ریاضیات خیلی متزلزل می‌شود اگر مخالفت بنا سراف پذیرفته
 می‌شد. زیرا اعداد محوری ترین و شاید اگر نه منطقا "، اساسی ترین هستیهای
 ریاضی هستند. واقع گرایبی برای بهتر شدن موقعیت خود باید بتواند یک
 دید کلی از هستیهای ریاضی منجمله اعداد به دست دهد. آنها که گودل را قبول
 دارند معتقدند که ریاضیات در مورد مجموعه‌ها و مفهومیها چنین کرده زیرا
 اعتقاد دارند که اعداد و تمام هستیهای ریاضی می‌توانند با نوعی از مجموعه‌ها
 یا مفهومیها تعریف شوند. بنا بر این تا این مرحله مخالفت بنا سراف باید
 به عنوان کوششی جدی در مورد تمام فلسفه واقع گرای ریاضی تلقی گردد...
 مخالفت بنا سراف، مخالفتی با ارزش است و اگر معنای واقع گرایبی
 این باشد که ادعا کنیم می‌توانیم اعداد را بوسیله اشیا اساسی دیگری از قبیل
 مجموعه‌های خاصی تعریف کنیم، در این صورت مخالفت بنا سراف، مخالفتی
 قاطع و تعیین کننده خواهد بود. بنا سراف بوضوح روشن می‌کند که چقدر
 اشتباه خواهد بود اگر بگوییم وایتهدوراسل کشف کردند که اعداد طبیعی
 مجموعه‌های مشخصی از مجموعه‌ها هستند. ولی آیا واقع گرایان هم لازم است
 که چنین مطلبی را بگویند؟ درستش این است که گفته شود وایتهدوراسل
 طرح شناخت اعداد طبیعی را با مجموعه‌های مشخصی از مجموعه‌ها برابر
 کردند و نشان دادند که این ترتیب شناخت می‌تواند خواص ریاضی اعداد طبیعی
 را حفظ کند به طوری که ما می‌توانیم بیشترین کارهایی را که با اعداد طبیعی
 می‌کنیم با این مجموعه‌ها انجام دهیم. (۲۴) یک واقع گرای محتاط ممکن
 است با این گفته‌ها راجع به اعداد طبیعی متقاعد شود زیرا در نظر او اعداد
 موضوع اساسی ریاضیات نیستند. واقع گرا معتقد است که نظریه مجموعه‌ها
 از نظر فلسفی اساسی ترین بخش ریاضی است و نظریه مجموعه‌ها یک

دستگاه‌ها از احکام صحیح در مورد اشیاء واقعی، یعنی مجموعه‌هاست. به منظور حاکمیت فلسفی بر ریاضیات واقع‌گرایان معمولاً در صد بر می‌آیند تا نظریه‌ها اعداد را به نظریه‌ها مجموعه‌ها تحویل کنند. و به این منظور یک روش برای انجام این کار، از نظرات آنها کافی است. روشهای دیگری نیز بهمین خوبی در دسترس است که با آنها بتوان اعداد را با مجموعه‌های خاصی یکی گرفت، البته برای واقع‌گرایان اهمیتی ندارند، زیرا هدف آنها اثبات این مطلب است که نظریه‌ها اعداد را به نظریه دیگری می‌تواند وسیله‌ای باشد که نظرات آنها را در مورد اینکه ریاضیات چیست، توضیح دهد.

بنا بر این ملاحظات، بنا سراف‌تاما "واقع‌گرایان را رد نمی‌کنند. و بهر حال به بی‌اعتبار ساختن موقعیت واقع‌گرایی تمایل جدی ندارند. زیرا تا کید بر چگونگی ساختمان دستگاه اعداد دارند و نه اینکه چه اشیائی ممکن است آنها را نمایش دهند. بنا سراف ما را از توجه نسبت به طرح‌های مربوط به نمایش اعداد طبیعی به کمک اشیائی مانند مجموعه‌ها بر حذر می‌کند. این گونه شناسایی اعداد طبیعی از نظراومی توانند مطرح شوند ولی مشکل می‌توان آنها را جدی تلقی کرد، زیرا توجه ما را از اساسی‌ترین خصوصیت دستگاه اعداد که همان جنبه ساختاری آن است منحرف می‌سازد. واقع‌گرایان ماهیت اعداد را در عظمی‌گیرد و بنا بر این بیشتر جذبه خود را از دست می‌دهند و چنین به نظر می‌رسد که واقع‌گرایی از تمام دیدگاههای فلسفی ریاضی جذبه کمتری دارد.

سرانجام چهارمین مخالفت صریح را علیه واقع‌گرایی مورد توجه قرار می‌دهیم، مخالفین که از موقعیت کنونی نظریه‌ها مجموعه‌ها ناشی می‌شود و در حقیقت خود مجموعه‌ها به عنوان اشیاء واقعی تردید می‌کنند. از اوائل سده حاضر اکنون به طور مشخص این امیدواری و انتظار را داشتیم

که یک شکل از نظریهٔ مجموعه‌ها عرضه شود که بنداشته‌ایش به طور سه‌گانه
 خوشایند و بدیهی باشند و قضیه‌هایش برای هر کس کامل و قابل پذیرش
 باشند، اما این انتظارها پیشرفت‌های انجام شده برآورده نشده است. در حال
 حاضر به جای یک دستگاه بسته و زفتهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، اشکال مختلف و
 تقریباً "متفاوتی" که در ظاهر با یکدیگر سازگارند توسط ریاضیدانان
 گوناگونی ارائه شده است. یک دستگاه از آن وایتهدوراسل در پرینسیپیا
 ماتماتیکا است، دیگری مربوط به تسرملو (۲۵) و فرانکل (۲۶) است و نظریهٔ
 دیگری هم از گودل، فون نیومن (۲۷)، و برنایز است. این نظریه‌ها را نمی‌توان
 صورت بندی ریاضی بخش‌های کم و بیش یکسان یک موضوع واحد که هر صورت بندی
 مکمل صورت بندیهای دیگر است دانست. مطمئناً "تعارض بین نظریه‌ها
 به خودی خود یک چیز غیرعادی نیست. دو جغرافیا دان مختلف ممکن است
 نظریه‌های مختلفی در مورد ترتیب قرار گرفتن کوهستانها و رودها در قاره‌ای
 که بطور کامل شناخته نشده است داشته باشند. این حقیقت که نظریه‌های
 این دو جغرافیا دان با هم در تعارض است نباید چگونه شکی در مورد واقعی
 بودن قاره‌ای که آنان ساختمانش را مطالعه کرده‌اند در ما به وجود آورد. در
 این مورد شاید ندانیم که کدام نظریه درست است ولی می‌دانیم که چه نوع
 تحقیقی باید برای تشخیص نظریهٔ درست انجام دهیم (مثلاً) می‌توانیم برای
 شناسایی بیشتر با زرسان بیشتری برای بررسی دقیق‌تر به محل گسیل داریم
 و خواهیم دانست که چگونه می‌توان به جواب دسترسی پیدا کرد (مثلاً) می‌توانیم
 به گزارشات بیشتری دسترسی پیدا کنیم که در مورد موضوع بسیار تعیین کننده
 باشند). در هر حال تعارض بین اشکال مختلف نظریهٔ مجموعه‌ها وضعیت
 اساساً "متفاوتی" دارد. در این مورد ما نمی‌توانیم به قلمرو مستقل از زمان
 واقعیت افلاطونی با زرسانی را گسیل داریم و از آنها بخواهیم صورت بندیهای

واقعی آن دبا را بر ایمان گزارش کنند، بعلاوه دستگا‌های مختلفی که موجود است با یکدیگر سازگارند و هیچ زمین‌های برای امیدوار بودن پس اینکه تمامی این دستگا‌ها بجز یکی بدلیل ناسازگاری حذف شوند و وجود ندارد، در نتیجه هیچگونه مبنایی در دست نداریم که بگوییم کدامیک از اشکال نظریه‌ها مجموعه‌ها برحق است، آیا مجبوریم که در مورد حقیقت مجموعه‌ها در نادانی همیشگی به سر بوییم؟ به جای اتخاذ این موضع آگنوستیکی (۲۸) -

(لاادری گری) بهترین نظریه‌ها را می‌رسد که قبول کنیم هیچ تعبیری در ارتباط با یافتن اینکه کدام نظریه‌ها مجموعه‌ها درست است مناسب نیست و از این رو این ادعا که نظریه‌ها درست وجود دارد ارزش چندانی پیدا نمی‌کند، و این به نوبه خود ایجاب می‌کند که فرض وجود یک قلمرو واقعی از اشیاء مجموعه‌ها، که خمیرمایه نظریه‌ها مجموعه‌ها را تشکیل دهد ارزش زیادی نداشته باشد و این هم موقعیت واقع‌گرایی را متزلزل می‌کند.

در اینجا نباید پنداشت که منظور از این مخالفت همان موضع اصولاً "پوزیتیویستی است که هر گزاره غیر قابل تحقیق همواره بی‌معنی است، تمام آنچه که این نوع مخالفت بیان می‌کند این است که گفتگو درباره اشیاء واقعی نمی‌تواند معنای خوبی پیدا کند مگر آنکه بتوان روشهایی را در نظر گرفت که به موجب آنها نظریه‌های گوناگون مربوط به این اشیاء را بتوان آزمایش کرد. مطمئناً " مخالفت خیر فقط مربوط به واقعی بودن مجموعه‌ها نیست و مستقیماً " به این سوال که آیا مفهومیها یا اعداد اشیاء واقعی هستند یا نه مربوط نمی‌گردد. در اینجا با زهم مناسب است تا ببینیم که امکان‌های بی‌اعتبار ساختن قسمت عمده دیدگا‌ه واقع‌گرایی ریاضیات که وسایلی بی‌اعتباری تمامی آن را فراهم می‌کند چقدر است. خویشاوندی بی‌شک مجموعه‌ها و اعداد به‌غی زیبا است که اگر دیدگا‌ه واقع‌گرایی را نتوان

در رابطه با مجموعه‌ها معتبر دانست. در این صورت تمایل نسبت به حفظ آن در رابطه با مفومها یا اعداد با دید بسیار ضعیف باشد.

تاکنون چندین مخالفت صریح را علیه فلسفه واقع‌گرایی ریاضیات، بخصوص علیه شکل افلاطونی آن عرضه کردیم. به نظر می‌رسد که دو تا از این مخالفتها (مخالفت بنا سراف و مخالفتی که بر پایه «موقعیت فعلی نظریه» مجموعه‌ها استوار است) با رقابیل ملاحظه‌ای دارند ولی سایر مخالفتهای دیگری که بزعم ما «بدون تاثیرند» وجود مخالفتهای قوی مربوط به این حقیقت می‌شود که واقع‌گرایی در حال حاضر دارای هواداران کمتری نسبت به گذشته است. غیرقطعی بودن بعضی مخالفتها نشان می‌دهد که واقع‌گرایی نه یک دیدگاه مطلوب است و نه آنطور که مخالفینش می‌پندارند بی‌دفاع است. هدفهای واقع‌گرایی، حتی اگر با حسن نیت به آنها برخورد نکنیم، قابل توجه‌اند. زیرا کوششی جدی است در راه یافتن توضیح روشنی از آنچه که به ریاضیات اهمیت می‌بخشد. به نظر می‌رسد که مزیت اصلی واقع‌گرایی به عنوان فلسفه ریاضیات این است که بر عینیت (۲۹) مسائل ریاضی تاکید دارد. و از اینرو با این عقیده که نتایج ریاضی می‌توانند بدخواه توسط فعالیت‌های آزاد ذهن به وجود آیند، مخالفت می‌ورزد. تاکید بر نکته «اخیر ضروری است اما در عین حال باید گفت که واقع‌گرایی، خصوصا «نوع افلاطونی آن بگونه‌ای اغراق آمیز عمل می‌کند و تا می‌تواند عمیق بین احکام مربوط به اشیاء فیزیکی و احکام مربوط به مجموعه‌ها و اعداد را سهواً نادیده می‌گیرد».

مطمئناً «حق بجانب بودن دیدگاه واقع‌گرایی نمی‌تواند صرفاً بر مبنای مباحثات مستقیم بر له و بر علیه آن سنجیده شود. یک بحث جامع در مورد پابرجایی واقع‌گرایی به عنوان فلسفه ریاضی باید در نظر داشته باشد که آیا دیدگاههای فلسفی دیگر در مورد ریاضیات می‌توانند

جانشین مثبتی برای واقع گرایی باشند یا نه؟ جانشینی که بیشتر مناسب باشد و کمتر مورد اعتراض واقع شود (۳۰). آنچه که با آن روبرویم رقابتی بین دیدگاههای فلسفی مختلف است و در نهایت آن دیدگاه قابل قبول تر است که نظریه‌های زقیب را با ارائه‌الگویی که بتوانند قضا و فعالیت‌های ریاضی را واضحتر و کم‌ایرا دتر بیان کنند از میدان برکنند.

توضیحات

- | | | |
|---|-------------------|------------|
| 1. Kurt Godel | 2. Class | 3. Concept |
| 4. Object | 5. Real | |
| 6. Godel : Russell's Mathematical logic. In: The Philosophy of BERTRAND RUSSELL. Edited by paul Schilpp. The library of living philosophers, P. 137. New York: The Tudor publishing Company 1944. | | |
| 7. Subject-matter | 8. assumption | 9. Doctrin |
| 10. Nominalism | 11. Conceptualism | |
| 12. Bernays | | |

۱۲- برنایز در زبان انگلیسی پیشنهاد می‌کند که آن را Platonism با "P" کوچک بنا می‌م‌علت این موضوع این است که اگرچه این دیدگاه همسان دیدگاه افلاطون است ولی نتایج آن نیازمند حفظ نظام اکید افلاطونی نیست. نگاه کنید:

Bernays, Paul : sur le platonisme dans les mathematiques.
L'Enseignement mathematique 34, 52-69 (1935)

- | | |
|-------------------|-----------|
| 14. eye of reason | 15. Frege |
|-------------------|-----------|

۱۶- دیدگاه گوتلوب فرگه را می توان در مرجع زیر ملاحظه کرد:

The foundations of arithmetic. Translated by J.L.AUSTIN.

Oxford: Black well 1950; originally published in 1883.

و دیدگاه برتراند راسل را مثلا " می توان در اثر او تحت عنوان:

Introduction to mathematical philosophy. London. G.Allen 1919

دید.

17. empiricism

18. incompleteness

19. symbolism

20. Benacerraf

۲۱- نگاه کنیده:

Benacerraf, Paul: What numbers could not be. The philosophical
Review 74, 47-73 (1965)

22. types theory

23. Recursive Progression

۲۴- و. و. کواین خصوصا " برای این نکته تاکید می کند که یکسان سازی مجموعه ها با اعداد را باید طرخی در نظر گرفت که بررسی موجود سادہ تری را بجای بررسی یک موجود معین پیشنهاد می کند. نگاه کنیده اثر او:

W.V.Quine; Word and object. The Technology press 1960,
sections 53 and 54.

25. Zermelo

26. Frankel

27. Von Neuman

28. Agnostic

29. Objectircity

۳۰- شهودگرافی (Intuitionism) و صورتگرایی (Formalism)

به عنوان جانشینان واقعگرایی بکار گرفته شده اند. برای شرحی مقدماتی از پیشنهادات تازه تر برای جانشینان واقعگرایی نگاه کنیده فصل
آخر کتاب زیر:

Barker, Stephen F.; Philosophy of Mathematics. Englewood
cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1965.

(این کتاب با عنوان فلسفه ریاضی توسط آقای احمدپیرشک ترجمه شده
است و بنگاه انتشارات خوارزمی آن را چاپ و منتشر کرده است).
برای پیشنهادات اصیل ترنگاه کنید به اثر بنیادین سرافرمذکوردی (۱۳) و
آثار زیر

*) Shwayder, D.S.; Modes of referring and the problem of
universals. Berkeley: University of California press 1963,
chapter IV.

***) Putnam, Hilary; Mathematics Without foundations.
J. Philosophy 64, 5-22 (1967).