پیک ریاضی

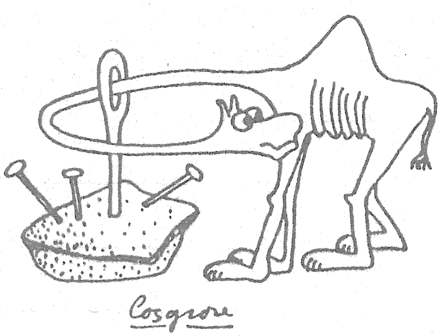
جلد دوم ، شمارهٔ سوم پائیز ۱۳۶۶

شتر سیمپلکتیک

نوشتهٔ : یان استیوارت

ترجمهٔ : پرویز میلانی

یکی از چشمه‌های پربار مفاهیم ریاضی حرکت ماده است . می‌توان رشته‌ای ناگسستنی را از آزمایشهای گالیله وقوانین تجربی یوهان کپلر ، و از آیزک نیوتون ، تا ژوزف ـ لویی لاگرانژ ، وماندگی اپتیکی مکانیکی ویلیام روان هامیلتون ، تا جریان اصلی ریاضیات امروز دنبال کرد . مکانیک به معادلات دیفرانسیل و درنتیجه به خمینه‌ها (مانیفولدها) گروههای لی ونظریه اندازه منجرشد . وجوه طبیعی یک نوسانگر به صورتهای درجه دوم وجبرخطی منجرشد . شارش گرما وحرکت موج به سری فوریه وآنالیز تابعی انجامید . ولی مفهومی که بالقوه از همه اینها همه‌گیرتر است موضوع تازه‌ایست که فقط برای ریاضی دانها وفیزیکدانها آشناست .



این نوع هندسه پیچیده که با عنوان " سیمپلکتیک " به آن اشاره می‌شود از تعبیر هندسی فرمالیسم عام مکانیک هامیلتونی الهام گرفته شده است .

به سبب کوششهای ویژه مکتبهای روسی و آمریکایی در نظریهٔ سیستمهای دینامیکی درسی ساله گذشته، اکنون اهمیت هندسه سیمپلکتیک برای مکانیک آشکار شده است. ولی جنبش وسیعتری در حال نمو است. ولادیمیر آرنولد از دانشگاه مسکو، اخیرا "آنچه را که برنامهٔ ریاضیات سیمپلکتیک می‌توان نامید منتشر کرده است.[1] بر اساس شاهد موثری که وی اقامه کرد، شاخه جدیدی از ریاضیات یعنی توپولوژی سیمپلکتیک در حال شکوفایی است. وی در کتابش به نام **نظریه فاجعه‌ها**[2] از این هم پیشتر می‌رود و می‌گوید "همانطورکه هرطاووسی باید پرخود را به نمایش گذارد، هرشاخه ریاضی نیز باید سیمپلکتیک شدگی خود را به نمایش گذارد". منظور وی آن است که بسیاری از مفاهیم ریاضی در دنیای هندسه سیمپلکتیک دارای مانسته‌ای هستند.

سرگذشت سیمپلکتیک مبحث جالبی است که نیاز به ریاضیات مجرد سطح بالا دارد که مراحل ابتدایی آن بیش از دو قرن قبل با معرفی مختصات عمومی توسط لاگرانژ پی ریزی شد، ولی این داستان که در آن ویژگیهای اساسی جهان طبیعی با ریاضیات عمیق و غالبا" حاوی مفاهیم متناقض، بر هم کنش دارد، به نقلش می‌ارزد. این تجریدی نیست که به خاطر خود موضوع صورت گرفته باشد، بلکه مرحله‌ای است برای آشکار کردن مفهوم جوهری پدیده فیزیکی: این ریاضیات کاربردی قرن بیست و یکم است که در حال شکل گرفتن است.

هرمان وایل در کتاب معروفش **گروههای کلاسیک**[3]، که در مورد گروههای حرکت صلب انواع مقدماتی هندسه‌های چندبعدی مختلف می‌باشد، کلمهٔ سیمپلکتیک را وضع کرد. در هندسه معمولی اقلیدسی، حرکتهای صلب، یک گروه متعامد را تشکیل می‌دهند. اگر بخواهیم در جستجوی دیدگاهی واحد باشیم، بایستی به گروههای دیگر نیز توجه کنیم. وایل در کتابش فضای

محدودی را به گروه سیمپلکتیک اختصاص داد ـ گنجاندن این مطلب نسبتاً "غیرعادی می‌نمود که احتمالاً" هدفی برای آن وجود داشت ولی روشن نبود چیست. حالا می‌دانیم: هدف دینامیک است.

مفهوم کلیدی در هندسهٔ اقلیدسی معمولی فاصله است. برای تجسم جبری فاصله، ضرب داخلی (یا نرده‌ای) دو بردار x و y یعنی $x.y$ را به کار می‌بریم. اگر $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ دو بردار در صفحه باشند، آنگاه $x.y=x_1y_1+x_2y_2$ است: در ابعاد بالاتر نیز فرمول مشابهی برقرار است. تمام مفاهیم بنیادی هندسه اقلیدسی را می‌توان از ضرب داخلی به دست آورد. به خصوص تبدیل T عبارت از یک حرکت صلب است اگر و تنها اگر ضرب داخلی را حفظ کند، $Tx.Ty=x.y$.

ضرب داخلی یک صورت دوخطی است یعنی جملات آن به شکل x_iy_i هستند. جانشین کردن این صورت دوخطی با صورتهای دوخطی دیگر، انواع جدیدی از هندسه را به وجود می‌آورد. هندسه سیمپلکتیک متناظر به صورت $x_1y_1-x_2y_2$ است که برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که روی x و y ساخته می‌شود. به علامت منها توجه کنید: جای پای این منها در تمام دنیای سیمپلکتیک وجود دارد. این صورت سیمپلکتیک صفحه‌ای با نوع جدیدی هندسه ارائه می‌کند، که در آن طول هر بردار صفر، و بر خودش عمود است. مانسته‌های آن در هر فضای با ابعاد زوج وجود دارد.

چنین هندسه‌های غریبی چه مناسبتی می‌توانند با کاربردهای عملی داشته باشد؟

اینها در واقع کاربرد عملی دارند و هندسه‌های مکانیک کلاسیک هستند. در فرمالیسم‌ها میلتونی، سیستمهای مکانیکی توسط مختصه‌های مکان $q_1,\ldots,q_n$ مختصه‌های اندازه حرکت $p_1,\ldots,p_n$ و تابع H که تابع

این مختصه‌ها ست (که ا مروزه ها میلتونی نا میده می‌شود) ،ومی‌توان آن را به عنوان انرژی کل تلقی‌کرد ،توصیف می‌شوند .برحسب این تابع معادله‌های نیوتن شکل زیبای $dq_i/dt=\partial H/\partial p_i$ و $dp_i/dt=\partial H/\partial q_i$ را پیدا می‌کنندهنگام حل معادله‌های ها میلتونی غالبا "بهتراست مختصات را تغییر دهیم .ولی اگرمختصه مکانی به‌نحوی ازانحاء تغییریابند؛اندازه حرکت متناظرنیزبایستی به‌طورمتناسبی تغییریابد .باپیگیری این ایده ،معلوم می‌شودکه چنین تبدیلهایی بایستی متناظرسیمپلکتیک حرکتهای صلب اقلیدسی باشند .دردینامیک تغییرطبیعی مختصه‌ها سیمپلکتیک هستند . علت این امرناتقارنی موجوددرمعادله‌های ها میلتونی است ،به‌این معنی که dq/dt مساوی باضافه $\partial H/\partial p$ ،ولی dp/dt مساوی منفی $\partial H/\partial q$ است ــ دراینجا مجددا "علامت منها خودش را نشان می‌دهد .

تا اینجا من درموردهندسه سیمپلکتیک ،یعنی حرکتهای صلب ،دنیای سیمپلکتیک صحبت کرده‌ام .برای بحث درموردتوپولژی سیمپلکتیک بایستی انعطاف‌پذیرترباشیم ،وتبدیلهایی‌را به‌کارببریم‌که‌در"مقیاس تبدیل های بسیارکوچک" مشابه‌حرکتهای صلب سیمپلکتیک به‌نظربرسند .به‌زبان تخصصی این تبدیلها را ریختارسیمپلکتیکی می‌گوییم ،ولی من آنها را نگاشتهای سیمپلکتیکی می‌نامم .باپذیرش اندکی انعطاف شرط خطی بودن راسست می‌کنیم .بنابراین نگاشت سیمپلکتیک صفحه ،هرتبدیلی است که مساحت را ناوردا باقی گذارد .ولی شکل سطح می‌تواندبه‌گونه‌ی قابل ملاحظه‌ای تغییرکند .برای تجسم‌یک تصویرذهنی صفحه‌را به‌عنوان یک سیال تراکم‌ناپذیرونگاشت سیمپلکتیک راچیزی درنظربگیریدکه‌این سیال را به‌طوردورانی هم‌می‌زند . (این فقط یک تصویرنیست : مکانیک سیالات را می‌توان به‌طورپرباتری به‌زبان سیمپلکتیک بازسازی کرد .)

توپولژی دیفرانسیلی عبارت ازمطالعه‌نگاشتهای هموار یک خمینه

عبورکند؟" درنظربگیرید .نگاشت سیمپلکتیک درابعادبالاهم،مانندصفحه، حجم را ثابت نگه می‌دارند .ولی‌آیا سیمپلکتیک بودن محدودیتهای بیشتری را نیزاعمال می‌کند؟ واضح است که شتری با حجم ثابت می‌تواند از یک شکاف عبورکند: برای این منظورکافی است آن را آن قدربکشیدتالاغر وباریک شود، وسپس مثل نخ آن را از سوراخ عبوردهید .برعکس ،میخائیل گراموف[5] ثابت کرده است (اثرمنتشرنشده) چون دنده‌های شترگیرمی‌کنند، شترسیمپلکتیک نمی‌تواند ازسوراخ عبورکند .شترموجودریاضی‌معقولی‌است: همان کره .نامساویها دنده‌های شترهستند .البته هیچیک از این موارد ـ هنوز ـ کاملا" واضح وقابل درک نیستند .

آرنولد ،طیف وسیعی از انواع سوالات حل شده وحل نشده توپولوژی سیمپلکتیک را موردبحث قرارداده است .بخش بزرگی ازآنها متضمن گسترش وتعمیم قضیهٔ هندسی پوانکاره است ،مثلا" اثباتی که اخیرا "توسط کانلی وزهندر[۶] درموردمانستهٔ چندبعدی ارائه شدوبه وسیله آرنولدودیگران هم قبلا" حدس زده شده بود ،به مانسته سیمپلکتیک ایده‌های متعارف توپولوژی مثل گره‌ها وگروههای همولوژی مربوط است .

یکی ازکاربردهای آن دراپتیک است .وقتی پرتوهای نوری ازیک سیستم اپتیکی می‌گذردممکن است سطوح‌سوزان ـ یعنی خمها وسطوح روشنی که نوردرآنها کانونی می‌شودراتشکیل دهند .براساس نظریهٔ تکینگی،که درتشکیل کهکشان ها نیزکاربرددارد[۷]،فهرستی ازریختیهای سطح سوزان پیشنهادشد .برطبق این فهرست ،متداول ترین تغییرریختی که رخ‌می‌دهد "کیک پرنده است که درآن ازموادچگال یک عدسی‌توخالی تشکیل می‌شودکه مانسته سه بعدی یک چین خیاطی است .این فهرست تامدتی بدون تغییر ماندتاآنکه جان نیه وجان هنای[8]متوجه شدندگرچه درتشکیل کهکشان حالت

است .به‌طور مشابه، توپولژی سیمپلکتیک عبارت از مطالعه نگاشتهای سیمپلکتیک خمینه سیمپلکتیک است. آرنولد برنامه آن را با این کلمات پی ریزی کرده است: " مساله توپولژی سیمپلکتیک را می‌توان مثل مسایل توپولژی معمولی در حضور یک ساختار اضافی تصور کرد. ولی آنچه برای من جالبتر است، کاربرد توپولژی معمولی در مطالعه اشیاء هندسه سیمپلکتیک نیست، بلکه پیش‌گویی نتایج سیمپلکتیک توسط " سیمپلکتیک شدگی" است. سیمپلکتیک شدن نه فقط اشیاء اولیه (خمینه‌ها، نگاشتها، ...)، بلکه کل نظریه را نیز تبدیل می‌کند. مثلا"، در توپولژی سیمپلکتیک مفاهیم مرز ونظریه‌های همولوژی با مفاهیم متداول شان متفاوت اند. بعد 'مرز سیمپلکتیک'، نبایدیک باشد. بلکه از بعد خمینه اولیه دوتا کمتر است."

قدیمی ترین قضیه توپولژی سیمپلکتیک، خیلی پیش از اینکه چنین موضوعی وجود داشته باشد، ابداع شد. این قضیه که از مساله‌ای در مکانیک سماوی نشات گرفت و " آخرین قضیه هندسی" هنری پوانکاره است، می‌گوید: یک تبدیل (سیمپلکتیک) حافظ مساحت روی طوق (ناحیه بین دو دایره هم مرکز) که دودایره مرزی را در دو راستای مخالف حرکت می‌دهد. حداقل دو نقطه ثابت دارد. قضیه‌های نقاط ثابت کارآیی بسیاری دارند: این قضیه که درسال ۱۹۱۳ توسط جرج بیرکهف [۴] ثابت شد، نشان می‌دهد که تحت اثر گرانش برای حرکت سه جسم مدارهای دوره‌ای وجود دارد. اگر تبدیل سیمپلکتیک نباشد، نیازی نیست هیچ نقطه ثابتی وجود داشته باشد: بنابراین توپولژی سیمپلکتیک ویژگی خاص خود را دارد.

بخش بزرگی از این ویژگی هنوز بسیار مبهم است: ریاضیدانها تازه یاد می‌گیرند چگونه سیمپلکتیک فکر کنند. برای نشان دادن این نکته، سوال آرنولد را که می‌پرسد، " آیا یک شتر سیمپلکتیک می‌تواند از سوراخ

کیک پرنده می‌تواند رخ دهد ولی این حالت نمی‌تواند به عنوان ریختی یک سطح سوزان اپتیکی حادث گردد. دلیل ریشه‌ای این امر حالا روشن شده است: تکوین کهکشان بر طبق توپولژی معمولی صورت می‌گیرد، ولی سطوح سوزان بر طبق توپولژی سیمپلکتیک تشکیل می‌گردند. این امر قیدهای بیشتری را اعمال کرده است و در نتیجه فهرست ریختی های سوزان را تقلیل می‌دهد. وقتی یک فلسفه ریاضی عام را به کار می‌بریم، اهمیت اساسی دارد که در یک محتوای "درست" کار کنیم.

هرکس مقاله آرنولد را بخواند، از وسعت برداید‌ه‌ها و مسائلی که توسط فرایند سیمپلکتیک شدگی در مقابل رویش قرار می‌گیرد تحت تاثیر قرار خواهد گرفت. هنگامی که ریاضیدانها برای اولین بار پی به این امر بردند که اعداد مختلط چیزی خیلی بیشتر از یک اختراع صرف است، بایستی چنین احساسی پیدا کرده باشند: هر ایده ریاضی، از هندسه خمها تا آنالیز معادله های دیفرانسیل پاره‌ای بطور بالقوه برای مختلط شدگی آماده بودند. ریاضیات یک شبه متحول شد. اکنون نیز انتظار می‌رود بخش بزرگی از ریاضیات ذاتا " یک جنبه سیمپلکتیک پنهان داشته باشد که از نهانخانه بیرون بیاید. ما فقط شاهد نوک کوه یخ سیمپلکتیک هستیم.

Ian Stewart

The Symplectic Camel

Nature Vol.329,3 September 1987.

توضیحات

1. *Russian Math.surv.* 41,1986.

2. *Catastrophe Theory*,springer,Berlin 1987.

3. *Classical Groups*,Princeton University Press,1939.

4. George Birkhoff (1913).

5. Mikhael Gromov.

6. C.C. Conley and E.Zehnder *Commun.Pure Appl. Math.* 37,207-253; 1984.

7. News and Views,*Nature* 323,397(1986).

8. John Nye and John Hannay Optica Acta 31,115-130;1984.