هندسهٔ برخالی

نوشتهٔ : آنتونی بارسلوز

ترجمهٔ : رضا کرمی

گرچه هزاران سال است که کسرها (برخه‌ها) جایگاه شایسته‌ای در میان اعداد داشته‌اند، هنوز در بسیاری از موارد جای خود را آنچنان که شاید و باید باز نکرده‌اند. البته کسرها گهگاه سعی کرده‌اند تا پا را از گلیم خود فراتر بگذارند، اما نتایج این کار چنان غریب بوده که اغلب باعث تفریح شده است. این است که وقتی می‌شنویم که هر خانواده به طور متوسط ۲/۳ فرزند دارد، یا اینکه میزان سوار شدن افراد در وسایل نقلیه در فلان جاده به ۱/۷ مسافر در یک وسیلهٔ نقلیه افزایش یافته است، خنده‌مان می‌گیرد. (فکرش را بکنید که آدم بخواهد $\frac{۷}{۱۰}$ نفر را سوار ماشین خود کند.)

البته این کسرها صرفاً "ساخته‌های آماری هستند. می‌دانیم که آنها نتیجهٔ میانگین‌گیری از پاره‌ای کمیات اندازه‌گیری شده‌اند. از همین رو

اینها به هیچ وجه مایه‌ٔ نگرانی نیستند. با این همه، بسادگی می‌توان مثالهایی را درنظر آورد که در آنها کسرها (که می‌توان با غمض عین اعداد گنگ را هم درمیان آنها به شمار آورد.) به هیچ رو محلی از اعراب ندارند: شما درباره‌ٔ کسی که ادعا کند می‌تواند یک دستگاه π معادلهٔ π مجهولی را حل کند، چه فکری می‌کنید؟ یا درباره‌ٔ کسی که مدعی مطالعه‌ٔ اشیایی با بعد $\frac{\log 4}{\log 3}$ شود؟

اگر تاکنون موضوعی را که هم اینک می‌خواهیم به شرح آن بپردازیم ندانسته باشید، یا اینکه آن را حدس نزده باشید، احتمالاً" در هر دو مورد بالا به ریش مدعی خواهید خندید. به هر حال، هم اکنون می‌خواهیم به طور جدی مفهوم اخیر را از نزدیک بررسی کنیم، زیرا این مفهوم از زمانی که کسرها در جبر به عنوان نما به رسمیت شناخته شدند، بزرگترین فتوحات ارضی کسرها به حساب می‌آید. خط یک بعدی، رویه‌ٔ دوبعدی، و جسم سه بعدی اینک همسایگانی جدید وبس شگفت دارند، ریاضیات درمعرض یورش موجوداتی با ابعاد کسری قرار گرفته است.

۱. برفدانه‌ها [۱] و مارگونه‌ها [۲]

... اما درحالت کلی، درفرآیند اندازه‌گیری، مواردی پیش می‌آید که در آنها کمیت اندازه‌گیری شده، به دفعات صحیح، واحد برگزیده شده را دربرندارد، به گونه‌ای که محاسبه‌ٔ ساده‌ٔ تعداد واحدهای گنجاندنی در آن کمیت بسنده نیست. لازم می‌آید واحد اندازه‌گیری را به بخشهای کوچکتر بشکنیم تا کمیت موردنظر

توسط این بخشها با دقت بیشتری بیان شود ،یعنی دیگرنه با اعداد صحیح ،بلکه با کسرها .بدین گونه است که کسرها در عمل پدید می‌آیند ،همان گونه که تحلیل اطلاعات تاریخی ودیگرداده‌ها این موضوع را نشان می‌دهد. [1]

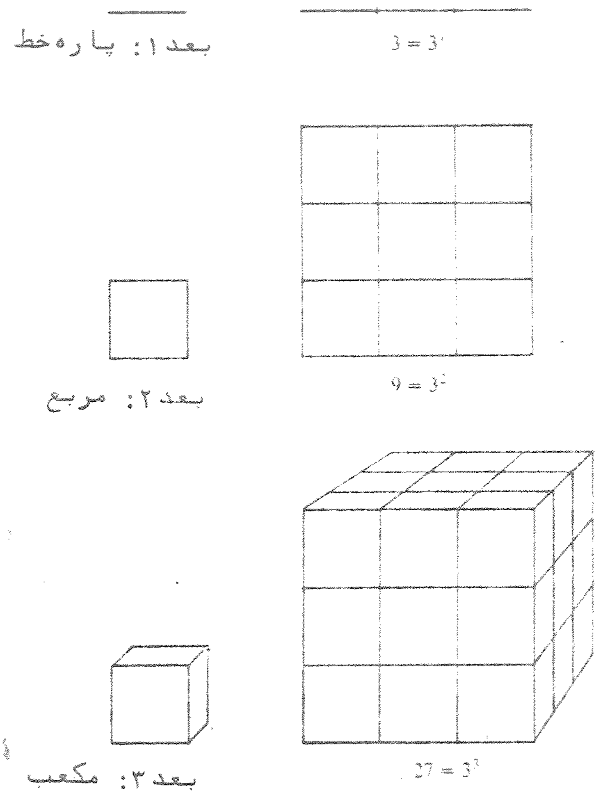
از آنجا که ما عادت کرده‌ایم به بعد به عنوان تعداد جهات مستقل یا درجات آزادی فکر کنیم ،نخست بایسته است تبیینی از مفهوم بعد به دست آوریم که تعمیمهای بعدی را امکان پذیر سازد .خوشبختانه ،روش ساده‌ای وجود دارد که مبتنی است بر توجه به اثرات بعد بر اندازهٔ اشکال هندسی همانند.

پاره خطی به درازای واحد را در نظر آورید .اگر درازای آن را سه برابر کنیم ـ یعنی ،با ضریب مقیاس ۳ آن را بزرگ کنیم ـ پاره خطی به درازای سه واحد به دست می‌آوریم .روشن است که این پاره خط شامل سه مولفهٔ همنهشت است (یعنی ،سه نسخه از درازای واحد اولیه) .به دلیلی که بزودی آشکار خواهد شد ،می‌نویسیم $۳=۳^{۱}$.

اینک به یک مربع یکه توجه کنید .اگر این مربع را با ضریب مقیاس ۳ بزرگ کنیم ـ یعنی هریک از ضلعهایش را سه برابر کنیم ـ مربعی حاصل می‌شود که مساحتش ۹ برابر اولی است (شکل ۱) .به دیگر سخن ،مربع بزرگ شده شامل ۹ مولفهٔ همنهشت است (یعنی شامل ۹ نسخه از مربع اولیه) .توجه کنید که $۳^{۲}=۹$.

دست آخر ،یک مکعب یکه را در نظر بگیرید .اگر این مکعب را هم با ضریب مقیاس ۳ بزرگ کنیم ،مکعبی به دست خواهد آمد شامل ۲۷ مولفهٔ

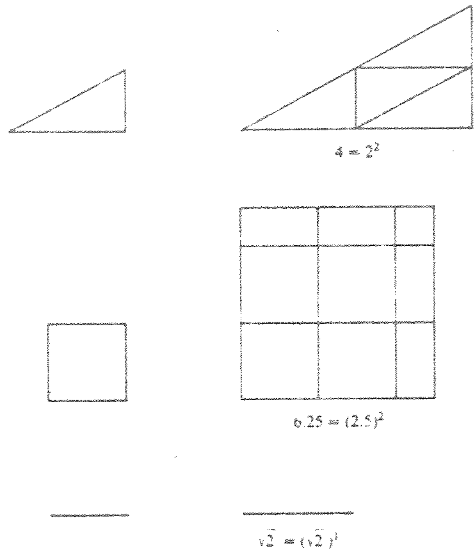
همنهشت .دراین حالت ، $۳^{۳} = ۲۷$.



شکل ۱

توجه کنیدکه درهریک ازسه حالت بالا، ما بعد d ،ضریب مقیاس s ،وتعداد مولفه های N راداریم که درمعادله $N=s^{d}$ صدق می‌کنند .مثالهای دیگری ازکاربست این قاعده درشکل ۲ نشان داده شده است ،که درآن ،ازجمله ، مربعی که با ضریب مقیاس ۲/۵ بزرگ شده ،به ۶/۲۵ مولفه تقسیم شده است :

$$۶/۲۵ = ۰/۲۵ + ۴(۰/۵)+۴(۱).$$



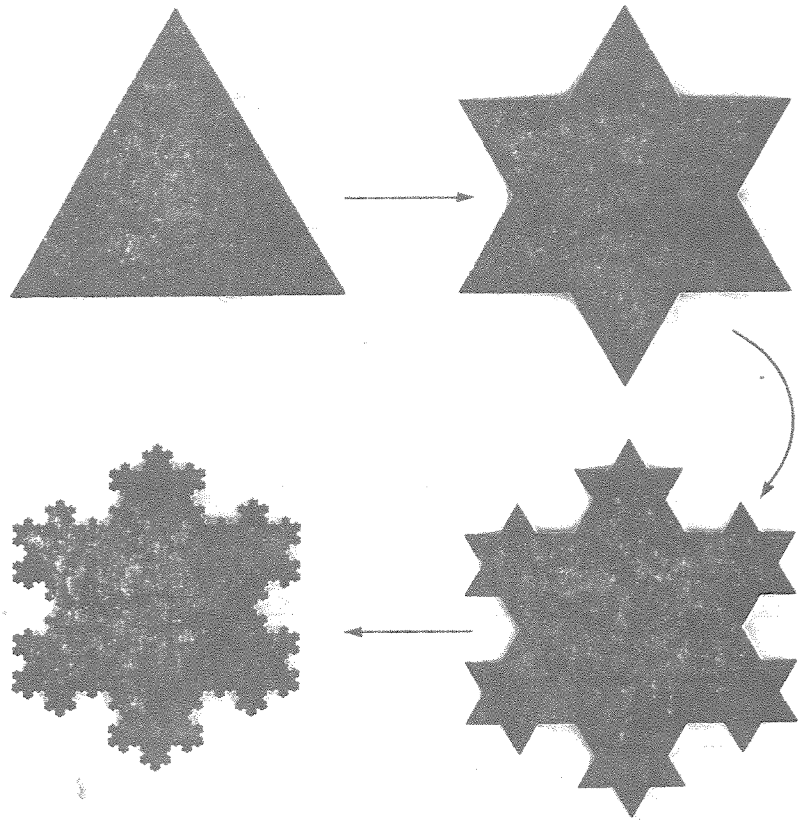
شکل ۲

درهمهٔ این مثالها ،ما برآن بوده‌ایم که خود را به شکلهایی که خود همانند [۳] هستند ،محدودکنیم .یعنی شکلهای بزرگ شده را درهرحالت می‌توانیم به مولفه‌های همنهشتی بخش کنیم که هریک با شکل اولیه همانند باشد . (این حتی درمورد مربع شکل ۲ هم صادق است ،که مولفه‌های بزرگتر آن را باید به مولفه‌هایی همانند مربع کوچک گوشهٔ بالایی بشکنیم)دایره ومخروط مثالهای ساده‌ای از شکلهای ناخودهمانند هستند . اما حتی دراین حالتها هم ،رابطهٔ میان اندازه (مساحت ،حجم ،وغیره) وبعد ومقیاس به قوت خود باقی است .سه برابر کردن شعاع یک دایره ،مساحت آن را با ضریب $۳^۲=۹$ افزایش می‌دهد ، گرچه دراینجا دیگر هیچ راهی برای بریدن دایرهٔ بزرگ شده به ۹ دایرهٔ همنهشت با دایرهٔ اصلی وجود ندارد .به همین ترتیب ،سه برابر کردن شعاع وارتفاع یک مخروط ،حجم آن را با ضریب $۳^۳= ۲۷$ افزایش می‌دهد .ظاهرا "تمام

اشکال هندسی آشنا از همین الگوپیروی می‌کنند.

همان گونه که از شکل ۲ پیداست، برای برقراری معادلهٔ $N=s^d$ ، لازم نیست که N یا s عدد صحیح باشند. این مطلب چندان شگفت‌آوری نیست، زیرا مفهوم تشابه هندسی را می‌توان برای ضرایب مقیاس ناصحیح هم بسادگی پذیرفت. اما، دربارهٔ بعد مطلب از قرار دیگری است؛ انتظار داریم d عدد صحیحی باشد. ببینیم آیا می‌توان شکلی هندسی ساخت که بزرگ شدهٔ آن با ضریب s را بتوان به N مولفه به گونه‌ای بخش کرد که $d=\frac{\log N}{\log s}$ عدد صحیحی نباشد.

گرچه شاید قدری نامنتظره باشد، اما نخستین مثال ما از این مفهوم جدید ابعادکسری، آشنایی قدیمی است. درسال ۱۹۰۴ ریاضیدان سوئدی، هلگه فون کخ (۴) ساختمان هندسی جالبی ساخت که "برفدانه" نامیده می‌شود. ساختن برفدانهٔ کخ (شکل ۳) از یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلعهای به درازای واحد آغاز می‌شود. درنخستین مرحله، هرضلع با خط شکسته‌ای به درازای $\frac{4}{3}$ جایگزین می‌شود. این کار معادل است با چسباندن مثلثهای متساوی الاضلاع با ضلعهایی به درازای $\frac{1}{3}$ به اضلاع مثلث بزرگتر. مراحل بعدی نیز، همان گونه که در شکل پیداست، به گونه‌ای مشابه تکرار می‌شوند و برفدانه ناحیه‌ای است که توسط حالت حدی این فرآیند ساخت به دست می‌آید.



شکل ۳

مرزبرفدانه را " منحنی برفدانه "می‌نامند وبسادگی می‌توان دید که درازای آن نامتناهی است :درهرمرحله ازفرآیندساخت ،درازای پیرامون

ناحیه با ضریب $\frac{4}{3}$ افزایش می‌یابد. درحد، ضریب $(\frac{4}{3})^n$ بی‌هیچ کرانی افزایش می‌یابد. با این وجود مساحت ناحیه ای که توسط این منحنی محدودشده است، متناهی است. درواقع با محاسبهٔ دقیق وکاربرد دستور مجموع سریهای هندسی، می‌توان نشان داد که مساحت برفدانه برابر است با

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \frac{4^3}{3^7} + \cdots\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

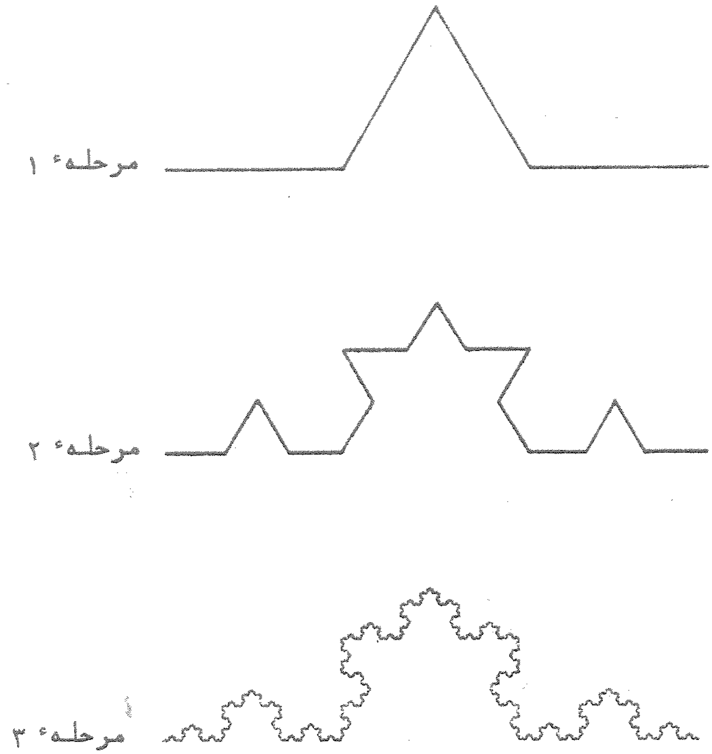
که $\frac{8}{5}$ مساحت مثلث اصلی است.

گرچه از این مطالب چنین برمی‌آید که برفدانه موجودی ویژه است، اما این به هیچ وجه کافی نیست تا باورکنیم مرز آن چیزی بیش از آنی است که می‌نماید: یک منحنی یک بعدی بس طولانی (وبیش از آن، پرپیچ وتاب).
افزون براین، گرچه منحنی برفدانه شکلی زیباست، اما خودهمانند نیست.
برای آنکه بتوانیم دستور $d=\frac{\log N}{\log s}$ را برای "بعدخودهمانندی" به کار ببریم، لازم است بخشی از منحنی برفدانه را که خودهمانند است، با دقت نسبتاً" بیشتری بررسی کنیم.

شکل ۴ ساختن منحنی برفدانه را که به یک پاره خط (که می‌توان آن را چون یکی از اضلاع مثلث شکل ۳ درنظرگرفت) محدودشده است، نشان می‌دهد.
درهرمرحله پاره خطها را با خطهای شکسته ای به درازای $\frac{4}{3}$ درازای پاره خط قبلی جایگزین می‌کنیم. می‌بینیم که منحنی حدی شامل $N=4$ مولفه است که هریک کوچک شدهٔ منحنی اصلی با ضریب مقیاس $s=3$ هستند. به دیگرسخن، یک چهارم از این منحنی حدی را می‌توان با ضریب مقیاس ۳ بزرگ کرد تا به منحنی اصلی رسید. از دستوری که داشتیم نتیجه می‌شود که بعدخودهمانندی این

منحنی برابر است با

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx ۱/۲۶۱۹$$

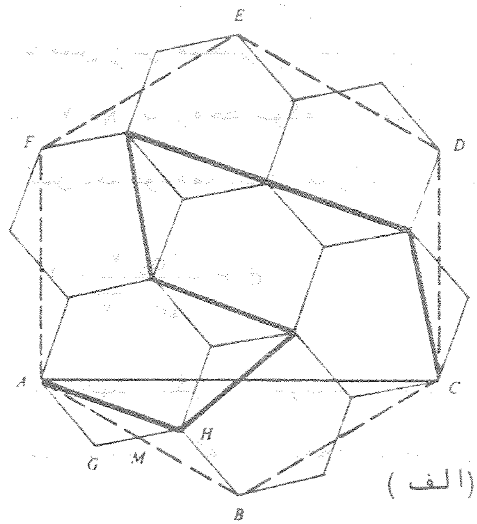


شکل ۴

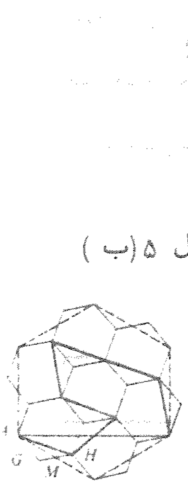
به این ترتیب منحنی برفدانه نخستین مثال ما است از یک برخال (۵) واژه‌ای که بنوی ب . ماندلبروت برای نامیدن اشکال با ابعاد عجیب وغریب برساخته است .ماندلبروت را می‌توان بحق پدر برخالها به شمار آورد ،

گرچه خودا و موکدا " بر آن بوده است که برمثالهای ابتدایی چون منحنی برفدانه انگشت گذارد و کاشفین این مثالها را پیشگامان این رشته معرفی کند. با این وجود، اگر ماندلبروت چهارچوب، واژگان، و روشهای پژوهش برخالها را پدید نمی‌آورد، هندسهٔ برخالی چونان یک موضوع یکپارچه هرگز هستی نمی‌یافت. اندکی بعد خواهیم دید که تعریف ماندلبروت از " بعد برخالی" دقیقا "همان "بعد خودهمانندی" که ما از آن استفاده کردیم نیست؛ اما به هر حال، این دو معمولا" با هم برابرند و دومی را راحت‌تر می‌توان محاسبه کرد.

با تنها چند مثالی که در دست داریم، هنوز زود است که ادعاهایی دربارهٔ کاربرد یا ماهیت برخالها بکنیم، یا اینکه به بررسی دیدگاه ماندلبروت دربارهٔ ماهیت برخالی طبیعت بنشینیم. در واقع، تا اینجا بیشترین ادعایی که می‌توانیم بکنیم این است که منحنی برفدانه طرفه موجودی است هندسی و نه چندان چیزی بیش از این. در واقع هم به این منحنی تا زمانی که ماندلبروت مفهوم وحدت بخش "برخال" را پیش بکشد و بسیاری مثالهای دیگر



شکل۵ (الف)



شکل ۵ (ب)

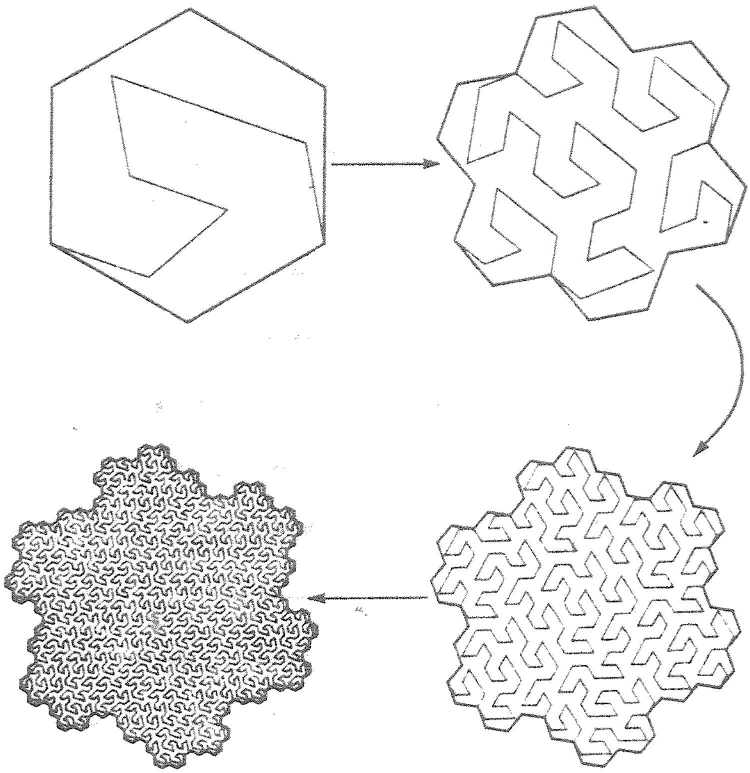
سربرآورند ،این چنین برخورد می‌شد .حال بیایید به مثال دیگری بپردازیم که ساختنش اندکی پیچیده‌تر است اما بعد برخالیش را راحت‌تر می‌توان محاسبه کرد :مارگونهٔ ویلیام گوسپر (۷) . [2]

شکل(۵ الف)نخستین مرحلهٔ ساختن منحنی مارگونه را نمایش می‌دهد : وتر AC از شش ضلعی منتظم ABCDEF با خط شکستهٔ هفت بری جایگزین شده است که هرپارهٔ آن ،وتر یک شش ضلعی همانند کوچکتر است .با بررسی دقیق شکل می‌توان دریافت که هفت شش ضلعی کوچکتر رویهم مساحتی دقیقاً " برابر با مساحت شش ضلعی بزرگتر دارند (مثلاً" ،دقت کنید که ΔAGM با ΔBHM هم‌مساحت است) ؛ از این روضریب مقیاس می‌بایست $\sqrt{7}$ باشد .اینک همین فرآیند را با شکستن هرکدام از این هفت وتروجایگزین کردن آنها با خطهای شکسته مرکب از هفت وترشش ضلعیهای کوچکتر ،تکرار می‌کنیم .مثلاً" ،وتر AH که به هفت وترکوچکتر شکسته شده ،درشکل (۵ ب) نمایش داده شده است .

شکل ۶ چهار مرحلهٔ نخست ساختن این منحنی را نشان می‌دهد .درهر مرحله هرپاره خط مرحلهٔ قبلی با $N=7$ پاره خط نوکه با ضریب $s = \sqrt{7}$ کوچکتر شده‌اند ،جایگزین می‌شود .پس بعدخودهمانندی مارگونه برابر است با

$$d = \frac{\log 7}{\log \sqrt{7}} = 2$$

می‌توان نشان داد که مارگونه از جهت دیگری هم دوبعدی است : این منحنی یک منحنی پئانو است .منحنیی که از هرنقطهٔ ناحیه‌ای مسطح می‌گذرد .



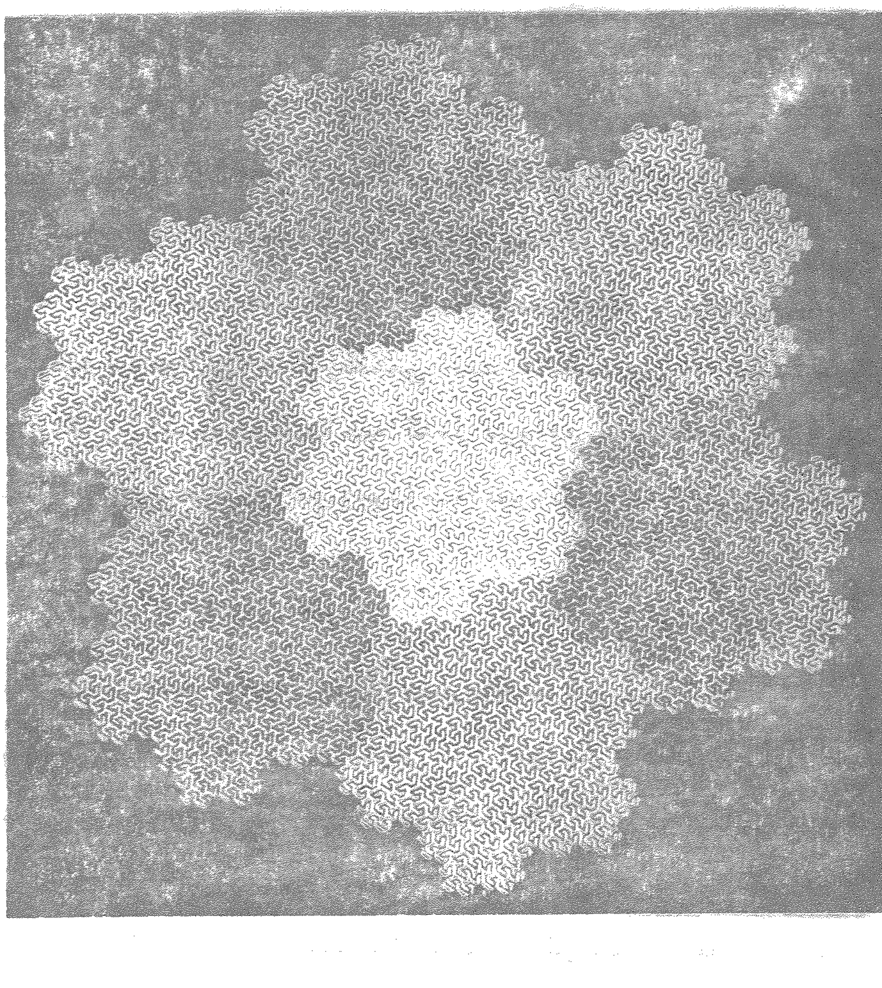
شکــــل ۶

آیا مارگونه یک برخال است ؟ گرچه این منحنی موجودغریبی است (یک منحنی‌حدی که ناحیه‌ای مسطح را پرمی‌کند) ،با این حال بعدخود همانندیش عددی صحیح است .بنابراین مارگونه یک برخال ،به مفهومی که ما این واژه را به‌کارمی‌بریم‌نیست .با این وجود ،بعدا "خواهیم‌دیدکه تعریف ماندلبروت ،اطلاق واژهٔ برخال راحتی به‌اشکال عجیب وغریبی با بعدصحیح هم‌روا می‌دارد ،وآنجا ازمارگونهٔ گوسپربه‌عنوان مثالی‌ازاین گونه‌اشکال استفاده‌خواهیم‌کرد .(ظاهرا "این هم‌پاتکی است ازسوی اعداد صحیح که‌بیرون رانده‌شده‌بودند !)

اما ما بازهم‌شکلی با بعدخودهمانندی ناصحیح ساخته‌ایم .مثلا" چطور است مرزمارگونه را درنظربگیریم‌ـ منحنیی‌که‌ناحیهٔ مسطح پرشده‌توسط منحنی مارگونه را محدودمی‌کند .درحالت معمولی،این گونه مرزها باید یک بعدی باشند .حال بارددیگربه‌شکل ۵ نگاه‌کنیم .درساختن منحنی‌مارگونه همچنین مرزمارگونه‌را نیزمی‌سازیم :هرضلع شش‌ضلعیABCDEF با $N=۳$ پاره‌خط که‌باضریب $s=\sqrt{۷}$ کوچکترشده‌اند ،جایگزین می‌شود .(مثلا "AB باخط شکستهٔ AGHB جایگزین شده‌است .)این گام‌تکرارشوندهٔ پایه است ; درشکل ۶ همین فرآیندتامراحل پیشرفته‌تری نشان داده‌شده است .دراین شکل مراحل میانی ساختن مرز ،به‌گونه‌ایکه‌ازضلعهای بیرونی شش‌ضلعیهای پدیدآورندهٔ مراحل میانی ساختن منحنی‌مارگونه ساخته می‌شود ،نمایانده‌شده‌است .مطابق تعریف ما ،بعدخودهمانندی مرز مارگونه‌برابراست با

$$d=\frac{\log ۳}{\log \sqrt{۷}} \approx ۱/۱۲۹۲.$$

شکـــــل ۷



می‌توان نشان داد. وشگفت اینکه به روشی سراست می‌توان نشان داد که این بعدکسری واقعاً "هم موجه است. درحالی‌که بعد برخالی منحنی برفدانه را می‌توان نتیجه کاربست ماشینی دستوری که برای بعدداشتیم به حساب آورد، بعدبرخالی مرزمارگونه توجیه هندسی گریزناپذیری دارد.

همان گونه که درشکل ۷ دیده می‌شود، ناحیه مسطح پرشده توسط مارگونه را می‌توان به $N = ۷$ زیرناحیهٔ همنهشت تقسیم‌کرد. بنابراین هرکدام از این زیرناحیه‌ها را باید با ضریب $\sqrt{۷}$ بزرگ کرد تا به اندازهٔ ناحیه اصلی شوند. لاجرم باید انتظار داشته باشیم که محیط ناحیهٔ مارگونه (یعنی‌درازای مرز مارگونه) ۷ برابر محیط هریک اززیرناحیه‌هایش باشد. (اگرمرزیک منحنی یک بعدی باشد این انتظار طبیعی است.) اما با این وجود با زنگری دقیق شکل آشکار می‌کند که محیط ناحیهٔ کامل درواقع سه برابر بزرگتر است (نیمی ازمحیط هریک ازشش زیرناحیهٔ بیرونی باهم مرزمارگونه را تشکیل می‌دهند.)

این نتیجهٔ شگفت آوررا می‌توان چنین تعبیرکرد: بزرگ کردن بعد خطی باضریب $\sqrt{۷} \simeq ۲/۶۴۶$، مرزرا باضریب ۳ افزایش می‌دهد. پس بعد خودهمانندی مرزمارگونه باید چنان باشد که $(\sqrt{۷})^d = ۳$ و این نتیجه قبلی ما را تائید می‌کند: $d \simeq ۱/۱۲۹۲$.

ازدیگرسو، اگرنخست به محیط شکلها توجه می‌کردیم، ملاحظهٔ این نکته که درازای مرزتمام ناحیهٔ مارگونه سه برابر محیط هریک اززیرناحیه‌هایش

است ،ما را به این باوروا می‌داشت که مساحت ناحیه ،به جای اینکه ۷برابر مساحت زیرناحیه‌هایش باشد (که هست) ، ۹برابر مساحت آنهاست . (علی‌رغم تمام وقایع عجیب وغریبی که تا اینجا اتفاق افتاده ، ۹ هنوزهم برابر ۷نیست)

پس مرزما رگونه حالتی را نشان می‌دهدکه درآن هیچ چیز ،جزیک بعد کسری نمی‌تواندتوجیهی داشته باشد .حال به مثال برفدانه‌ٔ کخ بازگردید وببینیدآیا بعدمرزآن ،همان گونه که قبلاً" به نظرمی‌رسید ،هنوزهم برایتان عجیب است یا نه .

۲. تعریف ماندلبروت برای "برخال"

تا اینجا ،ما تعریفی خودمانی ازبرخال ،به‌عنوان شیئی با بعد خودهماندی کسری ارائه‌داده‌ایم .تعریف صوری ماندلبروت به‌طورقابل توجه‌ای دقیقتراست ودرواقع وجودبرخالهایی با بعدصحیح راهم روا می‌دارد . نخست این تعریف را بیان می‌کنیم وسپس درباره‌ٔ اصطلاحاتی که درآن به‌کار رفته ،توضیح می‌دهیم :

تعریف [3] : یک برخال مجموعه‌ای است که بعدهاوسدورف بزیکوویچ (۸)آن اکیدا" ازبعدتوپولوژیکیش بیشترباشد .

بعدتوپولوژیکی همان چیزی است که بیشترما به‌عنوان بعد "معمولی می‌شناسیم .برای مقاصدماکافی است که به بعدتوپولوژیکی تنها درقالب مثالهای معمولی توجه‌کنیم :نقطه‌های صفربعدی،خطها یا منحنیهای یک بعدی

رویه‌های دوبعدی، و اجسام سه بعدی، بعد توپولوژیکی همواره با عددی صحیح بیان می‌شود.

بعدها وسدرورف ـ بزیکوویچ اساساً "پیچیده‌تر است؛ این مفهوم برپایهٔ مفهوم "اندازه" یا "فراخی" (۹) مجموعه‌ای از نقاط بنا شده است (این اصطلاحها، عناوینی رسمی هستند برای مفاهیم "درازا"، "مساحت" و "حجم" که هریک اندازهٔ متناظر با شیئی با بعدی ویژه هستند.) مجموعه‌ای که قرار است اندازه‌اش محاسبه شود، به روشهای گوناگون توسط مجموعه‌هایی با اندازهٔ معلوم پوشانده می‌شود، و فرآیندی حدی برای محاسبهٔ اندازهٔ مجموعه به کار می‌رود. این اندازه اساساً "به بعد d که در محاسبه فرض شده است، بستگی دارد و حداکثر یک مقدار d وجود دارد که برای آن اندازه نه صفر است و نه بینهایت. پیچیدگی این فرآیند، آن را برای مقاصد ما نامناسب می‌سازد و کارآیی‌اش را به عنوان ابزاری محاسباتی سلب می‌کند.

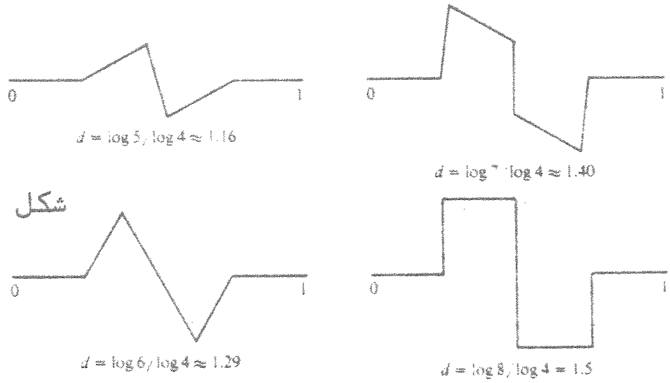
درحالی که محاسبهٔ بعدها وسدورف ـ بزیکوویچ چندان ساده نیست، محاسبهٔ بعد خودهمانندی بسیار ساده‌تر است و از بخت خوش ثابت شده است که در حالتهایی که ما می‌خواهیم بررسی کنیم، این دو با هم برابرند. (این برابری لازم نیست برای تمام مجموعه‌ها صادق باشد، اما ما در بحث خود دربارهٔ برخالها، به هیچ یک از مثالهای ناقض این موضوع نخواهیم پرداخت.) به بیان رسمی، یک برخال شیئی است که بعد توپولوژیکیش کمتر از بعدها وسدورف ـ بزیکوویچ آن باشد. اگر بخواهیم کمتر رسمی باشیم، می‌توانیم بگوییم که یک برخال شیئی است با بعد خودهمانندی ناصحیح. به هر حال، ادوارد اسپیلراین (۱۰) نشان داده است که بعد توپولوژیکی نمی‌تواند از بعد

ها وسدورف ـ بزیکوویچ بزرگترباشد [4]؛ پس (ازآنجاکه بعدتوپولوژیکی همواره عددی است صحیح)، اگر بعدها وسدورف ـ بزیکوویچ بخواهد ناصحیح باشد، می‌بایست از بعدتوپولوژیکی بیشترباشد. به این ترتیب، یک برخال به مفهوم غیررسمی ما، مطابق با تعریف رسمی ماندلبروت نیز برخال است. اما عکس این مطلب صادق نیست، زیراکه در بخش بعدی برخالی را خواهیم دیدکه بعدخودهمانندیش عددصحیح است، اما درشرایط تعریف ماندلبروت صدق می‌کنند.

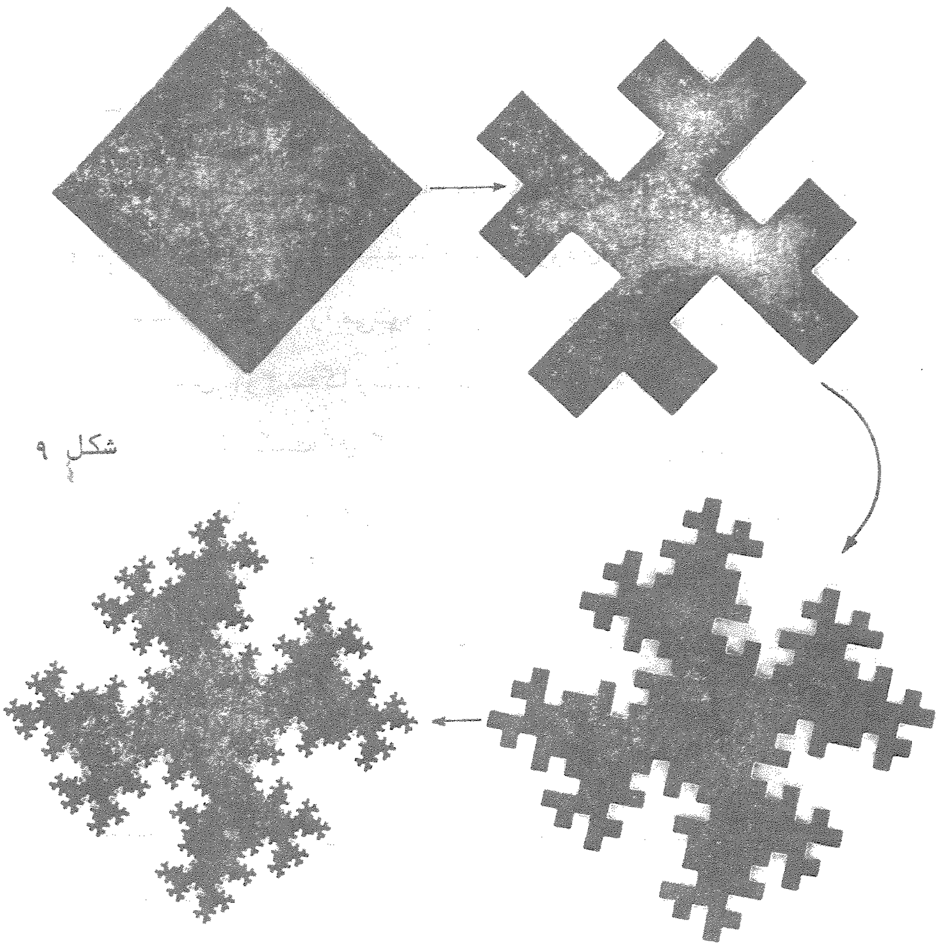
۳. تو، من، والباقی برخالها

خواننده‌ٔ نکته‌سنج تاکنون دریافته است که ساختن برفدانه و مارگونه اساسا "برگونه واحدی از فرآیندساخت با وردی (تکراری)"(۱۱) استوار است. این "فرآیندساخت کخ" را می‌توان برای ساختن برخالهای جدیدی با بعدهای خودهمانندی بین ۱ و ۲ به‌کاربست. همچون گذشته، با پاره‌ٔ یکه آغاز می‌کنیم وبه‌جای آن خط شکسته‌ای که پاره‌های آن هم‌درازاهستند می‌گذاریم. فرض کنیم درازای هرپاره $\frac{1}{4}$ باشد. دراین حالت ضریب مقیاس همواره ۴ است. درحالی که عدد N به‌نوع ساختن بستگی دارد. چهارحالت ممکن برای انتخاب N درشکل ۸ نشان داده‌شده‌است. (باشکل ۴ مقایسه‌کنید)

شکل ۹ نیزنتیجهٔ کاربست این فرآیندرا به اضلاع مربع یکه، به‌ازای $d = ۱/۵$، نشان می‌دهد. ماندلبروت این برخال را "جزیره‌ٔ چهارگانی‌کخ"(۱۲)


0
1
$d = \log 5 / \log 4 \approx 1.16$
0
1
$d = \log 7 / \log 4 \approx 1.40$
0
1
$d = \log 6 / \log 4 \approx 1.29$
0
1
$d = \log 8 / \log 4 = 1.5$

شکل ۸



شکل ۹

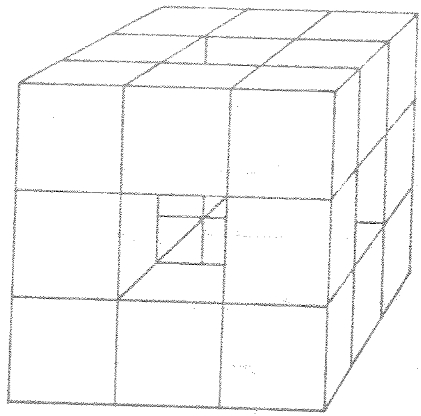
می‌نامد. [5]

برای آنکه مثالی با $2 < d < 3$ داشته باشیم، یک مکعب یکه و ۲۷ زیرمکعب را که با کوچک کردن مکعب اصلی با ضریب ۳ به دست می‌آید، درنظر می‌گیریم: از مکعب اصلی ۷ تا از این زیرمکعبها را بیرون می‌آوریم: مکعب میانی هریک از وجوه و نیز میانیترین مکعب را (شکل ۱۰). آنچه می‌ماند ۲۰ مکعب کوچک و ضریبی برابر ۳ است. اگر این عمل را درهر مرحله تکرار کنیم، آنچه درحد به دست می‌آید، همان چیزی است که "اسفنج منگر" [۱۳] نامیده می‌شود. شکل ۱۱ چهارمین مرحلهٔ ساختن آن را نشان می‌دهد. بعد خودهمانندی اسفنج منگر برابر است با

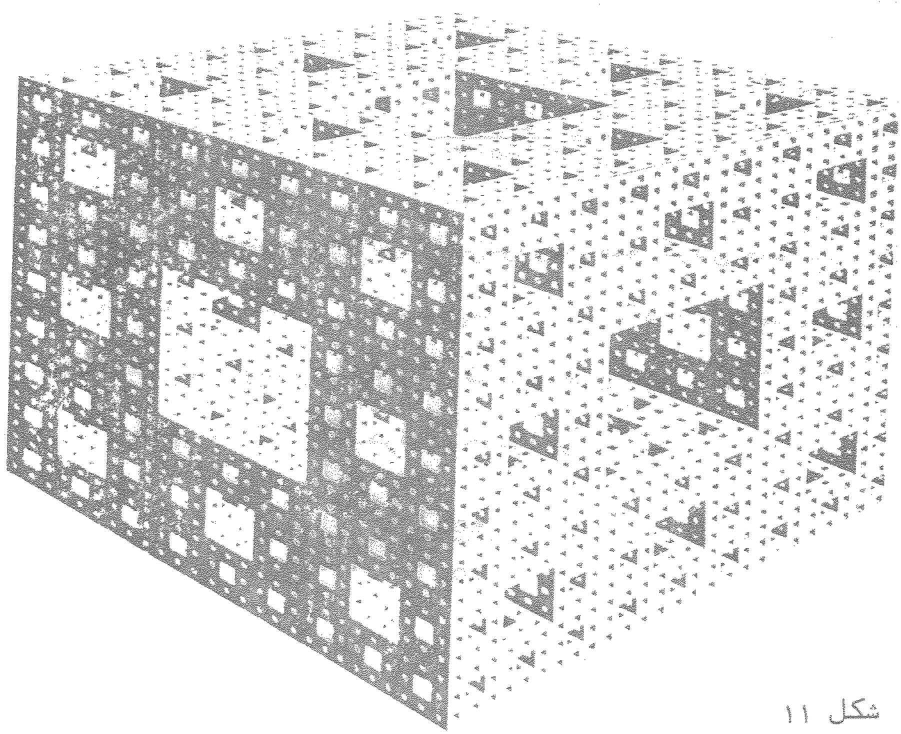
$$d = \frac{\log ۲۰}{\log ۳} \approx ۲/۷۲۶۸$$

حجم اسفنج برابر صفر است (این را می‌توان با جمع کردن حجم موادی‌که درهر مرحله از مکعب اصلی بیرون ریخته می‌شود، نشان داد.)، اما مساحت سطح آن نامتناهی است. وجوه اسفنج را "قالیچه‌های سرپینسکی" [۱۴] می‌نامند؛ چون $N = ۸$ و $s = ۳$ بعد هر قالیچه برابر است با

$$\frac{\log ۸}{\log ۳} \approx ۱/۸۹۲۸$$



شکـــل ۱۰



شکـل ۱۱

گرچه اسفنج منگر، ودیگر مثالهایی که از برخالها دیدیم، اشیایی بس شعبده وارهستند، اما ظاهرا "این مثالها ربط چندانی به آنچه که "جهان واقعی" اش میخوانیم ندارند. از جهتی انتظام ساختگی فرآیندساخت کخ وتکیهٔ بیش از حد به خودهمانندی ما را به بیراهه کشانده است.

مثال کلاسیک ماندلبروت از ماهیت برخالی نوارهای ساحلی ($d=1/2$) برپایه مفهوم نسبتا "جاندارتر خودهمانندی "آماری" بنا شده است. این مفهوم را میتوان به نحوی چنین توجیه کرد که مثلا"، با انتخاب ضریب مقیاس مناسبی، نوار ساحلی ردآیلند، مانند نوار ساحلی کالیفرنیا "به نظر میآید"

ماندلبروت اثبات این را که هندسهٔ برخالی بخشی اساسی از ساختار طبیعت است، سرلوحهٔ وظایف خود قرار داده است. اینک هندسهٔ برخالی رهیافتی منسجم ویگانه به مسائل که شامل نابسامانیهای نظام پذیر[15] و همانندیهای با تغییر مقیاس هستند، عرضه میکند. در فیزیک، برخالها برای الگوسازی حرکتهای براونی ونقاط گردابی[16] درسیلان مایعات به کار برده میشوند. درهواشناسی، برخالها را میتوان به عنوان الگوهایی برای ابرها به کار برد. درپژوهش روی توزیع ماده در کیهان برخالها را به کار برده اند؛ چنین مینماید که شاید خود کیهان یک برخال گنده باشد

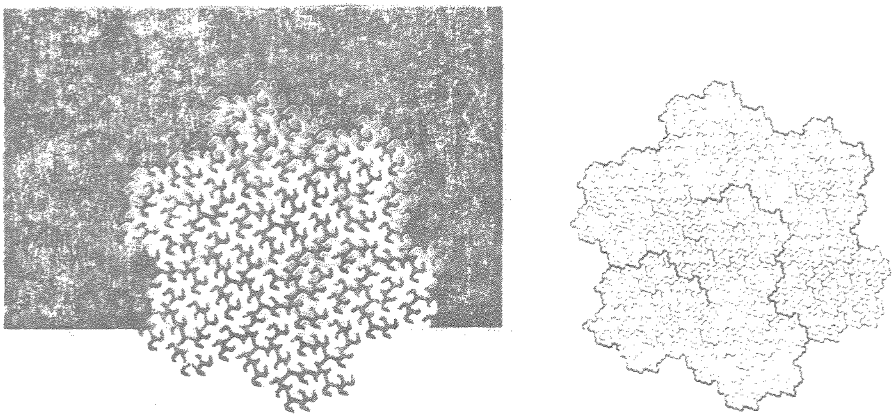
درفیزیولوژی مثالی وجود دارد که بویژه از این دیدگاه جالب توجه است: بافتهای سلولی ورگهای خونی. رگها سوخت لازم بافتها (یعنی اکسیژن) را تامین میکنند و از این رو میبایست شبکه رگهای خونی ما، به هریک از سلولها نزدیک باشد. از این گذشته، دستگاه گردش خون، مواد غذایی را به سلولها میرساند ومواد زائد را از آنها باز میگرداند. پس هر

سلول می‌بایست نزدیک یک سرخرگ (برای دریافت مواد غذایی) ویک سیاهرگ (برای برون ریزپسمانده‌ها) باشد. مارگونه‌ٔ گوسپر می‌تواند الگویی برای یک همانند مسطح از دستگاه گردش خون بدن عرضه کند.

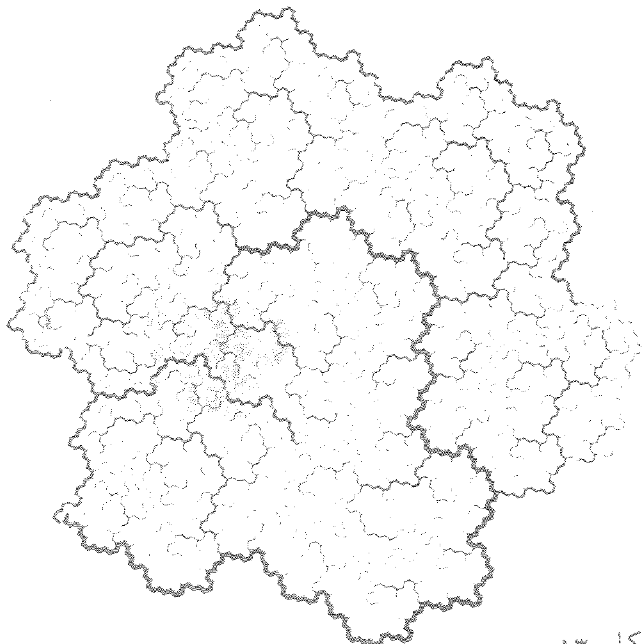
شکل ۱۲ چهارمین مرحلهٔ ساختن یک مارگونه را، به‌عنوان مرزمیان دوناحیهٔ سفید وسیاه، نشان می‌دهد. باکشیدن "آبراهه"هایی میان رشته‌های سفید وسیاه شکل، می‌توان الگویی برای یک شبکه "زهکشی" یا "آبرسانی" ساخت. این آبراهه‌ها را هم می‌توان به "سرخرگ"ها (سیاه) و "سیاهرگ"ها (خاکستری) تقسیم کرد. در شکل ۱۳ الگویی نمایش داده شده است که درپهنای هررگ با درازای آن متناسب است. فضای بین رگها نمایانگر بافت سلولی است.

برای آنکه واقعاً به الگویی کارآمد دست یابیم، لازم است که میزان تنگ شدن رگها بیشتر باشد. می‌توان میزانی را برگزید که با آن رگهای خونی درنهایت تنها کسرکوچکی از ناحیهٔ مسطح را اشغال کنند. آنچه که می‌ماند بافت سلولی است. این الگو، همان گونه که ماندلبروت اشاره می‌کند [6] یک برخال است:

در این نمایش مسطح، سیاهرگها وسرخرگها هردوشامل نقاط درونی هستند. دایره‌های کوچکی می‌توان رسم کرد که کاملاً" درون آنها قرار بگیرد. اما بافت کاملاً" چیزدیگری است، درآن هیچ تکه‌ای، هرچند کوچک، نمی‌توان یافت که سیاهرگ وسرخرگی درآن راه نیافته باشد. چنین بافتی یک برخال درست وحسابی



شکل ۱۲



شکل ۱۳

است : بعدتوپولوژیکی ۱ وبعدبرخالی ۲.

پس این همان برخالی است که وعده‌اش را داده بودیم ،برخالی با بعد خودهمانندی صحیح — یک همانندمسطح برای دستگاه گردش خون ما. اکنون دیگرنباید ازدانستن اینکه بافتهای بدن ما را می‌توان چون یک رویهٔ برخالی به‌شمار آورد ،درشگفت شویم .بافتهای بدن ازنظرتوپولوژیکی دوبعدی هستندزیرا حدفاصل دستگاههای سه‌بعدی سیاهرگی وسرخرگی می‌باشند .اما بعدبرخالی آنها سه است ،زیرا این بافتها هستندکه حجم اشغال شده‌توسط بدن ما را پرمی‌کنند .به‌دیگرسخن ،تو ومن هم مثالهایی هستیم ازبرخالها !

مـــــراجع :

1 A.D. Aleksandrov,et al,Mathematics: Its Content,Methods,and Meaning (3 volumes),The M.I.T. Press,Cambridge,1983.

2 Martin Gardner, " In which "monster" curves force redefinition of the word "curve" , " Mathematical Games,Scientific American,New York,December 1976.

3 , 5 Benoit B. Mandelbrot,The Fractal Geometry of Nature, W.H.Freeman and company,San Francisco,1982.

4 W.Hurwicz and H.Wallman,Dimension Theory,Princeton University Press,1941.

6 Benoit B.Mandelbrot,Fractals:form,chance,and dimension,W.H. Freeman and company,san Francisco,1977.

توضیحـــــات :

(1) Snowflake
(2) Flowsnake
(3) Self-similar
(4) Helge von Koch

(5) Fractal واژه‌ای است ساختگی که آن را از واژه لاتینی Fractus (به معنی بی‌قاعده و نامنظم) گرفته‌اند، و از این جهت با واژه Fraction (کسر، برخه) هم‌ریشه است. ما آن را در مقام اسم به " برخال " و در مقام صفت به "برخالی " برگردانده‌ایم.

(6) Benoit B.Mandelbrot (7) R.William Gosper

(8) Hausdorff-Besicovitch Dimension

(9) Extent

(10) Edward Szpilrajn (11) Iterative

(12) Quadric Koch island (13) Menger Sponge

(14) Sierpinski Carpets

(15) Systematic Irregularities (16) Turbulence

این نوشتار برگردانی است از مقاله‌ٔ زیر:

Anthony Barcellos," The Fractal Geometry of Mandelbrot",The college Mathematics Journal,March 1984.