پیک ریاضی

جلد دوم شماره ٔ اول ،بهار ۱۳۶۶

درباب تاریخ نظریه‌گرافها

نوشته ٔ : فرانک هاراری

ترجمه ٔ : محمدصادق منتخب

دیدگاه شخصی من ازتاریخ رشته‌ی ازریاضیات ،تاریخی است که معرف مهمترین قضیه‌های آن باشد .بنابراین ،برای دست یافتن به تاریخی ازنظریه ٔ گرافها ازاین دیدگاه به قضیه هایی خواهیم پرداخت که به گمان ما ازبا ارزش ترین قضیه‌ها درنظریه ٔ گرافها هستند .مقاله را با توصیف چهارقضیه ٔ مشهورمربوط به پیش ازقرن بیستم آغازمی‌کنیم ،یعنی ،

۱) اویلر (۱) (۱۷۳۶)

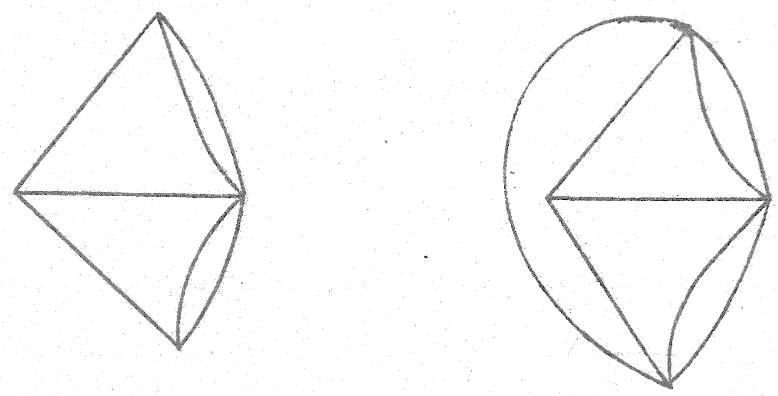
۲) کیرشف (۲) (۱۸۴۷)

۳) کیلی (۳) (۱۸۵۷)

۴) هیوود (۴) (۱۸۹۰)

۱. اویلر

از زمان اویلر، پلی دیگر به پلهای قدیمی هفتگانهٔ کونیگسبرگ(۵) کالینینگراد فعلی، افزوده شده است، [3]،[4] . اگر این پل دو طرف رودخانه را بی آنکه از جزیره‌ای گذشته با شد به هم متصل کند، آنگاه گراف اولیه (که راسها یا نقطه‌ها یش متناظر به خشکیها، و یالها یا خطها یش متناظر با پلها ست) وگراف جدید به صورت زیر خواهند بود:



گراف جدید گراف اولیه

شکل ۱

(به بیانی دقیقتر، هردوی آنها چندگراف (۱۶) هستند.)

گراف جدید همبند است، تنها دو نقطهٔ از درجهٔ فرد دارد، و بنابراین می‌توان نشان داد که دارای راه نیم‌سادهٔ (۷) بازی است که هریک از خطها فقط یکبار در آن ظاهر می‌شوند، ولی، نظر به اینکه نیم‌سادهٔ بسته با این خاصیت ندارد، این گراف هنوز اویلری نیست.

تاریخ ما دربارهٔ نظریهٔ گرافها، درواقع با نخستین قضیهٔ ثبت شده .

آن آغاز می‌شود.

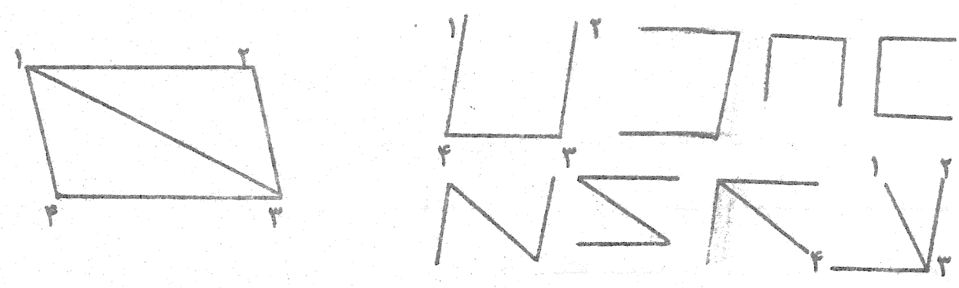
قضیهٔ ۱. [اویلر] . یک گراف اویلری است اگروتنها اگرهمبندباشدودرجهٔ هرنقطهٔ آن زوج باشد

قضیهٔ دیگری نیزازاویلروجوددارد. این قضیه بنابی است براین ادعا که وی پدرتوپولوژی است. فرمول آن به اندازه‌ای شهرهٔ آفاق است که ماحتی نیازی به تعریف نمادهای آن نمی‌بینیم.
درهرچندوجهی کروی،

$$V - E + F = 2$$

۲. کیرشف

قضیهٔ مهم‌بعدی درتاریخ نظریهٔ گرافها مربوط به تعداددرختهای مولد (۸) یک گراف برچسب‌دار (۹) است. این قضیه برای محاسبهٔ شاره‌ها درشاخه‌های یک شبکهٔ برقی به‌کارمی‌رود. نمودار زیرمثالی ازیک گراف G همراه با درختان مولدآن است:



گراف G

درختان مولدگراف G

شکل ۲

با استفاده از گراف G ، که به تصادف اختیار شد ، نحوهٔ تعیین تعداد درختان مولد یک گراف دلخواه به روش کیرشف را شرح می‌دهیم .

ماتریس همجواری(۱۰) A وابسته به گراف G را به صورتی که برچسب زده شده است درنظر می‌گیریم .

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

کیرشف [11] ماتریس C را از A با درنظرگرفتن $-A$ وقراردادن درجه‌های نقطه‌های وابسته به اعضای قطراین ماتریس روی آن تشکیل می‌دهد .

$$C=C(G)=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود ، مجموعهای سطری ومجموعهای ستونی همگی مساوی با صفراند . بنابراین ، بنابه قضیه‌ای نه‌چندان معروف ولی آسان ، درجبر ، همه همسازه‌های (کوفاکتورهای) این ماتریس مساوی اند . قضیهٔ کیرشف چنین است :

قضیهٔ ۲ . [کیرشف] . مقدار مشترک همسازه‌های $C(G)$ مساوی با تعداد

درختان مولد G است .

با محاسبهٔ همسازهٔ سطروستون اول ماتریس C ،ملاحظه می‌کنیم که گراف G درشکل ۲ دقیقا " دارای هشت درخت مولداست ،که درشکل ۲ نمایش داده شده است .

۳. کیلی

یک گراف برچسب دار با p نقطه گرافی است که نقطه‌های آن به ترتیب با عددهای p,...,2,1 شماره‌گذاری شده باشند .درخت گرافی است همبند وبدون چرخه (۱۱) . گرچه کیلی نخستین فردی بودکه درختهای برچسب دار را شمرد ،بنا به اظهارج .د. مون [15] ـ فردی که کتاب کاملی درباب شمارش درختهای برچسب دارنوشت ـ قضیهٔ کیلی بارها وبارها ، ومستقل ازیکدیگر ،مجددا "کشف شد ،تعمیم داده شد ،واثبات گردید .

قضیهٔ ۳.[کیلی]. تعداددرختهای برچسب دار با p نقطه مساوی با p^{p-2} است .

به معنایی ،این قضیه پیشتروبه‌گونه‌ای ضمنی توسط کیرشف ثابت شد . زیرا ،بسنده است گراف کامل با p نقطه ،یعنی K_p ،رااختیارکنیم وقضیهٔ ۲ رادرموردآن به‌کاربریم .گرچه اثبات اولیه کیلی فقط به‌ازای p=6 داده شد ، به منظوراختصار ،اثبات رابه‌ازای p=5 ارائه می‌دهیم . بسجملهٔ پنج متغیره

$$x_1x_2x_3x_4x_5(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^3$$

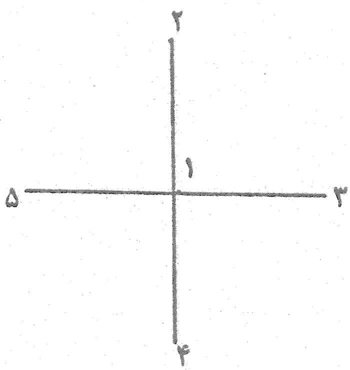
رادرنظرمی‌گیریم .این بسجمله 5^3 جمله دارد .هریک ازاین جمله‌ها ،

مثلا" نخستین جمله‌ء آن

$$(x_1x_2x_3x_4x_5)x_1^3 = (x_1x_2)(x_1x_3)(x_1x_4)(x_1x_5)$$

متناظر با درخت مولد یکتایی است .

با درنظر گرفتن متغیرها به‌عنوان نقطه‌ها و سازه‌های چهارگانه‌ء طرف راست به‌عنوان خطها ،درخت مطلوب به‌دست می‌آید .



شکل ۳

۴. هیوود

هیوود نه تنها مثال ناقضی برای "اثبات" حدس چهار رنگ توسط کمپ ارائه کرد ،بلکه قضیه‌ء پنج رنگ [10] را نیز ثابت کرد . – گراف مسطح گرافی است قابل رسم در یک صفحه به‌طوری که هیچ دو ضلع آن متقاطع نباشند ،یک گراف n رنگ‌پذیر است اگر بتوان نقطه‌های آن را با استفاده از n رنگ چنان رنگ آمیزی کرد که هیچ دو نقطه‌ء همجوار آن همرنگ نباشند .

قضیه‌ء ۴. [هیوود]. هر گراف مسطح ۵ رنگ‌پذیر است .گرچه تا امروز ،کوششهای

جدی بسیاری برای اثبات درستی حدس چهار رنگ به عمل آمده است ،هیچیک تاکنون موفقیت آمیز نبوده است ،و این حدس هنوز به عنوان حدسی لاعلاج ودور از دسترس باقی است . (درستی این حدس بالاخره درسال ۱۹۷۶ ،یعنی ۳ سال پس از نوشتن این مقاله توسط ک . آپل و د. هیکن اثبات شد .مترجم)

چهار قضیهٔ کلاسیک بعدی ،بترتیب تاریخی ،عبارتند از قضیه های

۵)منگر (۱۲)

۶) کوراتوفسکی (۱۳)

۷)پولیا (۱۴)

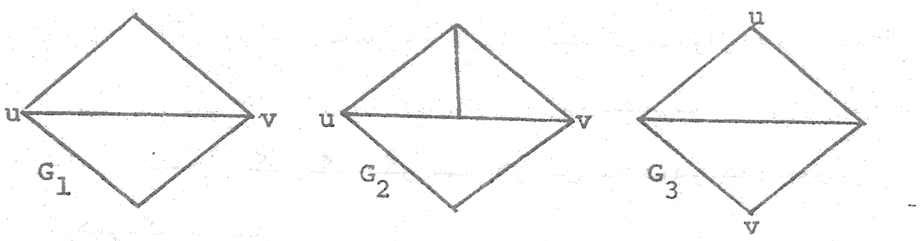
۸) فروشت (۱۵)

۵. منگر

به طوری که در [7] به تفصیل آمده است ،قضیهٔ منگر [14] نیز به مانند قضیهٔ ۳ از کیلی ،به دفعات ومستقل از یکدیگر ،به صورتهای گوناگون مجددا " کشف وثابت شده است .

قضیهٔ ۵. [منگر] . درهرگراف G ،کمترین تعداد نقطه هایی که حذف آن منجر به ناهمبندشدن دونقطهٔ مفروض u و v می‌شود مساوی با بیشترین تعداد راههای (۱۶) ساده با مجموعهٔ نقطه های دوبه دوجدا از هم بین u و v است .

فرض کنیم $k(u,v)$ نمایشگر این مقدار باشد .درهردوگراف G_1 و G_2 درشکل۴ داریم $k(u,v)=3$ ، درصورتی که در G_3 داریم $k(u,v)=2$.



شکل ۴

دیراک (۲) با استفاده از قضیهٔ ۵، نتیجهٔ مشابهی به‌دست آورد. در این قضیه به‌جای نقطه‌ها خط‌ها حذف می‌شوند و u و v می‌توانند همجوار هم باشند. قضیهٔ شارهٔ "شارهٔ بیشینه، برش کمینه" ازفورد و فولکرسون [5] را نیز می‌توان با تشکیل چندگراف مناسب از قضیهٔ منگر نتیجه گرفت. در این مقام، شارهٔ بیشینه تبدیل به بیشترین تعداد راه‌ها با مجموعهٔ خطهای دوبه‌دو جدا از هم می‌شود، و برش کمینه تبدیل به کمترین تعداد خطهایی می‌شود که حذف آنها منجر به جدا شدن راسهای u و v می‌شود.

۶. کوراتوفسکی

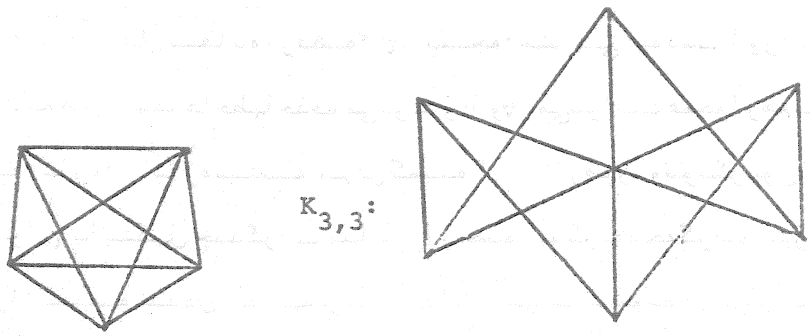
به‌طوری که در کتاب کلاسیک کونیگ [12] آمده است، تعیین محکی برای مسطح بودن یک گراف یکی از مورد توجه‌ترین مساله‌های مطرح در خلال دههٔ ۱۹۲۰ بوده است [13]. یک هومئومورف یک گراف از درج نقطه‌های اضافی درجهٔ ۲ بر یک یا چند خط آن به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۶. [کوراتوفسکی] . یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر حاوی k_5 یا $k_{3,3}$ به پیمانهٔ هومئومورفیسم نباشد.

اغلب کسانی که به رشتهٔ ما به دیدهٔ تحقیر می‌نگرند، از این قضیه به عنوان قضیه‌ای در نظریهٔ گرافها که اثباتش واضح نیست، یاد می‌کردند. **گراف کامل** K_p گرافی است که هر زوج از p نقطه‌اش همجوارند، گراف کامل دوپارچه $K_{m,n}$، که به صورت $K(m,n)$ نیز نوشته می‌شود، دارای m نقطه از یک رنگ و n نقطه از یک رنگ دیگر است. در این گراف دو نقطه همجوارند اگر و تنها اگر همرنگ نباشند.

K_5:

$K_{3,3}$:



شکل ۵

۷. پولیا.

قضیهٔ کلاسیک پولیا در شمارش گرافها [17] سودمندترین قضیهٔ منحصر بفرد در مبحث شمارش گرافهاست.

منظور اصلی در این قضیه، بیان تعداد مدارهای(۱۹) یک گروه جایگشتهای مناسب مقید به ویژگیهای عددی از پیش تعیین شده به صورتی قابل درک است. بدون توضیح نمادها (به فصل ۱۵ از [8] یا فصل ۲ از [9] مراجعه کنید). "سری شکل شمار" را با $C(x,y)$، "سری پیکرمندی شمار" را با $C(x,y)$ گروه مناسب" را با A، "اندیس چرخه‌ای" A را با $Z(A)$ و عبارت حاصل از $Z(A)$ در نتیجهٔ جایگزینی تابع $f(x,y)$ در آن را با نماد

$Z(A,f(x,y))$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۷. پولیا.

$$C(x,y)=Z(A,C(x,y))$$

این دستور برای شمارش انواع گوناگون درختها، گرافها و بسیاری از انواع دیگر ساختها به کار رفته است.

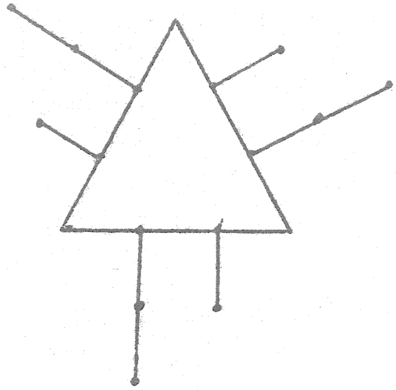
۸. فروشت

فروشت به پرسشی که کونیگ در نخستین کتاب دربارهٔ نظریهٔ گرافها [12] مطرح ساخته بود پاسخ داد. هر یکریختی (ایزومورفیسم) از یک گراف G در خودش یک خودریختی (اتومورفیسم) G است. آشکار است که مجموعهٔ همهٔ خودریختیهای G تشکیل یک گروه می‌دهند. کونیگ پرسید: کی یک گروه مجرد مفروض با گروه یک گراف یکریخت است؟

پاسخ فرشت چنین بود:

قضیهٔ ۸. [فروشت]. به ازای هر گروه مجرد متناهی F گراف G یی با گروه خودریختیهای یکریخت با F وجود دارد.

برای توضیح تمثیلی ساختی که توسط فروشت برای اثبات نتیجه‌اش به کار رفت، گروه چرخه‌ای (سیکلیک) مرتبهٔ ۳ را درنظر می‌گیریم. گرافی که به روش فروشت برای این گروه به دست می‌آید چنین است.



شکـــــل ۶

چون تقارنهای این گراف منحصربه نگاشت همانی ودورانهای به اندازهٔ $\pm\frac{\pi}{3}$ است ،بوضوح دیده می‌شودکه گروه آن ازمرتبهٔ ۳ است .

چهارتا ازجدیدترین قضیه‌های این فهرست توسط

۹) توران(۲۰) (۱۹۴۱)

۱۰) تات (۲۱) (۱۹۴۷)

۱۱)ناش ـ ویلیاز(۲۲) (۱۹۶۱)

۱۲) رینجل(۲۳) ویانگر (۱۹۶۸)

به اثبات رسیدند .

۰۹ توران

توران [20] زمانی قضیهٔ راهگشای خودراکشف کردکه دریکـــــی از اردوگاههای کاراجباری آلمانی ،درجنگ جهانی دوم ،اسیربود ،این قضیه منجربه موردتوجه قرارگرفتن نظریهٔ فرینال(۲۵) گرافها ـ مطرح تریـــن مبحث گرافها درمکتب مجارستان تاحال حاضرشد .درصورت قضیهٔ توران ،نماد [7]،طبق معمول ،به معنی بزرگترین عددصحیح نابزرگتراز x ونمـــاد {7}

به معنی کوچکترین عدد صحیح ناکوچکتر از r است .

قضیهٔ ۹. [توران] . حداکثر تعداد ممکن خطهای یک گراف با p نقطه که حاوی زیرگراف K_3 نباشد ، $[\frac{p^2}{4}]$ است . بعلاوه ، گراف دوپارچهٔ کامل $K([\frac{p}{2}],\{\frac{p}{2}\})$ تنها گرافی است که این حداکثر را می‌پذیرد .

به ازای $p=6$ ، گراف فرینال همانا $K_{3,3}$ است ، شکل ۵ را ببینید . در تعمیم قضیهٔ ۹ ، توران قضیه‌های فرینال متناظر را نیز در مورد گرافهای فاقد K_n ، $n\geqslant 3$ ، به دست آورد [8] .

مسالهٔ حل نشده . اگر به جای K_n گراف C_4 را در نظر بگیریم قضیه‌های دقیق هنوز معلوم نیستند ، گرچه حدهای بالا و پایین به دست آمده‌اند . این مساله فوق العاده مشکل به نظر می‌رسد . البته ، مساله به ازای دیگر چرخه‌های C_n ، $n\geqslant 5$ نیز حل نشده مانده است .

۱۰. تات

یک یک سازه ، یا به طور خلاصه‌تر یک سازه (۲۶) از یک گراف زیرگراف مولدی است که منتظم است و از درجهٔ یک است . بنابراین ، مجموعه‌ای از خطهای مستقل است که همهٔ نقطه‌های گراف را می‌پوشانند . آشکار است که در یک گراف حاوی یک سازه p بایستی زوج باشد ، ولی ، به طوری که بیدرنگ با توجه به ستارهٔ $K_{1,3}$ ، ملاحظه می‌شود ، واضح است که این شرط یک شرط کافی نیست . تات [21] محک زیر را برای وجود یک سازه در یک گراف داده شده کشف کرد .

قضیهٔ ۱۰. [تات] . یک گراف G دارای سازه است اگر وتنها اگر تعداد نقطه‌ها یش زوج باشد وبه ازای هیچ مجموعهٔ S از نقطه‌های آن ، تعداد مولفه‌ های فرد G-S بیش از تعداد نقطه‌های S نباشد .

۱۱. ناش ـ ویلیامز

عددخیمه‌ای [۲۷] یک گراف کمترین تعداد زیردرختهای مولدی است که اجتماع آنها برابر G باشد . به گفتهٔ دیگر ، عددخیمه‌ای یک گراف G کمترین تعداد زیرگرافها (زیرجنگلها)ی بی چرخهٔ G با مجموعهٔ خطهای جداازهم است به طوری که اجتماع آنها همان G باشد . فرض کنیم T (اپسیلون بزرگ) که بیش از دیگر حرفهای الفبای یونانی به یک درخت شباهت دارد ـ نمایشگر عددخیمه‌ای باشد . طبق معمول ، فرض کنیم G دارای p نقطه و q خط باشد . هر درخت از G دارای حداکثر p-1 خط است ، پس عدد صحیح

$$\{\frac{q}{p-1}\}$$

یک کران پایین عددخیمه‌ای G است . ناش ـ ویلیامز ثابت کرد [16] :

قضیهٔ ۱۱. [ناش ویلیامز] . مقدار دقیق عددخیمه‌ای یک گراف G از دستور

$$T(G) = \max_{H} \{\frac{q(H)}{p(H)-1}\}$$

به دست می‌آید که در آن ، H یک زیرگراف نابدیهی G و p(H) و q(H) بترتیب تعداد نقطه‌ها و خطهای G می‌باشند .

با ارائه سه زیردرخت مولد K_5 یا سه زیرجنگل با مجموعه خطهای جدا از هم که اجتماع آنها برابر K_5 باشد ، بآسانی می‌توان ثابت کرد که

$$T(K_5) = [\frac{10}{5-1}] = 3$$

۱۲. رینجل ویانگز

همزمان با اثبات قضیهٔ پنج رنگ، هیوود به بررسی عدد رنگی دیگر سطحهای جهت‌پذیر S_n، کره با n "دستگیره"، $n>1$، سرگرم بود. این عدد، که به وسیلهٔ $\chi(S_n)$ نمایش داده می‌شود، به صورت حداکثر عدد رنگی گرافهای قابل نشاندن بر S_n تعریف می‌شود. هیوود ثابت کرد

$$\chi(S_n) \leqslant [\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}] \quad (n>0),$$

و حدس زد که برابری همیشه برقرار است.

رینجل ویانگز [19,18] با تلاشی بسیار و با مهارتی هرچه تمامتر، حدس هیوود را به صورتی هم‌ارز، با محاسبهٔ مقدار دقیق $\gamma(K_p)$، گونه (۲۸) K_p، یعنی کوچکترین عدد n ی که به ازای آن بتوان K_p را بی آنکه ضلعهایش یکدیگر را قطع کنند بر سطح S_n نشانید، ثابت کردند.

قضیهٔ ۱۲. رینجل ویانگز. گونهٔ گراف کامل K_p از دستور

$$\gamma(K_p) = \{ \frac{(p-3)(p-4)}{12} \}$$

به دست می‌آید.

کران بالای هیوود برای $\chi(S_n)$ به صورت یک کران پایین برای $\gamma(K_p)$ درمی‌آید، و به آسانی از معادلهٔ کلاسیک اویلر در مورد چندوجهیهای

ازگونهٔ γ که به صورت

$$V-E+F=2-2\gamma$$

است ، نتیجه می‌شود . اثبات اینکه این عبارت همچنین یک گران بالابرای ـ $\gamma(K_p)$ است ، فقط با نمایش مستقیم قابل نشانیدن بودن K_p برسطح S_n نظیر میسر است که البته کاری است بس دشوار .

Frank Harary

On the history of the theory of graphs in New Directions in the theory of graphs, Academic Press 1973.

منابع :

1) A.Cayley, A theorem on trees, Quart.j.Math.23 (1889),376-378.

2) G.A.Dirac,Extensions of Menger's Theorem,J.London Math.Soc. 38 (1963),148-161.

3) L.Euler,Solutio problematis ad geometriam sitùs pertinentis, Comment. Academiae Sci.I.Petropolitanae 8(1736),128-140.

4) L.Euler,The Königsberg bridges,Sci.Amer.189 (1953),66-70.

5) L.R.Ford and D.R. Fulkerson,Maximal flow through a network, Canad.J.Math.8(1956), 399-404.

6) R.Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe, Compositio Math.6 (1938),239-250.

7) F.Harary, Variations on a theorem by Menger.Studies in Applied Mathematics 4, SIAM (1970), 112-121.

8) F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, 1969.

9) F.Harary and E.M.Palmer,Graphical Enumeration, Academic Press,New York,1973,to appear.

10) P.J.Heawood,Map color theorem,Quart J.Math.24 (1890),332-338.

11) G.Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen,auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Strome gefuhrt wird, Ann.Phys.Chem.72 (1847),497-508.

12) D.König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936; Reprinted Chelsea,New York,1950.

13) K.Kuratowski,Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fund.Math. 15 (1930),271-283.

14) K.Menger,Zur allgemeinen Kurventheorie,Fund Math. 10 (1927) 96-115.

15) J.W.Moon,Counting Labelled Trees,Canad .Math.Congress, Montreal,1970.

16) C.St. J.A. Nash-Williams,Edge-disjoint spanning trees of finite graphs,J.London Math.Soc. 36 (1961), 445-450.

17) G.Polya,Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math.68(1937),145-254.

18) G.Ringel and J.W.T. Youngs, Solution of the Heawood map-Coloring problem, Proc.Nat. Acad.Sci. USA 60 (1968), 438-445.

19) G.Ringel and J.W.T. Youngs,Remarks on the Heawood Conjecture Proof Techniques in Graph Theory (F.Harary,ed.), Academic Press, New York, 1969, 133-138.

20) P.Turán,Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie, Mat. Fiz.Lapok 48 (1941), 436-452.

21) W.T.Tutte, The factorization of linear graphs, J.London Math. Soc.22 (1947),107-111.

توضیحات :

1. Euler
2. Kirchhoff
3. Cayley
4. Heawood
5. Königsberg
6. multigraph
7. trail
8. spanning tree
9. labeled
10. adjacency
11. cycle
12. Menger
13. Kuratowski
14. Pólya
15. Frucht
16. path
17. max-flow, min-cut
18. bipartite
19. orbit
20. Turán
21. Tutte
22. Nash-Williams
23. Ringel
24. Youngs
25. extermal
26. factor
27. arboricity
28. genus