# روشی نوین در برنامه ریزی خطی

فروزان خردپژوه

یکی دوسالی است که نام نارندرا کارمارکار [1] به عنوان مبتکر روش جدید برنامه ریزی خطی در دنیا، بویژه در محافل ریاضی کاربردی و تجارت، مطرح و مورد بحث است و حتی عده‌ای روش او را انقلابی در این رشته می‌نامند.

در برنامه ریزی خطی هدف یافتن مقدار مینیمم یا ماکزیمم تابعی خطی از تعدادی متغیر است که آن متغیرها می‌بایست در شرایط ویژه‌ای که آنها هم خطی اند صدق کنند. این بخش جدید از ریاضی، که حدود ۴۰ سال پیش مطرح گردید، با روشی که آن را سیمپلکس [2] می‌نامند و توسط یکی از استادان دانشگاه استانفورد به نام جورج دانتزیگ [3] پایه گذاری شد، رو به تکامل نهاد، به طوری که امروزه نه تنها روش فوق در همه رشته‌های ریاضی کاربردی تدریس می‌شود، بلکه موءسسات مختلف نرم افزارهایی را که با این روش و برای حل مسائل خاصی به کار می‌روند تولید و به بازار برای استفادهٔ شرکتهای

تجاری وموسسات علمی عرضه می‌کنند.

کارمارکار، که اهل هندوستان است، تحصیلات خود را در انستیتوی تکنولوژی هندوستان، در بمبئی، به اتمام رسانیده و پس از به پایان رساندن دوره فوق لیسانس در انستیتوی تکنولوژی کالیفرنیا، در سال ۱۹۸۲ دکترای خود را از دانشگاه برکلی اخذ کرد. وی هم اکنون در شرکت AT & T و آزمایشگاه کمپانی بل [۴] مشغول کار است. گرچه غالباً همراه با این روش نام کارمارکار شنیده می‌شود، ولی او سهم بزرگی از این موفقیت را مدیون همکار خود راما کریشنان [۵]، که تهیه نرم‌افزارهای روش را به عهده داشته و نام وی کمتر برده می‌شود، می‌داند.

الگوریتم سیمپلکس در حل مسائلی که تعداد متغیرهای آن از چند هزار تجاوز نمی‌کند مناسب است، ولی هرگاه تعداد متغیرها از ۱۶ الی ۲۰ هزار تجاوز کند، این روش کارایی خود را از دست می‌دهد. در حالی که الگوریتم کارمارکار با سرعت زیاد خود، که می‌تواند بین ۱۰ الی ۱۰۰ بار سریعتر عمل کند، حل مسائل فوق را ممکن می‌سازد.

درحقیقت، سرعت الگوریتم کارمارکار تابعی بسجمله (چندجمله‌ای) از اندازه مساله است، در حالی که سرعت الگوریتم سیمپلکس تابعی است نمایی. در اینجا باید اندکی درباره اندازه یک مساله توضیح دهیم. منظور از اندازه یک مساله تعداد علائمی است که برای معرفی آن به کار می‌رود. بدیهی است که این عدد به دستگاه علامتگذاری بستگی دارد. اما تجربه و قضایای نظری نشان داده‌اند که رده‌بندی پیچیدگی مسائل مستقل از دستگاه علامتگذاری است. از همین رو، مثلاً، می‌توانیم اندازه یک مساله را برابر

تعداد خانه‌های حافظه‌ای که انبار کردن آن نیاز دارد قرار دهیم. یافتن روشهای ساده‌تری برای این کار وجود دارد. مثلا" می‌توانیم اندازهٔ ماتریسی ۳×۳ را که درایه‌های (اعضای) آن اعداد چهار رقمی هستند برابر ۴×۳×۳ یعنی ۳۶ در نظر بگیریم. هنگامی که می‌گوییم یک آلگوریتم تابعی بسجمله یا نمایی از اندازهٔ مساله است، منظور آن است که تعداد عملیاتی که برای حل مسائل آن رده با این آلگوریتم انجام می‌شود تابعی بسجمله یا نمایی از اندازهٔ آن مسائل است. تجربه و قضایای نظری نشان داده‌اند که اجرای آلگوریتمهای بسجمله‌ای با کامپیوترهای فعلی شدنی است. اما آلگوریتمهای نمایی علی‌الاصول اجرا نشدنی هستند. زیرا، مثلا"، انجام آلگوریتمی نمایی روی مساله‌ای با اندازهٔ ۵۰، حتی با سریعترین کامپیوترهای فعلی، ممکن است سر به میلیونها سال بزند. از این رو، هرگاه آلگوریتمی عرضه می‌شود، بلافاصله این سوال پیش کشیده می‌شود که زمان آن بسجمله است یا نمایی. یک آلگوریتم برنامه ریزی خطی با زمان بسجمله می‌تواند دریچهٔ تازه‌ای را به روی کاربرد برنامه ریزی در مسائلی از قبیل تکنولوژی فضایی و آدمکهای مصنوعی (روبوتها) بگشاید.

کارمارکار اولین کسی نیست که یک آلگوریتم بسجمله‌ای در برنامه ریزی خطی ارائه داده است. در سال ۱۹۷۹، خاچیان[۵]، ریاضیدان شوروی، آلگوریتمی با زمان بسجمله که بر روش بیضوی متکی است ارائه کرد. اما این روش این عیب را دارد که هر مرحلهٔ تکرار باید با افزایش دقت همراه باشد، که این خود به کارگیری آلگوریتم فوق را عملا" غیر ممکن می‌سازد. در واقع، روش خاچیان تنها از لحاظ نظری بسجمله‌ای است. برای درک بهتر این

مطلب باید روش خاچیان را با روش سیمپلکس مقایسه کرد. همان طورکه پیش از این گفتیم، روش سیمپلکس نمایی است، اما ویژگی نمایی بودن آن تنها به ازای مسائلی با اندازهٔ بزرگ ظاهر می‌شود، و این آلگوریتم روی مسائلی که درعمل پیش می‌آیند و اندازهٔ کوچک یا متوسط دارند کارامد است. آلگوریتم خاچیان، برعکس تنها روی مسائلی با اندازهٔ خیلی بزرگ خوب عمل می‌کند، یعنی بسجمله بودن آن آشکار می‌شود، ولی روی مسائل معمولی حتی از آلگوریتم سیمپلکس کندتر است. با این حال، معرفی آلگوریتم خاچیان در ۱۹۷۹ هیجان زیادی برانگیخت، حتی موضوع به مطبوعات همگانی نیز کشیده شد. زیرا، این آلگوریتم مساله‌ای حل نشده را پاسخ می‌دهد، و آن اینکه برنامه ریزی خطی علی‌الاصول آلگوریتمی بسجمله‌ای دارد. مزیت آلگوریتم کارمارکار در این است که مزایای روشهای پیشین را درخود جمع کرده است. این آلگوریتم از لحاظ نظری بسجمله‌ای است، ودرعمل نیز چنان می‌کند که از یک آلگوریتم با زمان بسجمله انتظار می‌رود.

الگوریتم کارمارکار ومقایسهٔ آن با سایر آلگوریتمهای موجود یکی از مباحث اصلی دردوازدهمین سمپوزیم برنامه ریزی ریاضی که دراوت ۱۹۸۵ دردانشگاه MIT برگزار شد، بود. او طی یک سخنرانی نتایج آلگوریتم خود را روی برخی از مسائل نمونه که دردانشگاه استانفورد با سیستم VAX۱۱/۷۸۰ حل شده نشان داد و آن را با نتایج به دست آمده در روش سیمپلکس، که با نام MINOS درآن دانشگاه تهیه شده است، مقایسه کرد.

نتایج به دست آمده روی ۱۰ مساله از ۱۱ مساله نمونه حیرت آور بود. تعداد کمتر تکرارها و احتیاج به زمان CPU ی کمتر امتیازات برجستهٔ روش

فوق نسبت به سمپلکس است . ولی با کاهش ابعاد مساله تفاوت کاهش می‌یابد .جدول زیر نتایج را روی سه مساله نمونه در دو روش فوق نشان می‌دهد :

| | زمان K، CPU ثانیه | دفعات تکرار K | زمان M،CPU ثانیه | دفعات تکرار M | تعداد ستون | تعداد سطر |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مساله Little | ۶/۶ | ۲۲ | ۱۷/۱ | ۹۸ | ۹۷ | ۵۷ |
| مساله E-۲۲۶ | ۲۳/۸ | ۲۲ | ۱۶۲ | ۴۷۱ | ۲۸۲ | ۲۲۶ |
| مساله Band M | ۲۹ | ۲۱ | ۲۲۴ | ۵۳۴ | ۴۷۲ | ۳۰۶ |

(جدول مقایسهٔ روش کارمارکار (K) وروش سیمپلکس MINOS (M)

خانم مارگریت رایت [۷] ازگروه تحقیق دانشگاه استانفورد روش کارمارکار را حالت ویژه‌ای از روش باریر [۸] می‌دانند ،روشی که برای بهیابی با شرایط معین که عمدتا "در سه دههٔ اخیر روی آن کار شده است ،می‌دانند .او مدعی است که هرگاه روش باریر را روی مسائل نمونهٔ فوق به کار بریم ،تعداد دفعات تکرار مشابه دفعات تکرار در روش کارمارکار (با ضریب ۲) است از لحاظ سرعت ،روش باریر در برخی از موارد مشابه روش سیمپلکس و در برخی دیگر کندتر و روی برخی دیگر حتی دو برابر سریعتر از آن خواهد بود .

برای اینکه قدری بیشتر به تفاوت روش کارمارکار و سیمپلکس پی ببریم از مفاهیم هندسی کمک می‌گیریم .جوابهای ممکن برای یک مساله

برنامه‌ریزی خطی تشکیل یک چندوجهی را درفضای چندبعدی می‌دهندکه می‌توان آن را به‌صورت یک چندوجهی نامنتظم گنبدی شکل تصورکرد. هر راس نشان دهنده‌ٔ یک جواب برای مساله است که یکی از آنها جواب بهینه است. ووظیفه‌ٔ آلگوریتم یافتن این راس است.

آلگوریتم سیمپلکس رئوس چندوجهی فوق را به روشی سیستماتیک طی می‌نماید و در هر مرحله بر اساس ساختار ریاضی خود تعدادی از رئوس را از فهرست رئوسی که باید طی شوند حذف می‌کند. آلگوریتم خاچیان همه سیستم را در مجموعه‌ای از سیمیها محصور می‌کند که در نهایت جواب بهینه را در بر می‌گیرند.

آلگوریتم کارمارکار از داخل سیستم شروع می‌کند و، با استفاده از مفاهیم هندسه‌ٔ تصویری، سیستم را چنان تبدیل می‌کند که یک نقطه‌ٔ انتخاب شده داخلی، در مرکز سیستم قرار گیرد. آنگاه نقطه‌ٔ بعدی را در جهتی انتخاب می‌کند که تابع هدف را بیشتر مینیمم (یا ماکزیمم) کند. آنگاه تبدیل دیگری به کار می‌برد تا این نقطه در مرکز سیستم قرار گیرد و این فرآیند را ادامه می‌دهد. این تبدیل سیستم، کلید اصلی آلگوریتم است. شروع از نقطه‌ٔ داخلی سیستم سابقه طولانی دارد، کما اینکه روش باریر نیز از یک نقطه داخلی شروع می‌کند. ولی به دلیل عدم به‌کارگیری تبدیل فوق، که قدمی اساسی است، همگی ناموفق بوده‌اند.

طبیعی است که یافتن جواب بهینه از میان بیش از دهها هزار جواب ممکن، به روشی تکراری نیاز مند است که در هر مرحله جهت حرکت را به سوی جواب بهینه مشخص می‌کند. بنا به ادعای کارماکار، اگر روش سیمپلکس به n تکرار نیاز داشته باشد، روش او به In n تکرار نیاز دارد، به عبارتی تنها

۲۰ تکرار در آلگوریتم وی درمقابل یک میلیون تکرار در روش سیمپلکس!
البته کلیه مسائلی که تاکنون با الگوریتم کارمارکار حل شده اند، درکمتر از ۳۰ تکرار به جواب رسیده اند.

ایده آلگوریتم کارمارکار را شاید بتوان بدین ترتیب تشریح کرد:

فرض کنیم مساله به صورت زیر باشد:

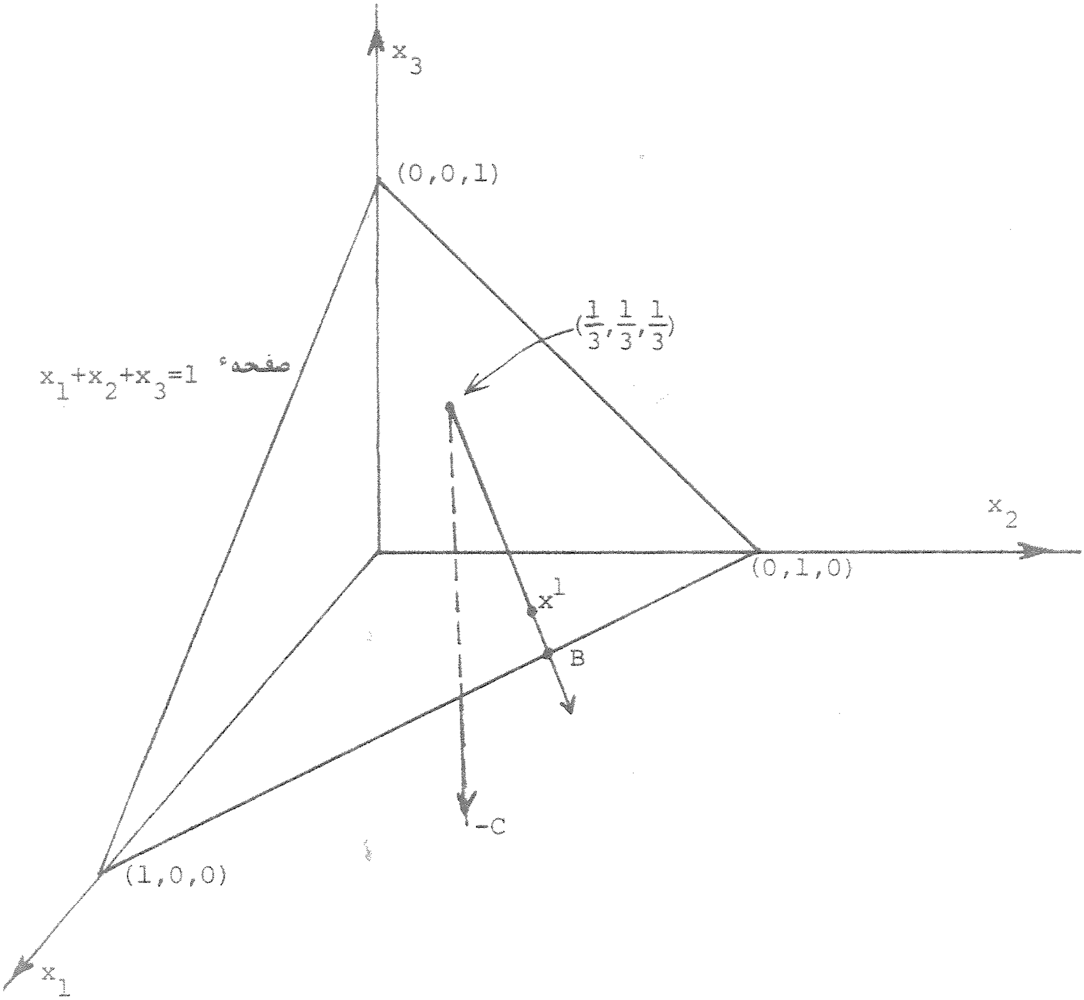
$$\min \ C^T x$$

$$\text{Sub} \quad Ax = b \qquad x \geq 0$$

یعنی یافتن مقدار مینیموم تابع هدف $C^T x$ با شرایط $Ax = b$. انتظار می‌رود که بردار بهینه دارای $n-m$ مولفه $x_j$ برابر صفر باشد و بقیه $m$ مولفه آن درشرایط $Ax = b$ صدق کنند. درهرمرحله از روش سیمپلکس، درحالی که تابع $C^T x$ را مینیموم می‌کنیم، یک مولفه که مقدارش صفر است تغییر می‌دهیم و برعکس سایر مولفه‌ها تغییر می‌کنند. دراین روش روی اضلاع $Ax = b$ $x \geq 0$، به جستجوی جهت صحیح حرکت برای صفرکردن مولفه‌ها می‌پردازیم.

در روش کارمارکار درداخل حرکت می‌کنیم وتنها هنگامی که به مقدار بهینه $x$ رسیده باشیم، به گوشه می‌رویم. برای آنکه مطلب ساده شود به مثال عددی زیر توجه کنید.

فرض کنیم $C^T =$ [۵ ,۴ ,۸] و $A =$ [۱ ,۱ ,۱] و $b =$ [۱]. مجموعه $Ax=b$ , $x > 0$ مثلث شکل یک است.




شکل یک

جواب بهینه راس $(0,1,0)$ است که به ازای آن $c^Tx = ۴$ ،درصورتی که درسایررئوس تابع هدف مقادیر۵ و ۸ راخواهدداشت .

هرگاه ازنقطهٔ $(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$ شروع‌کنیم و $-c$ راروی فضای پوچ $A$ تصویر کنیم ،دراین صورت هرتغییر $\Delta x$ درآن جهت روی سطح $Ax=b$ قرارخواهد داشت ،زیرا $A\Delta x=0$ ،به این ترتیب مقدار تابع‌هدف $c^Tx$ رامی‌توان سریعاً "کاهش داد .این قدم‌درنزدیکی یکی ازاضلاع ولی نه‌روی آن خاتمه می‌پذیرد .تصویر

$$P = I-A^T(AA^T)^{-1}A$$

رادرجبرخطی دیده‌ایم ،درعمل ابتدابردار $y$ راازمعادلهٔ

$$(1) \quad AA^Ty = Ac$$

می‌یابیم ،وسپس خواهیم‌داشت :

$$(2) \quad P(-c)= A^Ty-c.$$

توجه کنیدکه $AP(-c)=0$. درمثال فوق داریم :

$$۳y= ۱۷$$

$$P(-c) = (\frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۳}, \frac{-۷}{۳})$$

که اگردر $\frac{۱}{۷}$ ضرب شوددراین مرحله به‌نقطهٔ $B$ روی ضلع مثلث خواهیم رسیدواگرضریب ۰/۹۸ رابرای آن درنظربگیریم به‌نقطهٔ

$$x^1= \frac{۱}{۳}\ (۱/۲۸ \quad ۱/۷ \quad ۰/۰۲)$$

خواهیم‌رسید .

سوال اصلی این است که اکنون درکدام جهت باید حرکت کرد، زیرا حرکت درجهت قبلی بی فایده است. به این ترتیب گامهای دوم (و n م) مطرح می‌شوند. ایدهٔ اصلی این است که با تغییر متغیر نقطهٔ $x^1$ را مجدداً "درمرکز ثقل $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$" قرار دهیم. دراین صورت C ی جدید روی فضای پوچ A ی جدید تصویر می‌شود. گرچه روش کارمارکار غیرخطی است، ولی ایدهٔ اصلی مقیاس گذاری جدید است. کافی است مولفه‌های $x^1$ را به ترتیب به ۱/۲۸ و ۱/۷ و ۰/۰۲ تقسیم کنیم، به این ترتیب، هربردار x تبدیل می‌شود به

$$X = D^{-1} x$$

که $D = diag(۱/۲۸ ، ۱/۷ ، ۰/۰۲)$ دراین حالت $x \geq 0$ وهمچنین اثر آن روی تابع هدف وشرایط بدین صورت است که

تابع هدف $C^T DD^{-1} x$ تبدیل می‌شود به $C^T DX$،

وشرط $ADD^{-1} x = b$ تبدیل می‌شود به $ADX = b$.

بنابراین AD جانشین A و DC (درحقیقت $D^T C$ ولی چون D قطری است) جانشین C خواهند شد. ماتریس وزنی $W = D^2$ رابطه‌های (۱) و (۲) را تبدیل می‌کند به

$$(3) \quad AD^2 A^T y = AD^2 C ,$$

و

$$(4) \quad -Z = D^2 (A^T y - c) .$$

اکنون تمام آلگوریتم را دراختیار داریم، به غیراز اینکه ازچه نقطه‌ای باید شروع کرد و به کجا خاتمه داد. حدس فعلی با تغییر متغیر و مقیاس گذاری جدید به

$e=(1,1,\dots 1)$ تبدیل شود. (بهتر است از $\frac{1}{2}$ صرف نظر کنیم وفرض کنیم $Ae=b$ )، آنگاه $\Delta x$ ضریبی است از $-z$. الگوریتم مقیاس گذاری عبارت است از:

۱) تکشیل ماتریس D از روی $x^k$,

۲) به کارگیری تصویر (۳) و (۴).

۳) ساختن $x^{k+1}=x^k-\alpha z$ نزدیک مرز.

کار اصلی درگام (۲) است، ومشگلتر از گامهای مشابه در روش سیمپلکس است، ولی می‌توان آن را به کمک روش حذفی ویا روش متعامدسازی QR از ماتریس $DA^T$ ساده کرد. قابل توجه اینکه متغیر y که درحین محاسبات وارد شده است، درحقیقت متغیر همزاد است ومشخص کنندهٔ زمانی است که باید به گوشه رفت وبرای جواب بهینه آزمایش کرد.

لازم به تذکر است که روش کارمارکار یک روش غیرخطی است ومثال بالا تنها جهت طرح ایده ارائه شده است.

البته یک اختلاف نظرکلی درمورد اینکه بالاخره کدامیک از روشهای سیمپلکس، باریر، وکارمارکار موثرترهستند دربین پژوهشگرانی که دراین زمینه کار می‌کنند وجوددارد. ولی به گفته خود کارمارکار، چون این الگوریتمها هریک روی نوع خاصی از مسائل موثرترند، مقایسهٔ آنها صحیح نیست. این امتیاز که با الگوریتم وی می‌توان یک مسئله را با زمان CPU کمتری نسبت به سایر الگوریتمها حل کرد. درمقابل این امرکه بعضی از مسائل واقعی وجوددارند (مسائلی که شاید درحدود یک میلیون متغیر داشته باشند ونتوان آنها را حتی با ۲۴ ساعت زمان CPU حل کرد.) که عمداً حل آن با

روشهای پیشین غیرممکن است ،ولی آلگوریتم‌وی دریک زمان معقـــــــول آن راحل می‌کندناچیزاست .

## مـــــــراجع :


1) Strang, Gilbert. Karmarkar's Algorithm is a Nutshell, *SIAM News*, Vol.18,6, 1985.

2) Koslov, Alex. The Karmarkar Algorithm: Is It for Real? *SIAM News*, Vol.18, 6,1985.

3) New Algorithm Stirs Interest, *SIAM News*, Vol 18, 1, 1985.


## توضیحــــــــات

(1) Narendra Karmarkar

(2) Simplex

(3) George Dantzig

(4) Bell Lab

(5) K.G.Rama Krishnan

(6) L.J.Khachian

(7) Margaret Wright

(8) Barier