پیک ریاضی

جلد دوم، شمارهٔ سوم پائیز ۱۳۶۶

عمل یک گروه بر یک مجموعه

نوشتهٔ : رضا کرمی

۱. مقدمه

مفهوم عمل یک گروه بر یک مجموعه از اساسی‌ترین و مفیدترین ایده‌های نظریهٔ گروههاست. این مفهوم در عین سادگی، دامنهٔ کاربرد وسیعی دارد و بویژه زمانی که به حالت عمل گروههای متناهی بر مجموعه‌های متناهی محدود شود، می‌توان ابزاری نیرومند برای حل مسائل شمارشی فراهم آورد. چنانکه خواهیم دید، پاره‌ای از نتایج مقدماتی این مفهوم را می‌توان برای اثبات برخی قضایای اساسی نظریهٔ اعداد هم به کار بست.

علی‌رغم سادگی، قدرت و انگیزه‌بخش بودن این مفهوم، در بیشتر کتابهای درسی جبر مجرد، و به تبع آن در درسهای مقدماتی جبر، چندان توجهی به این مطلب نشده و نمی‌شود. این نوشتار تا اندازه‌ای برای احقاق این حق تضییع شده فراهم آمده است. هدف آن، در درجهٔ اول آشنا کردن دانشجویان با پاره‌ای از مقدمات این مبحث و در درجهٔ دوم متوجه کردن مدرسان به توانائیها و امتیازات طرح آن در دروس مقدماتی جبر است.

در قسمت بعد، بعضی تعریفها و نتایج مقدماتی را خواهیم آورد. فهم و جذب این تعاریف و نتایج از عهدهٔ هر دانشجوی آشنا با تعریف "گروه"

پیک ریاضی

جلد دوم، شماره‌ٔ سوم پائیز ۱۳۶۶

عمل یک گروه بر یک مجموعه

نوشته‌ٔ: رضا کرمی

۱. مقدمه

مفهوم عمل یک گروه بر یک مجموعه از اساسی‌ترین و مفیدترین ایده‌های نظریهٔ گروههاست. این مفهوم در عین سادگی، دامنهٔ کاربرد وسیعی دارد و بویژه زمانی که به حالت عمل گروههای متناهی بر مجموعه‌های متناهی محدود شود، می‌توان ابزاری نیرومند برای حل مسائل شمارشی فراهم آورد. چنانکه خواهیم دید، پاره‌ای از نتایج مقدماتی این مفهوم را می‌توان برای اثبات برخی قضایای اساسی نظریه‌ٔ اعداد هم به کار بست.

علی‌رغم سادگی، قدرت و انگیزه بخش بودن این مفهوم، در بیشتر کتابهای درسی جبر مجرد، و به تبع آن در درسهای مقدماتی جبر، چندان توجهی به این مطلب نشده و نمی شود. این نوشتار تا اندازه‌ای برای احقاق این حق تضییع شده فراهم آمده است. هدف آن، در درجه اول آشنا کردن دانشجویان با پاره‌ای از مقدمات این مبحث و در درجهٔ دوم متوجه کردن مدرسان به توانائیها و امتیازات طرح آن در دروس مقدماتی جبر است.

در قسمت بعد، بعضی تعریفها و نتایج مقدماتی را خواهیم آورد. فهم وجذب این تعاریف و نتایج از عهده هر دانشجوی آشنا با تعریف "گروه"

برمی‌آید. در قسمت سوم خواهیم کوشید از طریق مثالها، از یک سو انگیزه‌های طرح این مفهوم و از سوی دیگر گوشه‌ای از کاراییهای آن را نشان دهیم. همچنین دو قضیهٔ کلاسیک نظریه اعداد، قضیه کوچک فرما و قضیه ویلسون، به یاری نتایج مقدماتی مترتب بر این مفهوم اثبات خواهند شد. قسمت چهارم یکسره به توصیف روش شمارشی پولیا اختصاص دارد. بعضی جنبه‌های "عمیقتر" بحث در قسمت پنجم به اجمال طرح خواهند شد. و سرانجام در بخش ششم یک نتیجهٔ ساده اما جالب درباره‌ٔ رابطهٔ بین عمل گروهها و روابط هم‌ارزی بیان خواهد شد.

همانگونه که گفته شد، خواندن این نوشته به هیچ پیشنیازپیشرفته‌ای نیاز ندارد. چون هدف آن تنها فراهم آوردن یک آشنایی مقدماتی است، و نیز به دلایل آموزشی، بسیاری گزاره‌های بدیهی یا سرراست اثبات نشده بیان شده‌اند. دانشجوی علاقه‌مند می‌تواند همهٔ آنها را به عنوان تمرین محسوب کند. در پایان هر قسمت مراجعی ذکر شده است که خواننده می‌تواند در آنجا، اجمالها را به تفصیل دنبال کند.

۲. تعریفها و نتایج مقدماتی

فرض کنیم G یک گروه و S مجموعه دلخواهی باشد. گوییم G بر S **عمل** می‌کند، هرگاه نگاشتی چون μ از $G\times S$ در S وجود داشته باشد چنانکه

الف) به ازای هر g_1 و g_2 در G و هر x در S

$$\mu(g_1,\mu(g_2,x))=\mu(g_1g_2,x)$$

ب) به ازای هر x در S؛

$$\mu(e,x)=x$$

که‌درآن e عضوخنثای گروه G است .

دراین صورت μ رایک عمل G بر S می‌نامیم .ازاین پس ،اگربیم‌ابهامی نباشد ،به‌جای $\mu(g,x)$ خواهیم‌نوشت $g(x)$.

اگر G بر S عمل کند ،می‌توان روی S رابطه‌هم‌ارزی زیررا تعریف کرد :

$x \sim x'$ اگروتنها اگرعضوی‌مانند g در G باشدکه $g(x)=x'$.

هرردهٔ هم‌ارزی S نسبت به‌این رابطه‌رایک **مدار** S (تحت عمل G)گوییم .
پس‌عمل G مجموعهٔ S رابه‌مدارهای مجزاافرازمی‌کند .مدارعنصر x رابا $Orb(x)$ نشان می‌دهیم .

همچنین بسادگی می‌توان تحقیق کردکه‌به‌ازای هر x در S مجموعه زیریک زیرگروه G است :

$$Stab(x)=\{g \in G \mid g(x)=x\}$$

این زیرگروه‌رازیرگروه **پایدارساز** x در G می‌نامیم .

قضیه . اگرگروه‌متناهی G برمجموعه S عمل کند ،آنگاه‌به‌ازای هر x در S ،

$$|Orb(x)|=[G:Stab(x)] = |G|/|Stab(x)|$$

که‌درآن منظوراز $[G:Stab(x)]$ شاخص زیرگروه $Stab(x)$ در G است .
اثبات . تابع ψ راازمجموعهٔ تمام‌هم‌مجموعه‌های چپ $Stab(x)$ در $Orb(x)$ چنین تعریف می‌کنیم :

$$g\colon Stab(x) \xrightarrow{\psi} g(x)$$

روشن است که $g_1 Stab(x)= g_2 Stab(x)$ اگروتنها اگر

$g_2^{-1}g_1\ Stab(x)=Stab(x)$ اگروتنها اگر

$g_2^{-1}g_1 \varepsilon\ Stab(x)$ اگروتنها اگر

$g_2^{-1}g_1(x)=x$ اگروتنها اگر $(x)=g_2(x)$.

پس تابع ψ خوش تعریف ،یک به یک وپوشا ست .

نتیجه . اگر $Orb(x_1),\ldots,Orb(x_n)$ همهٔ مدارهای مجزای S تحت عمل گروه متناهی G باشند ،آنگاه

$$|G|=\sum_{i=1}^{n}\frac{|G|}{|Stab(x_i)|}$$

این رابطه را یک **معادلهٔ کلاسی** گروه G می‌نامند .

لم . اگر $|G|=p^n$ ،که در آن p عددی است اول ،و G برمجموعهٔ متناهی S عمل کند وقرار دهیم :

$$S_0=\{x\varepsilon S \mid \forall g\varepsilon G \qquad g(x)=x\}\ ,$$

دراین صورت

$$|S|\equiv|S_0| \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

اثبات . واضح است که $Orb(x)=\{x\}$ اگروتنها اگر $x\varepsilon S_0$.

پس

$$S=S_0\cup Orb(x_1)\cup\ldots\cup Orb(x_n)$$

که در آن $x_i\notin S_0$ و $Orb(x_i)$ ها همهٔ مدارهای مجزای S هستندکه بیش از یک عضودارند .درنتیجه ؛

$$|S|=|S_0|+|Orb(x_1)|+\dots+|Orb(x_n)|$$

اما به ازای هر i $|Orb(x_i)|>1$ پس $p \mid \frac{|G|}{|Stab(x_i)|}=|Orb(x_i)|$

درنتیجه ؛

$$|S| \equiv |S_0| \pmod p.$$

۰.۳ امثله و کاربردها

فرض کنیم S مجموعه‌ای دلخواه و $Sym(S)$ گروه همهٔ جایگشتهای S باشد. دراین صورت $Sym(S)$ به طور طبیعی بر S چنین عمل می‌کند:

$$(\sigma,x) \xmapsto{\mu} \sigma(x)$$

این شاید طبیعی ترین مثالی باشد که می‌توان برای عمل گروه بر مجموعه آورد، زیرا همان طور که می‌توان با اندکی تعمق دریافت، خود این مفهوم تعمیمی است از مفهوم گروه جایگشتهای یک مجموعه در حالتی که $S=\{1,2,\dots,n\}$، و در این صورت گروه $Sym(S)$ همان S_n یا گروه متقارن بر n شیٔ خواهد بود. و در این حالت مدارهای S تحت عمل S_n، همان مدارهای معمولی خواهد بود که در مبحث جایگشتها مطرح می‌شود.

حالت جالبی از عمل یک گروه بر یک مجموعه زمانی پیش می‌آید که یک گروه بر خودش عمل کند. اولاً" هر گروه می‌تواند با **انتقال** از چپ (یا راست) بر خود عمل کند به صورت زیر:

$$g(h)=gh \quad (\text{یا } h_g)$$

اما جالب تر از آن زمانی است که یک گروه با **تزویج** بر خود عمل کند:

$$g(h)=ghg^{-1}$$

دراین حالت مدارهای G رارده‌های **ترویجی**ودوعضودریک مدار رانسبت به‌هم مزدوج‌می‌نامند. به‌ازای هر x در G، زیرگروه Stab(x) همان **بهنجارساز** x در G است که‌چنین تعریف می‌شود: $N(x)=\{g\varepsilon G \mid gx=xg\}$

کاربردمطالبی که‌ذکرکردیم، دراین حالت خاص به‌نتایج پرثمری می‌انجامد. تقریباً "برای همهٔ‌قضایای مربوط به‌ساختارگروههای متناهی، یعنی قضایای سیلو، می‌توان به‌یاری آن اثباتهای کوتاه‌وساده‌ای ارائه کرد. رهیافت هنگرفورد [5] براین پایه‌استوار است. خواننده‌درآنجا می‌تواندهمچنین اثبات کوتاه‌وزیبای مک کی برای قضیه‌کوشی را، که درآن ازلمی که‌ذکرکردیم‌استفاده می‌شود، ببینند.

حال به‌عنوان کاربردهای دیگر، به‌اثبات قضایای فرما وویلسون می‌پردازیم.

قضیه (فرما) فرض‌کنیم p عدداولی باشد. دراین صورت به‌ازای هرعدد صحیح a داریم. $a^p \equiv a \pmod{p}$.

اثبات. فرض‌کنیم $1\leqslant a$. قراردهیم:

$$S=\{(x_1,x_2,\ldots,x_p) \mid 1\leqslant x_i\leqslant a\}$$

وفرض‌کنیم Z_p، گروه‌جمعی اعدادصحیح به‌پیمانهٔ p، برS چنین عمل کند:

$$i(x_1,x_2,\ldots,x_p)=(x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+p}).$$

که‌درآن جمع اندیسها به‌پیمانهٔ p انجام‌می‌شود. واضح است که‌این عمل عملی است خوش تعریف وداریم؛

$$S_0=\{(x,x,\dots,x)\mid 1\leqslant x\leqslant a\}$$

پس $|S_0|=a$ ، ودر نتیجه چون $|S|\equiv|S_0| \pmod p$ خواهیم داشت :

$$a^p\equiv a \pmod p$$

قضیهٔ (ویلسون). اگر p عددی اول باشد ، آنگاه

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

اثبات. فرض کنیم Z_p بر $S=S_{p-1}$ گروه متقارن بر p-1 شئ چنین عمل کند :

$$i(\sigma)=\begin{cases}\sigma & \text{اگر } \sigma\in\langle\sigma_0\rangle\\ \sigma\sigma_0 & \text{اگر } \sigma\notin\langle\sigma_0\rangle\end{cases}$$

که در آن $\sigma_0=(1,2,\dots,p-1)$ جایگشت چرخه‌ای به طول p-1 و $\langle\sigma_0\rangle$ زیرگروه چرخه‌ای پدیدآمده توسط σ_0 است. برخواننده است که خوش تعریف بودن عمل را تحقیق کند و ببیند که $S_0=\langle\sigma_0\rangle$. پس از آنجا که $|S|\equiv|S_0| \pmod p$ نتیجه می‌شود $(p-1)!\equiv p-1 \pmod p$ و یا $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

۴. روش شمارشی پولیا

اینک به یکی از کاربردهای توانمند عمل گروهها می‌رسیم که از اساسی‌ترین روشهای شمارشی در ریاضیات ترکیبی است. همانگونه که می‌دانید ، مساله اصلی در این شاخه از ریاضیات ، یا حداقل یکی از مسائل اساسی آن ،

شمردن اشیاء یا حالتهاست. امادربسیاری ازوضعیتها برمجموعه این اشیاء یا حالتها رابطهٔ هم‌ارزی خاصی تعریف شده است، ومنظورشمردن درردههای هم‌ارزی متمایز، یادرواقع شمردن تعداداشیاء یا حالتهای ناهم‌ارزاست. مثلاً "همهٔ مدارهایی که می‌توان با چندکلیدساخت، ازحیث کارکردمتمایز نیستند. یا همه رنگ آمیزیهای ممکن یک گراف، گرافهای رنگین متمایز به‌دست نمی‌دهند. درچنین حالاتی می‌توان ازروش شمارشی پولیا استفاده‌کرد که دراساس برنتیجه زیراستوار است.

لم بِرنساید. فرض کنیم گروه متناهی G برمجموعه متناهی S عمل کند، وبه‌ازای هر g در G، با $x(g)$ تعداداعضایی از S رانشان دهیم که تحت g ثابت می‌مانند. دراین صورت

$$\text{تعدادمدارهای } S \text{ تحت عمل } G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} x(g).$$

اثبات. قرارمی‌دهیم $A=\{(g,x)\in G\times S \mid g(x)=x\}$ واعضای A رابه‌دوطریق می‌شماریم. نخست، به‌ازای هر g ثابت در G، دقیقاً $x(g)$ عضودر S یافت می‌شوندکه $(g,x)\in A$. پس $|A| =\sum_{g\in G} x(g)$ ازسوی دیگربه‌ازای هر x ثابت در S، دقیقاً $|Stab(x)|$ عضودر G وجود داردکه $(g,x)\in A$. اما اگر x و y هردودریک مدارباشند، آنگاه $Stab(x)=Stab(y)$. پس اگر $Orb(x_1),\dots,Orb(x_n)$ همهٔ مدارهای مجزای S باشند، آنگاه

$$|A| =\sum_{x\in S} |Stab(x)| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in Orb(x_i)} |Stab(x)| = \sum_{i=1}^{n} |Orb(x_i)|\,|Stab(x_i)|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |G|=n|G|$$

پس

$$n|G|=\sum_{g\in G} x(g)$$

ویا

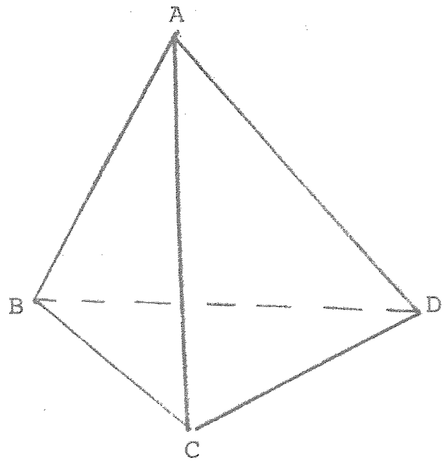
$$n=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x(g)$$

که‌درآن n تعدادمدارهای متمایز S تحت G است .

به‌عنوان کاربردی ساده ،مساله‌شمارشی زیررادرنظرمی‌گیریم .

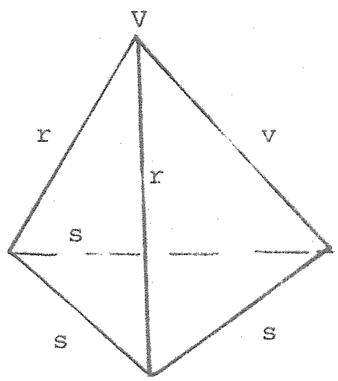
مساله . فرض کنیم می‌خواهیم یالهای یک چهاروجهی را با سه رنگ آبی،سبز وقرمز رنگ آمیزی کنیم .با درنظرگرفتن دورانهای چهاروجهی،چندطریق واقعاً "متمایزبرای این رنگ آمیزی امکانپذیراست ؟

حل. فرض کنیم که راسهای چهاروجهی را مطابق شکل زیرنامگذاری کرده باشیم .دردرجه اول توجه می‌کنیم که هریک از ۶ یال چهاروجهی را می‌توان به سه رنگ مختلف رنگ آمیزی کرد ،پس مجموعاً " $۳^۶=۷۲۹$ طریق برای رنگ آمیزی یالها امکانپذیراست .گروه‌دورانهای چهاروجهی برمجموعه این ۷۲۹ چهاروجهی رنگ آمیزی شده ،یعنی ،به‌طورطبیعی‌عمل‌می‌کند .



هدف یافتن تعداد مدارهای متمایز S تحت این عمل است. گروه دورانهای چهاروجهی، که آن را G می‌نامیم، دوازده عضو دارد. به قرار زیر: عضو همانی I وجابگشتهای (ABC) ، (ACB) ، (ABD) ، (ADB) ، (ACD)، (ADC)، (BCD)، (BDC) (AB) (CD) ، (AC) (BD) و (AD) (BC) . یعنی یک عضو از مرتبهٔ یک ، ۸ عضو از مرتبهٔ ۳ که هرکدام یک راس را ثابت نگه می‌دارند ، و ۳ عضو از مرتبهٔ ۲ که هیچ راسی را ثابت نگه نمی‌دارند. حال باید به ازای هر g در G ، x(g) را محاسبه کنیم.

اولاً" $x(I)=3^6$ زیرا عضو همانی همه عناصر S را ثابت نگه می‌دارد. ثانیاً" اگر g عضوی از مرتبهٔ ۳ باشد، یعنی دورانی 120° حول محوری که از یک راس V و مرکز مثلث مقابل به آن راس بگذرد، آنگاه g تنها اعضایی به شکل زیر را ثابت نگاه می‌دارد،

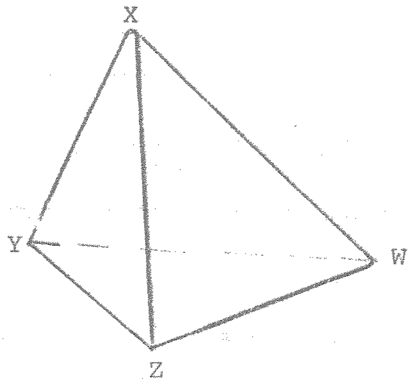


که در آن r و s می‌توانند هریک از سه رنگ مختلف باشند. پس

$$x(g)=3^2$$

حال فرض کنیم h عضوی از مرتبهٔ ۲ باشد، پس می‌توان فرض کرد (ZW) (XY) =h . در این صورت در شکل زیر، سه انتخاب مختلف برای یالهای ZW,XY داریم. چون تحت h، یال XZ به YW تبدیل می‌شود و بالعکس، پس برای یال XZ سه

انتخاب مختلف داریم. اما پس از انتخاب رنگ XZ، رنگ YW نیز باید همان انتخاب شود. به همین



ترتیب درمورد XW و YZ. پس درمجموع داریم

$$x(h)=3^4$$

حال بنا به لم برنساید،

$$\text{تعداد مدارها} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\varepsilon G} x(g) = \frac{1}{12}\ (x(I)+8x(g)+3x(h))$$

$$= \frac{1}{12}\ (3^6+8\times3^2+3\times3^4)$$

$$= 87$$

به یقین همین مثال ساده کافی است تا خواننده را با قدرت این روش شمارشی که برمبنای مفهوم عمل گروههای متناهی برمجموعه‌های متناهی بنا شده است، آشنا کند. مثالهای بسیار زیبا ددیگری را نیزمی‌توان به عنوان کاربردهای این روش بیان کرد. نخستین بار پولیا این روش رابرای شمردن تعدادترکیبات شیمیایی مختلفی که می‌توان با بنیانهای خاصی ساخت، به کاربرد. شرحی از این کار را می‌توان درکتاب گیلبرت [3] یافت.

در این کتاب همچنین روش پولیا برای شمردن تعداد مدارهای الکتریکی متمایزی که می‌توان با n کلید ساخت، تعداد کلیدهای دوار متمایز با n پایانه، و تعداد رنگ آمیزیهای متمایز مکعب و دوازده وجهی به کار رفته است. هاراری [4] بسیاری از مسائل رنگ آمیزی گرافها را با این روش حل می‌کند. کاربردهای دیگری از این روش در مسائل ترکیبی را می‌توان در کتاب لیو [6] یافت. خواننده خود نیز می‌تواند مثالهای طبیعی بسیاری را طرح و حل کند.

یکی از مراحل اساسی در این روش، تعیین $x(g)$ هاست. در مثالی که ما ذکر کردیم، و مثالهای مقدماتی دیگر، به خاطر کوچکی مساله می‌توان این اعداد را با ملاحظات ساده‌ای مشخص کرد. اما در حالت کلی محاسبه آنها ممکن است دشوار باشد. پولیا روشی برای محاسبه این اعداد یافته است که به روش **بسجمله‌های شاخص چرخه‌ای** معروف است. مقالهٔ دوبروین [2] شرح مفصل و عمیقی از این روش به دست می‌دهد.

سرانجام باید مقاله خواندنی شاپیرو [8] را ذکر کرد، که به تفصیل مفهوم عمل گروهها و کاربردهای مختلف آن را از طریق تمرینهایی جالب می‌شکافد. خواندن این مقاله، بویژه به دانشجویان علاقه‌مند قویاً "توصیه می‌شود.

تمرین . روشی را که در حل مسالهٔ بالا به کار بردیم، در حالتی که به جای سه رنگ، n رنگ مختلف داشته باشیم به کار ببرید و نتیجه بگیرید که همواره $\frac{1}{12}(n^6+3n^4+8n^2)$ عددی صحیح است، و یا به عبارت دیگر $12|n^6+3n^4+8n^2$. به این طریق نیز می‌توان بعضی از قضایای همنهشتی در نظریه اعداد را اثبات کرد. موزر و نیوبورن [7] ضمن حل یک

مساله ترکیبی جالب، از این روش برای اثبات قضایای فرما وویلسون استفاده کرده‌اند.

۵. ناورداها وفرمهای متعارف

ایده عمل یک گروه بریک مجموعه از لحاظ دیگری نیز می‌تواند جالب باشد، وآن ازجهت قدرتی است که برای وحدت بخشی به برخی مفاهیم به ظاهر نامرتبط وپراکنده در ریاضیات دارد. مثلا" همهٔ ما با فرمهای متعارف درجبر خطی یا زمینه‌های دیگرریاضی آشنا هستیم. جالب است که بدانیم همهٔ این فرمهای متعارف را می‌توان نتیجه عمل گروهها دانست. به شرح زیر:

فرض کنیم S " ساختار ریاضی" دلخواهی باشد (مثلا" یک گروه، یک فضای برداری یا یک فضای توپولوژیک) و G زیرگروهی ازگروه خودریختیهای S باشد. دراین صورت G به طورطبیعی بر S عمل می‌کند. اگر $\mathcal{C}\subseteq S$ مجموعه‌ای ازنماینده‌های مدارهای متمایز S تحت عمل G باشد، هرعضو $\mathcal{C}$ را یک فرم‌متعارف این عمل و $\mathcal{C}$ را یک دسته ازفرمهای متعارف آن می‌نامیم.

تابع $\eta:S\to C$ را یک **ناوردای** S تحت G می‌خوانیم، هرگاه η روی‌هر مدار S ثابت باشد. دسته $\{\eta_i\}$ ازناورداهای S را یک **دسته‌کامل ازناورداهای** S گوییم‌هرگاه ازبرقراری $\eta_i(x)=\eta_i(y)$ به ازای هر i، نتیجه شودکه x و y دریک مدار S قراردارند. یعنی η_i ها به طورکامل مدارهای S را مشخص کنند.

مثلا" به‌برخی ازروابط هم‌ارزی آشنا درماتریسهای مربع وفرمهای متعارف وابسته به آنها نظری می‌افکنیم.

هم‌ارزی سطری. گوییم A هم‌ارزسطری B است اگرماتریس ناتکین P یافت

شود، چنانکه $B=PA$. یا به بیان معادل، اگر B ازعملیات سطری مقدماتی روی A به‌دست آمده باشد. به‌طورطبیعی این رابطه هنگامی پیش می‌آیـــــد که بخواهیم فضای سطری ماتریسها را مطالعه کنیم. دراین حالت، $G=GL_n(K)$ گروه خطی عام از مرتبه n روی میدان K است وبا ضرب ازچپ (انتقال) روی S مجموعه ماتریسهای $n\times n$ با درایه‌های در K عمل می‌کند. یک ناوردای این عمل، رتبه (سطری) ماتریسهاست. اما این ناوردا به‌تنهایی کامل نیســـت، زیرا برابری رتبه‌ها، هم‌ارزی سطری راایجاب نمی‌کند. ماتریسهای پلکانی تحویل یافته، مجموعه‌ای ازفرمهای متعارف تشکیل می‌دهند.

تشابه. گوییم ماتریس A با ماتریس B متشابه است، اگرماتریس ناتکین P یافت شود، چنانکه $B=PAP^{-1}$. این رابطه هنگامی مطرح می‌شودکه بخواهیم نمایشهای ماتریسی مختلف یک عملگرخطی ازیک فضای برداری درخودش را بررسی کنیم. گروه عمل کننده دراین موردهم $GL_n(K)$ است وباتزویج عمل می‌کند. ناورداهای این عمل **رتبه** و **طیف** (مجموعه مقادیرویـــــژه) هستند، که هیچکدام به‌تنهایی کامل نیستند. مسالهٔ یافتن یک مجموعـــــه از فرمهای متعارف برای این رابطه یکی ازمهمترین مسائل جبرخطی است. در حالت $K=C$ می‌دانیم که مساله به بررسی **فرمهای ژردان** می‌انجامد.

همنهشتی. گوییم A با B همنهشت است اگرماتریس ناتکین P یافـــــت شودکه $B=PAP^t$. این رابطه ازمطالعه نمایش فرمهای درجه دوم بـــــــه وسیله ماتریسهای متقارن حاصل می‌شود. تحت عمل $GL_n(R)$ یک فــــــرم متعارف این عمل به‌صورت $y_1^2+y_2^2+\dots+y_q^2-y_{q+1}^2-\dots-y_r^2$ و ناورداهای آن اعداد r و q هستند.

به همین ترتیب می‌توان روابط همارزی ستونی ،همارزی تحت تعامد وهمارزی یکانی راهم ذکرکرد .همان گونه که می‌بینیم همه این روابط به طور کاملا" طبیعی پیش می‌آیند .وتا اندازه‌ای جوهر اساسی بخشهای جبری را روشن می‌کنند .مثال روشنگری ازاین مدعا ،مبحث ساده‌کردن **بسجمله‌های درجه‌دوم** است ،که یقینا" همهٔ ما با آن دردرسهای دبیرستانی برخورد داشته‌ایم

فرض کنیم S مجموعه همه بسجمله‌های درجهٔ دوم (روی میدانی با مشخص مخالف ۲) باشد ،و G گروه همه انتقالهای مستوی به صورت $x \to x+k$ اگر قرار دهیم $y=x+k$ ،آنگاه بسجملهٔ ax^2+bx+c به بسجملهٔ

$$a(y-k)^2+b(y-k)+c=ay^2+(b-2ak)y+(ak^2-bk+c)$$

تبدیل خواهد شد .این بسجمله جملهٔ خطی نخواهد داشت اگروتنها اگر $b-2ak=0$ ویا $k=\frac{b}{2a}$.دراین حالت بسجملهٔ ساده شده به صورت $ay^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ درخواهد آمد .پس هر بسجملهٔ درجه دوم تحت این گروه همارز است با یک وتنها یک بسجمله به صورت ay^2+h .یعنی بسجمله‌های درجه دوم فاقد جملهٔ خطی مجموعه‌ای ازفرمهای متعارف برای این عمل تشکیل می‌دهند .چنانکه می‌دانیم **ضریب جملهٔ اول و مبین** $\Delta=b^2-4ac$ تحت انتقالهای مستوی تغییرنمی‌کنند ودرواقع این دوتشکیل یک مجموعهٔ کامل ازناورداها را می‌دهند .

خواننده می‌تواند بحث گسترده‌تر وعمیقتری ازاین نوع را درکتاب کلاسیک بیرکهف ومک لین [1] ببیند .

۶. عملها وروابط همارزی

دیدیم که هرعمل یک گروه بریک مجموعه ،چون μ ،برآن مجموعه یک رابطهٔ همارزی القاء می‌کند ،که می‌توان آن را با R_μ نشان داد .نکتهٔ

جالب اینکه عکس این مطلب هم صادق است .یعنی هر رابطهٔ هم ارزی بر یک مجموعه ،در واقع از عمل یک گروه بر آن مجموعه ناشی می‌شود .به بیان دقیقتر ؛

قضیه . اگر R رابطه هم ارزی دلخواهی برمجموعهٔ S باشد ،گروهی چون G و عملی از G بر S چون μ وجود دارد چنانکه $R=R_{\mu}$

اثبات . فرض کنیم $\{C_i\}_{i\varepsilon I}$ دستهٔ رده‌های هم ارزی S نسبت به R باشد . قرار می‌دهیم :

$$G=\prod_{i\varepsilon I} Sym(C_i) \quad \text{(ضرب خارجی گروههای } Sym(C_i)\text{)}$$

وعمل زیر را درنظر می‌گیریم ؛

$$\mu(\ (\sigma_i)_{i\varepsilon I}\ ,a)=\sigma_{i_0}(a)$$

که در آن $a\,\varepsilon\, C_{i_0}$. تحقیق این نکته که $R=R_{\mu}$ بسیار ساده است .

هرچند که این قضیه وجودی است ،درعین حال روشی صریح برای ساختن گروه عمل کننده نیز به دست می‌دهد .اما درعمل می‌توان برای هر رابطهٔ مشخص ،گروههای کوچکتر و عملهای طبیعی تری درنظر گرفت .علاوه بر مثالهایی که دیدیم ،برای نمونه می‌توان به مثال زیر توجه کرد :

می‌دانیم که رابطهٔ همنهشتی (به پیمانهٔ n)در اعداد صحیح ،یک رابطهٔ هم ارزی است .این رابطه هم ارزی را می‌توان ناشی از عمل گروه جمعی nZ (مجموعه مضارب صحیح n)بر Z محسوب کرد :

$$\mu(nq,a)=a+nq$$

واضح است که $Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$ یک مجموعه از فرمهای متعارف است و باقیماندهٔ تقسیم بر n ، یک ناوردای این عمل است. به همین ترتیب خواننده خود می‌تواند برای بسیاری از روابط هم‌ارزی آشنایی که می‌شناسد، گروهها و عملهای مناسبی بیابد.

قدردانی. نگارنده توجه خود به موضوع را مدیون راهنمایی آقای دکتر احمد حقانی می‌داند. همچنین آگاهی از مقالهٔ موزر و نیوبورن، به لطف آقای دکتر علی رجالی میسر شد. از هر دو این سروران سپاسگذارم.

مراجع:

1. G. BIRKHOFF and S. MACLANE, *A Survey of Modern Algebra* (3rd ed.), Macmillan, 1965.
2. N.G. DE BRUIJ, "Polya's theory of counting", in *Applied Combinatorial Mathematics*, E.F. Beckenbach(ed.), John Wiley and Sons, 1964.
3. W.J. GILBERT, *Modern Algebra with Applications*, John Wiley and Sons,1976.
4. F. HARARY, *Graph Theory*, Addison-Wesley,1969.
5. T.W. HUNGERFORD, *Algebra*, Springer-Verlag,1980.
6. C.C.LIU, *Introduction to Combinatorial Mathematics*,McGraw-Hill,1968.
7. W.O.J. MOSER and M.NEWBORN, "Placing counters to illustrate Burnside's Lemma", *Math. Magazine*,52(1979), 305-309.
8. L.W. SHAPIRO, "Finite groups acting on sets with applications", *Math.Magazine*, 46(1973) 136-147.