یا نه ــ که وقتی یکی از پادشاهان سعی داشت هندسه را از اقلیدس بیاموزد از دشواری ریاضیات به وی شکایت کرد و اقلیدس گفت " راهی شاهانه به هندسه وجود ندارد". و راه شاهانه وجود ندارد. فیزیکدانها نمی‌توانند به هیچ زبان دیگری صحبت کنند. اگر شما می‌خواهید طبیعت را بیاموزید، طبیعت را احساس کنید، لزوما " بایستی زبانی را که طبیعت به آن زبان سخن می‌گوید درک کنید. طبیعت اطلاعاتش را فقط به یک شکل عرضه می‌کند، و ما آنقدر خودخواه نیستیم که انتظار داشته باشیم به جای آنکه ما به طبیعت توجهی کنیم طبیعت زبانش را عوض کند.

همه استدلالهای روشنفکرانه‌ای که شما می‌توانید به کار ببرید نمی‌تواند بطور واقعی تجربه یک قطعه موسیقی را به گوشهای کر منتقل کند. به همین ترتیب تمام استدلالهای روشنفکرانه در دنیا نمی‌توانند هیچگونه درکی از طبیعت را به "آنهایی که به فرهنگ دیگر تعلق دارند" منتقل کنند. فلاسفه ممکن است سعی کنند طبیعت را به طور کیفی به شما بیاموزند. من نیز در این نوشتار سعی می‌کنم آن را توصیف کنم. ولی مفهوم را نمی‌توان به خواننده منتقل کرد چون چنین چیزی امکان‌پذیر نیست. شاید علت این باشد که افقهای فکری آنها محدود است بدین معنی که برخی تصور می‌کنند که انسان مرکز جهان است.



پیک ریاضی
جلد دوم، شماره‌ٔ دوم، تابستان ۶۶

## اعداد گنگ

نوشته‌ٔ : ریچارد ددکیند
ترجمه‌ٔ : ناهید اشرفی

هنگامی که بر خط راست L نقطه‌ٔ o را به عنوان مبدای مشخص یا نقطه‌ٔ صفر در نظر بگیریم و واحد طول مشخصی برای اندازه‌گیری پاره‌خط ها اختیار کنیم یک تناظر حقیقی برقرار می‌شود که شباهت بین اعداد گویا و نقاط خط راست را به خوبی نشان می‌دهد. با کمک این قرارداد می‌توان به هر عدد گویای a طولی متناظر ساخت که اگر برحسب مثبت یا منفی بودن نقطه‌ٔ a این طول را در سمت راست یا چپ نقطه‌ٔ o علامت بزنیم به نقطه‌ٔ انتهائی p می‌رسیم که می‌توان آن را نقطه‌ٔ متناظر با a محسوب کرد. نقطه‌ٔ گویای صفر به همان نقطه‌ٔ o نظیر می‌شود. به این طریق به هر عدد گویای a در میدان R که شامل همه‌ٔ اعداد گویا است یک و تنها یک نقطه‌ٔ مشخص p در L نظیر می‌شود. به دو عدد a و b به ترتیب دو نقطه‌ٔ p و q را نظیر می‌کنیم و اگر a>b آنگاه p در سمت راست q قرار می‌گیرد.

## پیوستگی خط راست

نکته مهم آن است که در خط راست L بی‌نهایت نقطه وجود دارد که متناظر به هیچ عدد گویائی نیستند. اگر نقطهٔ p متناظر به عدد گویای a باشد. روشن است که طول op متناسب با همان واحد ثابت اندازه‌گیری است که در ساختمانی که قبلاً "ذکر شد به کار رفته است، یعنی یک طول سوم وجود دارد که اندازهٔ مشترک نامیده می‌شود و این دو طول مضرب صحیحی از این طول سوم هستند. اما یونانیان باستان قبلاً" می‌دانستند و شرح داده بودند که طولهایی وجود دارند که متناسب با هیچ واحد طول نیستند. مثلاً" قطر مربعی که هر ضلعش یک واحد طول است. اگر از نقطهٔ o به اندازهٔ چنین طولی بر خط جدا کنیم به نقطه‌ای می‌رسیم که متناظر به هیچ عدد گویائی نیست. از این پس براحتی می‌توان نشان داد که بینهایت طول وجود دارد که متناسب با واحد طول نیستند ممکن است تصدیق کنیم که تعداد نقاط روی خط راست L خیلی بیشتر از نقاط میدان اعداد گویا، R، است.

حال اگر آن گونه که انتظار داریم سعی کنیم همهٔ پدیده‌های یک خط راست را مطابق اصول حساب دنبال کنیم می‌بینیم که میدان اعداد گویا کافی نیست و لازمهٔ قطعی آن این است که R که توسط اعداد گویا ساخته شده است با ایجاد اعداد جدیدی توسعه پیدا کند به گونه‌ای که میدان اعداد همان تمامیت یا آن گونه که یکبار هم گفته‌ایم، همان **پیوستگی** خط راست را به دست آورد.

ملاحظات قبل بسیار آشناست و خیلی ها تکرار آن را زائد خواهند دانست با وجود این من بر این عقیده هستم که این تکرار برای پرداختن به موضوع اصلی کاملاً" لازم است. روشی که معمولاً" اعداد گنگ به وسیلهٔ آن معرفی می‌شوند مستقیماً" بر اساس درک مفهوم اندازه‌گیری است که خودش هیچ جا



دقیقاً "تعریف نشده است و عدد را نتیجهٔ اندازه‌گرفتن چنین طولی توسط یکی دیگر از همان نوع تعریف می‌کنند (۱). به جای این من عقیده دارم که حساب باید توسط خودش توسعه پیدا کند.

چنین مقایسه‌ای با مفاهیم غیرحسابی فوراً "زمینهٔ لازم را برای بسط مفهوم عدد به طریقی کلی فراهم می‌آورد. (اگرچه در حالت معرفی اعداد مختلط دقیقاً "این طور نیست) اما مسلماً "این زمینه برای به کارگیری این علامات بیگانه در حساب که همان علم اعداد است کافی نیست درست همانگونه که اعداد منفی و کسری توسط آفرینش جدیدی ساخته شده‌اند، و قوانین عمل کردن با این اعداد می‌تواند و باید به قوانین عمل کردن با اعداد صحیح مثبت تحویل شوند، بنابراین باید سعی کنیم که اعداد گنگ را فقط به وسیلهٔ اعداد گویا تعریف کنیم. تنها سوالی که می‌ماند این است که چگونه این کار باید صورت گیرد.

مقایسهٔ میدان اعداد گویا، R، با خط راست ما را به تشخیص وجود رخنه‌هایی راهنمایی می‌کند که ناتمامیت یا ناپیوستگی مجموعهٔ پیشین را می‌رسانند در حالی که تمامیت یا عدم وجود رخنه و پیوستگی ویژگی خط راست است. پس چگونه می‌توان این پیوستگی را بوجود آورد؟ همه چیز به پاسخ این سوال برمی‌گردد و فقط از این طریق می‌توانیم به یک پایهٔ علمی برای دست یافتن به همهٔ میدانهای پیوسته برسیم. بدیهی است این اظهارات مبهم دربارهٔ متصل بودن کوچکترین تکه‌ها هیچ سودی ندارد. مساله مشخص کردن یک صفت بارز پیوستگی است که بتوان با آن به استنتاجهای معتبر و اساسی دست پیدا کرد. مدت زیادی بی نتیجه روی این مساله فکر می‌کردم، اما سرانجام چیزی را که به دنبالش می‌گشتم پیدا کردم. این کشف شاید به طرق مختلفی توسط افراد گوناگون حدس زده شده باشد. اکثراً "ممکن

است موضوعی را که در ذیل شرح می‌دهم خیلی پیش پا افتاده بدانند. در بند قبل به این حقیقت توجه کردیم که هر نقطهٔ p از یک خط راست باعث تقسیم آن به دو بخش می‌شود به طوری که هر نقطه از یک بخش در سمت چپ هر نقطهٔ بخش دیگر قرار می‌گیرد. من اصل پیوستگی را در عکس چیزی که قبلاً گفته شد یافتم که در اصل زیر خلاصه می‌شود:

" اگر همهٔ نقاط یک خط راست در دو رده طوری قرار گیرند که هر نقطه از ردهٔ اول در سمت چپ نقاط ردهٔ دوم باشد آنگاه یک و تنها یک نقطه هست که این تقسیم نقاط به دو رده را ایجاد می‌کند و با این تجزیهٔ خط راست به دو قسمت تقسیم می‌شود."

همانطور که گفتم فکر می‌کنم که در این فرض که هرکسی فوراً " صحت این جمله را می‌پذیرد اشتباه نمی‌کنم. اکثر خوانندگان باید از شنیدن این حرف که راز پیوستگی در همین مطلب پیش پا افتاده است مأیوس شده باشند. به خاطر همین مساله، می‌توانم بگویم که اگر همه اصل فوق را به طور واضح و هماهنگ با ایده‌اش دربارهٔ خط راست دریابد بدخوشحال خواهم شد. من به طور کامل قادر به بیان هیچ اثباتی برای درستی آن نیستم و هیچکس نیز قادر به آن نخواهد بود. فرض این خاصیت برای اصل موضوعی است که با آن به پیوستگی خط استناد می‌کنیم و توسط آن به پیوستگی یک خط پی می‌بریم. اگر فضا وجود خارجی داشته باشد، دیگر احتیاجی به پیوستگی آن نیست و بسیاری از ویژگیها حتی وقتی که پیوسته هم نباشد در آن می‌ماند. حتی اگر ما به طور قطع می‌دانستیم که فضا ناپیوسته است هیچ چیز نمی‌توانست این تمایل به پر نمودن رخنه‌ها، و به عبارتی پیوسته‌سازی آن را در ما از بین ببرد، که این پر کردن شامل ایجاد دسته‌ای خاص از نقاط منفرد جدید طبق اصل فوق است.



## ایجاد اعداد گنگ

از مطالب اخیر روشن می‌گردد که ناپیوستگی اعداد گویا، R، چگونه باید کامل شود تا یک میدان پیوسته ایجاد شود. همانگونه که اشاره شد هر عدد گویای a یک جداسازی R است به دو رده به طوری که هر عدد $a_1$ از ردهٔ $A_1$ کوچکتر یا مساوی هر عدد $a_2$ از ردهٔ $A_2$ است. همچنین عدد a یا بزرگترین عضو ردهٔ $A_1$ است یا کوچکترین عضو ردهٔ $A_2$.

حال اگر هر تجزیهٔ R به رده‌های $A_1$ و $A_2$ تنها با این خاصیت مشخص در نظر گرفته شود که هر عدد $a_1$ در $A_1$ کوچکتر از هر عدد $a_2$ در ردهٔ $A_2$ است آنگاه برای اختصار ما آن را یک برش می‌نامیم و آن را با $(A_1,A_2)$ نمایش می‌دهیم.

پس می‌توانیم بگوییم که هر عدد گویای a یک برش، یا دقیقتر بگوییم دو برش، ایجاد می‌کند که ما آنها را ذاتاً "مختلف نمی‌دانیم. این برش علاوه بر این دارای این ویژگی است که یا بین اعضای ردهٔ اول یک بزرگترین عدد وجود دارد یا بین اعضای ردهٔ دوم یک کوچکترین عدد و برعکس اگر یک برش دارای این ویژگی باشد آنگاه توسط یک بزرگترین یا کوچکترین عدد گویا ایجاد شده است ولی به سادگی می‌توان نشان داد که تعداد بیشماری برش یافت می‌شوند که توسط اعداد گویا تولید نشده‌اند. مثال زیر به روشنی این موضوع را بیان می‌کند.

فرض کنید D عدد صحیح مثبتی باشد که مربع کامل نیست. در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند $\lambda$ وجود دارد به طوری که: $\lambda^2<D<(\lambda+1)^2$

اگر ما همهٔ اعداد گویای مثبت مانند $a_2$ را که مربع آنها از D بزرگتر است در ردهٔ $A_2$ قرار دهیم و بقیهٔ اعداد گویا مانند $a_1$ را در $A_1$، این تقسیم‌بندی برش $(A_1,A_2)$ را به وجود خواهد آورد یعنی، عدد $a_1$ کوچکتر از هر عدد $a_2$ است. زیرا اگر $a_1=0$ یا منفی باشد از هر $a_2$ کوچکتر است، چون طبق تعریف $a_2$

مثبت است واگر $a_1$ نیزمثبت باشدآنگاه مربعش کوچکتریا مساوی D است و بنابراین $a_1$ کوچکتراز هرعددمثبت $a_2$ است که مربعش بزرگتراز D است .

اما این برش را هیچ عددگویا تولیدنمی‌کند . برای اثبات این موضوع ابتدا باید نشان دهیم که هیچ عددگویا که مربعش برابر D شود وجودندارد . با وجوداینکه درستی این موضوع از مقدمات اولیهٔ نظریهٔ اعداد است اما اثبات غیرمستقیم زیر در اینجا می‌تواند جایی داشته باشد . اگر عددگویائی وجودداشته باشدکه مربعش برابر D شود آنگاه دوعددصحیح ومثبت t و u وجودخواهندداشت که درمعادلهٔ $t^2-Du^2=0$ صدق می‌کنند . ومی‌توانیم فرض کنیم که u کوچکترین عددصحیح مثبتی است که مربعش دارای این ویژگی است . بدیهی است که :

$$\lambda u<t<(\ +1)u$$

عدد $u'=t-\lambda u$ عددصحیح مثبتی است که یقیناً "از u کوچکتر است واگرقرار دهیم $t'=Du-\lambda t$ دراین صورت $t'$ نیزیک عددصحیح مثبت است وخواهیم داشت :

$$t'^2-Du'^2=(\lambda^2-D)(t^2-Du^2)=0$$

واین خلاف فرضی است که درمورد u کرده بودیم . بنابراین مربع هرعدد گویای x یا بزرگتراز D است یا کوچکتراز آن . ازاینجا به آسانی دیده می‌شودکه نه درردهٔ $A_1$ بزرگترین عددوجودداردونه درردهٔ $A_2$ کوچکترین عدد زیرا اگرقراردهیم :

$$y=\frac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$$

داریم :

$$y^2-D=\frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}, \qquad y-x=\frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D}$$

اگرفرض کنیم که x عددمثبتی ازردهٔ $A_1$ است آنگاه $x^2<D$ وبنابراین $y>x$ و $y^2<D$. بنابراین y نیزمتعلق به ردهٔ $A_1$ خواهدشد . اما اگر x را از



ردهٔ $A_2$ انتخاب کنیم آنگاه $x^2>D$ ودرنتیجه $y<x$، $y>0$، و $y^2>D$ ودرنتیجه y نیزمتعلق به ردهٔ $A_2$ می‌شودوبنابراین این برش را هیچ عددگویا تولید نمی‌کند .

همین خاصیت که همهٔ برشها را اعدادگویا ایجادنمی‌کنندناتمامیت یا ناپیوستگی میدان همهٔ اعدادگویا ، R ، را نشان می‌دهد .

بنابراین هرگاه با یک برش $(A_1,A_2)$ که بوسیله هیچ عددگویایی ایجادنشده است کارکنیم بوعددجدیدی، یعنی عددگنگ a ، دست پیدا می‌کنیم که توسط این برش کاملاً" تعریف شده است . می‌گوییم عدد a متناظربا این برش است یا اینکه آن عدداین برش را تولیدمی‌کند . براساس آنچه که گفتیم به هربرش معین یک عددمعین گویا یا گنگ متناظرمی‌شود ، توجه داریم که دوعدد متفاوت یا نامساوی هستنداگروتنها اگرمتناظربه دوبرش ذاتاً "مختلف باشند .

به منظوردست یافتن به مبنایی برای آرایش مرتبی ازهمهٔ اعداد حقیقی یعنی همهٔ اعدادگویا وگنگ بایدرابطهٔ بین هردوبرش $(A_1,A_2)$ و $(B_1,B_2)$ که توسط دوعدد α و β تولیدشده اندرا بررسی کنیم . روشن است که یک برش $(A_1,A_2)$ وقتی کاملاً" مشخص است که تنها یکی ازرده‌هایی که قبلاً" گفتیم مثلاً" $A_1$ مشخص باشدچراکه $A_2$ شامل همهٔ اعدادگویای دیگری است که در $A_1$ نیستند . ویژگی مشخص ردهٔ اول این است که اگر $a_1$ متعلق به $A_1$ باشدآنگاه همهٔ اعدادکوچکتراز $a_1$ نیزدر $A_1$ خواهندبود . حال اگردوردهٔ $A_1$ و $B_1$ را باهم مقایسه کنیم ممکن است که :

۱. کاملاً" یکی باشندیعنی هرعضو $A_1$ در $B_1$ باشدوبرعکس هرعضو $B_1$ نیز در $A_1$ باشد . دراین حالت مطمئناً" $A_2$ نیزبا $B_2$ یکی است ، ودوبرش کاملاً" یکی هستندکه مااین را باعلامت $\alpha=\beta$ یا $\beta=\alpha$ نشان می‌دهیم .

اما اگر دو رده‌ٔ $A_1$ و $B_1$ یکی نباشند در این صورت در یکی از آنها مثلاً" $A_1$ عضوی مثل $a'_1=b'_2$ هست که در $B_1$ نیست و در نتیجه متعلق به $B_2$ خواهد بود. بنا بر این همهٔ اعداد $b_1$ در $B_1$ قطعاً" از $a'_1=b'_2$ کوچکتر هستند و در نتیجه همهٔ اعداد $b_1$ در $A_1$ هستند.

۲. اگر $a'_1$ تنها عددی از $A_1$ باشد که در $B_1$ نیست آنگاه هر عضو دیگر $A_1$ مثل $a_1$ در $B_1$ است و در نتیجه از $a'_1$ کوچکتر خواهد بود، و همان طور که قبلاً" گفته شد $a'_1$ در میان اعضای $A_1$ بزرگترین عضو است و بنا بر این برش $(A_1,A_2)$ را عدد گویای $\alpha=a'_1=b'_2$ ایجاد می‌کند. در مورد برش دیگر $(B_1,B_2)$ می‌دانیم که همهٔ اعداد $b_1$ متعلق به $B_1$ در $A_1$ نیز هستند و همه از $a'_1=b'_2$ که عضوی از $B_2$ است کوچکترند. هر عدد دیگر $b_2$ در $B_2$، باید از $b'_2$ بزرگتر باشد، چه در غیر این صورت باید از $a'_1$ کوچکتر باشد و در نتیجه متعلق به $A_1$ است و بنا بر این در $B_1$ نیز هست: در نتیجه $b'_2$ کوچکترین عضو $B_2$ است. و بنا بر این برش $(B_1,B_2)$ را نیز همان عدد گویا یعنی $\beta=a'_1=b'_2=\alpha$ تولید می‌کند. پس این دو برش فقط بطور غیر اساسی با هم فرق می‌کنند.

۳. اگر در $A_1$ حداقل دو عدد مختلف $a'_1=b'_2$ و $a''_1=b''_2$ وجود داشته باشند که متعلق به $B_1$ نباشند، آنگاه تعدادی نامتناهی از این اعداد وجود خواهند داشت. چرا که بین $a'_1$ و $a''_1$ بینهایت عدد هست که مسلماً" در $A_1$ هستند ولی در $B_1$ نیستند. در این حالت دو عدد $\alpha$ و $\beta$، متناظر به دو برش اساساً" مختلف $(A_1,A_2)$ و $(B_1,B_2)$، متفاوت هستند و علاوه بر آن $\alpha$ بزرگتر از $\beta$ است و نیز $\beta$ کوچکتر از $\alpha$ است، که ما این را با علامت $\alpha>\beta$ که هم ارز $\beta<\alpha$ است نمایش می‌دهیم. باید توجه کرد که این تعریف کاملاً" منطبق بر تعریفی است که قبلاً" برای اعداد گویای $\alpha$ و $\beta$ داده شده بود.

دیگر حالتهای باقیماندهٔ عبارتند از:



۴. اگر در $B_1$ یک و تنها یک عدد $b'_1=a'_2$ وجود داشته باشد که در $A_1$ نباشند آنگاه دو برش $(A_1,A_2)$ و $(B_1,B_2)$ فقط به طور غیر اساسی با هم فرق می‌کنند و آنها را عدد گویایی مانند $\alpha=a'_2=b'_1=\beta$ تولید می‌کند.

۵. اما اگر در $B_1$ حداقل دو عدد وجود داشته باشد که در $A_1$ نباشند آنگاه خواهیم داشت $\beta>\alpha$ یا $\alpha<\beta$

با تمام شدن کلیهٔ حالت های ممکن به این نتیجه می‌رسیم که دو عدد متفاوت لزوماً" نسبت به هم دو حالت می‌توانند داشته باشند یکی بزرگتر از دیگری و دیگری کوچکتر از اولی. حالت سومی وجود ندارد. در حقیقت تنها به کمک مقایسهٔ نسبی (کوچکتر ــ بزرگتر) است که می‌توان رابطهٔ بین $\alpha$ و $\beta$ را به دست آورد. اما اکنون این استفاده را توجیه کردیم. در یک چنین بررسی هایی باید بیشترین توجه و دقت را به کار برد، زیرا که حتی اگر بیشترین سعی در امانت به کار رود، باز نمی‌توان از انتخاب عجولانهٔ اصطلاحاتی که از عبارتهای غیر دقیق قبلی قرض می‌گیرد، پرهیز کرد و بخود اجازه نداد که نابجا از میدانی به میدان دیگر رفت.

حال اگر دوباره حالت $\alpha>\beta$ را دقیق تر بررسی کنیم، روشن است که عدد کوچکتر از $\beta$ اگر گویا باشد مسلماً" متعلق به ردهٔ $A_1$ خواهد بود. زیرا در $A_1$ عضوی مانند $a'_1=b'_2$ وجود دارد به گونه‌ای که متعلق به ردهٔ $B_2$ نیز هست، اگر $\beta$ بزرگترین عضو $B_1$ یا کوچکترین عضو $B_2$ باشد مسلماً" کوچکتر از یا مساوی $a'_1$ خواهد بود و در نتیجه متعلق به $A_1$ است. بطور مشابه از $\alpha>\beta$ روشن است که عدد بزرگتر از $\alpha$ است و اگر گویا باشد قطعاً" متعلق به ردهٔ $B_2$ است چرا که $\alpha \geqslant a'_1$. از ترکیب این دو حالتی که در نظر گرفتیم به این نتیجه می‌رسیم: اگر برشی را عدد $\alpha$ تولید کند، آنگاه هر عدد گویا متعلق به رده‌های $A_1$ یا $A_2$ است بر حسب اینکه کوچکتر از یا بزرگتر از $\alpha$ باشد و اگر عدد $\alpha$ خود گویا باشد

ممکن است به هریک از دو رده متعلق باشد.

سرانجام به این نتیجه می‌رسیم که: اگر $\alpha>\beta$، یعنی اگر تعدادی نامتناهی عدد در $A_1$ وجود داشته باشد که در $B_1$ نباشند، آنگاه تعدادی نامتناهی از چنین اعدادی وجود دارند که از $\alpha$ و $\beta$ متفاوتند، و هر چنین عدد گویا مانند $c$، کوچکتر از $\alpha$ است زیرا متعلق به $A_1$ است و در عین حال بزرگتر از $\beta$ است زیرا که متعلق به $B_2$ است.

درنتیجهٔ این تمایز که هم‌اکنون ثابت کردیم، دستگاه $\mathbb{R}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی تشکیل یک میدان درست ساخته‌شدهٔ یک بعدی می‌دهد و این بدان مفهوم است که صرفاً " قوانین زیر برقرارند:

یک. اگر $\alpha>\beta$ و $\beta>\gamma$، آنگاه همچنین $\alpha>\gamma$ و خواهیم گفت که $\beta$ بین $\alpha$ و $\gamma$ قرار دارد.

دو. اگر $\alpha$ و $\gamma$ دو عدد متمایز باشند آنگاه تعدادی نامتناهی عدد مختلف $\beta$ میان $\alpha$ و $\gamma$ وجود دارد.

سه. اگر $\alpha$ عددی معین باشد آنگاه همهٔ اعداد دستگاه $\mathbb{R}$ به دو رده $U_1$ و $U_2$ که هرکدام شامل تعداد نامتناهی عضو مشخص می‌باشند تقسیم می‌شوند. ردهٔ اول، $U_1$، شامل همهٔ اعدادی مثل $a_1$ است که همگی از $\alpha$ کوچکترند و ردهٔ دوم، $U_2$، شامل همهٔ اعدادی مثل $a_2$ است که همگی از $\alpha$ بزرگترند و خود $\alpha$ به دلخواه ممکن است متعلق به ردهٔ اول یا دوم باشد که در این صورت به ترتیب بزرگترین عضو ردهٔ اول یا کوچکترین عضو ردهٔ دوم خواهد بود. در هر حال $\mathbb{R}$ به دو ردهٔ $U_1$ و $U_2$ تقسیم می‌شود که هر عضو ردهٔ اول، $U_1$، از هر عضو ردهٔ دوم، $U_2$، کوچکتر است و می‌گوییم که این جداسازی توسط عدد $\alpha$ حاصل شده است.



برای اختصار و به منظور خسته نشدن خواننده من از ارائهٔ اثبات این قضایا که بی‌درنگ از تعریفهای بند قبل به دست می‌آیند صرف نظر می‌کنم. گذشته از این ویژگیها میدان $\mathbb{R}$ دارای خاصیت **پیوستگی** نیز هست یعنی قضیهٔ زیر هم برقرار است:

چهار. اگر دستگاه $\mathbb{R}$، از همهٔ اعداد حقیقی، به دو ردهٔ $U_1$ و $U_2$ تقسیم شود، به طوری که هر عدد $a_1$ از ردهٔ $U_1$ از هر عدد $a_2$ از ردهٔ $U_2$ کوچکتر باشد در این صورت یک و تنها یک عدد $\alpha$ وجود دارد که این تقسیم توسط آن حاصل شده است.

**اثبات.** به کمک تقسیم یا برش $\mathbb{R}$ به $U_1$ و $U_2$ در عین حال برش $(A_1,A_2)$ از دستگاه $R$، همهٔ اعداد گویا را به دست می‌آوریم، که $A_1$ شامل همهٔ اعداد گویای ردهٔ $U_1$ است و $A_2$ شامل بقیهٔ اعداد گویا، یعنی آنها که در ردهٔ $U_2$ هستند. حال فرض کنیم که $\alpha$ آن عدد معینی باشد که برش $(A_1,A_2)$ را ایجاد می‌کند. اگر $\beta$ عدد دیگری غیر از $\alpha$ باشد آنگاه همواره تعدادی نامتناهی عدد گویا مثل $c$ میان $\alpha$ و $\beta$ وجود دارد. اگر $\beta<\alpha$، در این صورت $c<\alpha$ و بنابراین $c$ متعلق به ردهٔ $A_1$ است و بنابراین متعلق به $U_1$ نیز هست. و چون در عین حال $\beta<c$ آنگاه $\beta$ نیز متعلق به همان ردهٔ $U_1$ است، زیرا هر عدد در $U_2$ بزرگتر از هر عدد $c$ در $U_1$ است. اما اگر $\beta>\alpha$ آنگاه $c>\alpha$ و بنابراین $c$ متعلق به ردهٔ $A_2$ و درنتیجه متعلق به ردهٔ $U_2$ است. و چون در عین حال $\beta>c$، پس $\beta$ نیز در ردهٔ $U_2$ است زیرا هر عددی در $U_1$ از هر عدد $c$ در $U_2$ کوچکتر است. بنابراین هر عدد $\beta$ مخالف $\alpha$، برحسب اینکه $\beta<\alpha$ یا $\beta>\alpha$، متعلق به ردهٔ $U_1$ یا $U_2$ است. بنابراین لازم می‌آید که $\alpha$ خودش یا بزرگترین عدد در $U_1$ یا کوچکترین عدد در $U_2$ باشد، یعنی $\alpha$ عدد منحصربفردی است که $\mathbb{R}$ توسط آن به دو ردهٔ $U_1$ و $U_2$ تجزیه می‌شود و به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.

## اعمال روی اعداد حقیقی

برای تبدیل هر عملی بین دو عدد حقیقی $\alpha$ و $\beta$ به اعمال روی اعداد گویا تنها لازم است که از برشهای $(A_1, A_2)$ و $(B_1, B_2)$ که توسط $\alpha$ و $\beta$ از دستگاه اعداد گویا، $R$، تولید شده‌اند برش جدید $(C_1, C_2)$ را که متناظر با $\gamma$، نتیجه آن عمل است تعریف کنیم. در اینجا به شرح ساده‌ترین حالت یعنی عمل جمع بسنده می‌کنیم.

اگر $c$ عدد گویای دلخواهی باشد به شرط اینکه در $A_1$ عددی مثل $a_1$ و در $B_1$ عددی مثل $b_1$ وجود داشته باشد که $a_1+b_1>c$ آنگاه $c$ را در رده $C_1$ و بقیهٔ اعداد گویا را در $C_2$ قرار می‌دهیم. از آنجا که هر عددی مثل $c_1$ در $C_1$ از هر عددی مثل $c_2$ در $C_2$ کوچکتر است این تقسیم اعداد گویا به دو ردهٔ $C_1$ و $C_2$ آشکارا یک برش ایجاد می‌کند. اگر $\alpha$ و $\beta$ هر دو گویا باشند آنگاه هر عدد $c_1$ در $C_1$ کوچکتر یا مساوی $\alpha+\beta$ است زیرا که $a_1<\alpha, b_1<\beta$ و بنابراین $a_1+b_1<\alpha+\beta$. علاوه بر آن اگر در $C_2$ عددی مانند $c_2$ باشد که $c_2<\alpha+\beta$، آنگاه $\alpha+\beta=c_2+p$ که $p$ عددی گویا و مثبت است و بنابراین باید داشته باشیم که

$$c_2 = (\alpha-\frac{1}{2}p)+(\beta-\frac{1}{2}p)$$

که این با تعریف $c_2$ در تناقض است چونکه $\alpha-\frac{1}{2}p$ متعلق به $A_1$ و $\beta-\frac{1}{2}p$ متعلق به $B_1$ است، بنابراین هر عدد $c_2$ در $C_2$ بزرگتر یا مساوی $\alpha+\beta$ است. بنابراین در این حالت برش $(C_1, C_2)$ را عدد $\alpha+\beta$ تولید می‌کند. بنابراین اگر در همهٔ حالات مجموع $\alpha+\beta$ را که $\alpha$ و $\beta$ دو عدد حقیقی هستند برابر $\gamma$ که بوسیلهٔ آن برش $(C_1, C_2)$ حاصل شده است بگیریم هیچ تخلفی از تعریفی که در حساب اعداد گویا پذیرفته‌ایم نکرده‌ایم. اما اگر فقط یکی از دو عدد $\alpha$ و $\beta$ گویا باشد، مثلاً $\alpha$، در این صورت به راحتی دیده می‌شود که چه $\alpha$ در رده $A_1$ و یا در رده $A_2$ باشد. هیچ تفاوتی در حاصل جمع $\gamma=\alpha+\beta$ به وجود نمی‌آید



همانگونه که جمع تعریف شد می‌توان بقیهٔ اعمال را که به حساب مقدماتی معروف هستند، نیز تعریف کرد. یعنی صورت بندی، تفاضل‌ها، حاصلضرب‌ها، تقسیم‌ها، توان‌ها و ریشه‌ها و لگاریتم‌ها. و به این ترتیب به اثبات‌های واقعی قضایایی می‌رسیم (به عنوان مثال $\sqrt{2}.\sqrt{2}=\sqrt{6}$) که تا آنجا که اطلاع دارم تاکنون هرگز ارائه نشده‌اند. راه طولانی که برای تعریف عملهای پیچیده‌تر باید از آن واهمه داشت، جزء لاینفک طبیعت بحث است ولی برای اغلب موارد می‌توان از آن اجتناب کرد. در اینجا مفهوم یک بازه خیلی مفید است، یعنی دستگاه $A$ از اعداد گویا که خاصیت ویژهٔ زیر را بپذیرد: اگر $a$ و $a'$ دو عدد متعلق به $A$ باشند آنگاه همهٔ اعداد گویای بین $a$ و $a'$ نیز متعلق به $A$ باشند. دستگاه $R$ شامل همهٔ اعداد گویا و همچنین هر دو ردهٔ هر برش بازه هستند. اگر عدد گویای $a_1$ وجود داشته باشد که از همهٔ اعداد بازهٔ $A$ کوچکتر و عدد گویای دیگری مثل $a_2$ باشد که از همهٔ اعداد بازهٔ $A$ بزرگتر باشد در اینصورت $A$ یک بازهٔ متناهی نامیده می‌شود. در این صورت تعدادی نامتناهی عدد با شرایط $a_1$ و $a_2$ وجود دارد، به این ترتیب دامنهٔ $R$ به سه قسمت $A_1$ و $A$ و $A_2$ تقسیم می‌شود، و در اینجا دو عدد گویا یا گنگ $\alpha_1$ و $\alpha_2$ تعریف می‌شوند که به ترتیب حد پایینی و بالایی بازه نامیده می‌شوند. حد پایینی $\alpha_1$ بوسیلهٔ برشی که ردهٔ اول آن را دستگاه $A_1$ تشکیل می‌دهد تعیین می‌شود و حد بالایی $\alpha_2$ توسط برشی که دستگاه $A_2$ ردهٔ دوم آن را تشکیل می‌دهد. هر عدد گویا یا گنگ $\alpha$ که بین $\alpha_1$ و $\alpha_2$ قرار دارد داخل بازهٔ $A$ قرار می‌گیرد. اگر همهٔ اعدادی که در بازهٔ $A$ هستند همچنین در $B$ نیز باشند آنگاه $A$ بخشی از $B$ خوانده می‌شود.

وقتی که سعی می‌کنیم قضایای متعددی از حساب اعداد گویا، (مثل قضیهٔ $(a+b)c=ac+bc$) را برای اعداد حقیقی بیان کنیم به نظر می‌رسد که هنوز

ملاحظات مفصل‌تری لازم است. درصورتیکه این طور نیست وبه راحتی می‌توان دیدکه همه چیزبرمی‌گرددبه نشان دادن این مطلب که اعمال حسابی دارای پیوستگی معینی هستند. منظورمن از این جمله ممکن است به شکل یک قضیهٔ کلی بیان شود:

"اگرعدد $\lambda$ نتیجهٔ عملی روی اعداد $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ و ... باشدوهمچنین $\lambda$ دربازهٔ $L$ قرارگیردآنگاه بازه‌های $A$ و $B$ و $C$ و ... رامی‌توان چنان یافت که اعداد $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ به ترتیب دراین بازه‌ها قراربگیرندواگراعداد دلخواهی ازاین بازه‌ها به جای $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ و ... جایگزین شوندنتیجهٔ عمل فوق روی آنهادربازهٔ $L$ قرارگیرد." درحقیقت آنچه که مارادربیان قضیهٔ فوق علیرغم ترکیب ناخوش آیندآن متقاعدمی‌سازدآن است که این قضیه به نحورضایت بخشی ما رابا مفاهیمی همچون **اندازه‌های متغیر، تابعها، مقادیرحدی،** آشنا می‌سازد. وبهتراین است که تعاریف حتی ساده‌ترین اعمال حسابی رانیزبراساس این مفاهیم ارائه کنیم. کاری که انجام آن دراینجا امکان پذیرنیست.

**توضیح**

(۱) ظاهرسودمندی کلیت این تعریف به محض درنظرگرفتن اعدادمختلط ازبین خواهدرفت ازسوی دیگربه نظرمن مفهوم تقسیم دوعددکه ازیک نوع باشندفقط بعدازمعرفی اعدادگنگ به روشنی قابل توسعه خواهدبود.

Richard Dedekind, "Irrational Numbers", *The World of Mathematics*, vol I,PP.528-536.



**پیک ریاضی**

جلددوم، شمارهٔ دوم، تابستان ۶۶

## منشاء ریاضیات

**نوشتهٔ :** ا. زایدنبرگ

**ترجمهٔ :** محمدصادق منتخب

### یک . پس زمینه

**سنتهای دوگانه.** بآسانی می‌توان دریافت که درتاریخ ریاضیات، دوسنت مهم وجوددارد: هندسی یاترسیمی وجبری یامحاسبه‌ای. اگربتوان نشان دادکه هریک ازاین سنتها مبداء واحدی دارند-باتوجه به اینکه حقایق تقریبا" ملموس متعددی دال برصحت این مدعا وجوددارند- وبعلاوه، اگرمعلوم بشودکه درهردوحالت منابع درواقع **مشترک** می‌باشند، می‌توان این ادعا راباورکردکه به مبداء واحدریاضیات دست یافته‌ایم. این مهمی است که می‌خواهم به انجام برسانم.

دانش‌آموزی که درسهای معمولی ریاضی دبیرستانی رامی‌گذراند، بآسانی قادرخواهدبوداین دوسنت راتشخیص دهد. درسال دوم هندسهٔ مسطحه رافرامی‌گیرد، مرحله‌ای که درخلال آن، باچیزی کاملا" متفاوت باآموخته‌هایش درجبرمواجه می‌شود. پیشترمحاسبه می‌کرد، درصورتی که حال رسم می‌کند، عمودها، نیمسازهای زاویه‌ها وغیره، وباقضیه‌ها واثباتها