

بورباکی^۱ پر چمدار ریاضیات عصر ما

منوچهر میثاقیان

در تاریخ و ادبیات ریاضی بیشترین تکرار، شاید، از آن نام اقلیدس باشد. و همه^۲ ریاضی خوانندگان می‌دانند که آواز ه^۳ اقلیدس به جهت کتاب مشهورش، اصول است که در واقع گردآوری مرتب و منظم توده^۴ عظیمی از کارهای پراکنده و گوناگون ریاضی آن دوره بوده است. نوشتن کتابهایی از نوع اصول با رها تکرار شده است و این ضرورتی است که پس از هر دوره از رشد و پیدایش ایده‌ها، فوت و فنها و نظریه‌های تازه در ریاضیات احساس می‌شده است. نوشته‌های اویلرد جبر و آنالیز، کارهای لابلا^۵ در مکانیک سماوی و احتمالات، کارهای کوشی، فروبنیوس، ژوردان، گوسا و سرانجام کارهای مشهور هیلبرت، در زمینه‌های گوناگون ریاضیات، همه و همه از این نوع بوده‌اند. هر چند که شاید هیچکدام به آراستگی و جامعیت اصول اقلیدس در زمان خودش نبوده‌اند. این تفاوت ناشی از آن است که همه^۶ این آثار روش^۷، نظم و ترتیب بخشیدن به پژوهشها و کارهایی بوده است که در موضوع ویژه و مشخصی از ریاضیات صورت پذیرفته است، در حالی که اصول اقلیدس به کل ریاضیات آن زمان پرداخته است. (۲)

در دهه‌های نخست سده^۸ بیستم بیشتر ریاضیدانان پژوهشگر به این

ضرورت پی برده بودند که کارهای عظیمی که در دهه‌های پایانی سده نوزدهم در قسمتهای گوناگون ریاضیات صورت گرفته است باید جمع آوری و نظم و ترتیب داده شوند بگونه‌ای که برای هر پژوهشگر ریاضیات به فوریت قابل دسترسی باشند. من باب مثال، موضوعات و مباحثی از قبیل نظریه مجموعه‌های کانتور، نمایشهای خطی گروهها، توپولوژی جبری، توپولوژی عمومی، انتگرال لیگ، معادلات انتگرال، نظریه طیفی، فضاها هیلبرت، گروههای لی و نمایشهای آن، تنها در نوشته‌های پراکنده و گاه در هم و برهم یافت می‌شدند و هرگز مراجع مناسبی در این زمینه‌ها به دست نمی‌آمد. مثلاً اثبات بی‌نظیر الی کارتان در گروههای لی که در سال ۱۹۳۲ منتشر گردید در زمینه فضاها توپولوژی و گروههای توپولوژی مطالبی اساسی را در برداشت که یافتن نمونه صورت بندی شده که مل آنها، آنگونه که مدنظر کارتان بود، در ادبیات ریاضی آن زمان تا حد غیرممکن دشوار بود. در چنین دورانی از تاریخ ریاضیات است که نیکلا بورباکی با قصدونیتی شبیه آنچه که اقلیدس در ۲۰ سده پیش از او در باره ریاضیات انجام داده بود، پای میدان می‌گذارد.

بورباکی بر آن شد تا رساله‌ای تنظیم کند که همه چیز را در ریاضیات عصر ما از آغاز بطور سازمان یافته در برداشته باشد، و پژوهشگران ریاضی را از درد سر جستار در انبوه مقالات پراکنده بی‌نیاز سازد. به گفته هالموس: "رساله بورباکی در واقع گردآورده مرتب و منظم توده عظیمی از مقالاتی است که طی دهه‌ها سال در مجله‌های متعدد و به زبانهای گوناگون نوشته شده‌اند." (۳)

بورباکی رساله عظیم و پر حجم خود را از نظریه مجموعه‌ها که مجهز به قواعد اساسی منطق ریاضی است آغاز می‌کند و بر آن است تا کل ریاضیات را بگونه‌ای سازمان یافته به روش خاص خود از این نظریه استخراج کند. اگرچه ریاضیدانانی

از قبیل ددکنید، امیل آرتین، امی نوتر، کرول، پوانکاره و الی کارتان
 بر بورباکی نفوذی چشمگیر داشته‌اند، اما کارهای وان در واردن در اثر
 بجای ماندنی او به نام جبر مدرن و دیدگاه صورتگرایی هیلبرت الهام
 دهندگان اصلی بورباکی در سازمان دادن به کار عظیمش می‌باشند. بورباکی
 دستگاه منطقی تسرملورا از نظریه بنداشتی (اصل موضوعی) مجموعه‌ها که
 بعدها توسط فرانکل و اسکولم تکمیل گردیده بود، برای آغاز رساله خود
 برگزیده است، که شامل دستگاهی است از دستورهایی کامل بر مبنای کمال
 صوری که محتوایش وابسته به نمادهای به کار گرفته شده نیست. بخصـوص
 اصطلاحات "عضو" و "مجموعه" در این دستگاه تعریف نشده می‌مانند. بورباکی
 همچنین در این اندیشه بود تا همه قضایای اساسی ریاضیات را با دقت
 و ظرافت کامل و با تفصیل و شرح جزئیات، اثبات کند (در رساله بورباکی
 هیچ اثباتی به خواننده واگذار نشده است و یا به تئوریمها رجاع نگردیده
 است.)، و روابط متقابل بین این قضایا را روشن نماید و بکوشد تا اصطلاحات
 و مفاهیمی یکنواخت را ابداع و انتخاب کند و آنها را به جای اصطلاحات پراکنده
 و ناهمگون که در نوشته‌های گوناگون به صورتهای گوناگونی به کار می‌روند،
 جان‌نشین سازد. روابط بین موضوعات و اشیاء گوناگون ریاضی که از اهم
 هدفهای بورباکی است توسط مفهومی ارائه شده است که از شگفتانگویی
 ریاضیات عصر ما باید بحساب آید، یعنی، مفهوم ساختار.

بورباکی رده‌بندی گذشته موضوعات ریاضی را منطبق بر ماهیت عمیق
 ریاضیات نمی‌دانست. رده‌بندی سنتی بطور مغشوشی معتقد بود که مثلا "حساب
 دانش اعداد است، هندسه از آن اشیاء فضایی، جبر به بررسی معادلات می‌پردازد
 آنالیز توابع را بررسی می‌کند و غیره. این رده‌بندی نه تنها ارتباط متقابل
 بین مفاهیم و مباحث ریاضی را روشن نمی‌کند، بلکه تشخیص اینکه مثلا "فلان

مطلب به کد امیک از این شاخه‌ها وابسته است کاری است. طاققت فرسـا و گاه غیر ممکن. بورباکی با کناره‌ها دن رده بندی سنتی، ریاضیات را با دیدگاهی ساختاری بررسی ورده بندی می‌کند، مثلاً "هر تابع مربع انتگرال پذیر از نظر اوبرداری از یک فضای اقلیدسی است. این رده بندی شبیه کاری است که طبیعی دانه‌ها، به رهبری داروین، در رده بندی جانداران و گیاهان انجام داده اند و می‌دانیم که این رده بندی در جانداران و گیاهان بواساس سرشت درونی و فیزیولوژیکی آنها که از تشریح عمیق ساختمان آنها حاصل شده است، انجام می‌گیرد، و به اتکای همین رده بندی است که طبیعی دانه‌ها بتدریج یگانگی شگفت آوری را در بین همه موجودات زنده کشف کردند، کاری که بورباکی نیز در ریاضیات در پی انجام آن بوده است، یعنی یافتن یگانگی اساسی در ریاضیات و رای هر تظا هر متفا وتی که در قسمت‌های گوناگون ریاضیات صورت می‌پذیرد.

بورباکی سه ساختار را که "ساختارهای اساسی" می‌نامد ساده ترین ساختارها به حساب می‌آورد و آنها عبارتند از ساختارهای جبری، ساختارهای توپولوژیک، و ساختارهای ترتیبی. طرح اولیه رساله بورباکی به بررسی این سه ساختار و حساب دیفرانسیل و انتگرال تکیه دارد و می‌گوید که "مطالب ریاضیات را از دیدگاه این سه ساختار مورد بررسی قرار دهد. مثلاً" بورباکی برخلاف سنت جاری (۴) تنها پس از آنکه خواص عمومی هر سه ساختار اساسی و برخی ساختارهای مرکب از قبیل گروه‌های توپولوژیک را که از ترکیب این ساختارها به دست می‌آید، مورد بررسی قرار داده است، به معرفی اعداد حقیقی می‌پردازد (مجموعه اعداد حقیقی هر سه ساختار اساسی را داراست و بین هر سه ساختار روابط گوناگونی برقرار است).

انتشار کتابهای نخست بورباکی که در واقع بخشها و فصلهای مختلف

وپی درپی رساله‌های عظیم اورا تشکیل می‌دهند، با وجود مشکلاتی که زمان انتشار جلدهای نخست آن با آن مواجه بود^(۵) با اقبال عمومی دست اندرکاران ریاضی روبرو گردید. واگرچه عده‌ای به انتقاد و مخالفت با آن برخاستند و خود تک نگارهایی در زمینه‌های مختلف ریاضی انتشار داده‌اند که برای پژوهشگران مراجعه به آنها عموماً "ساده‌تر از مراجعه به بورباکی است، ولی باید گفت که همگی این تک نگارها به نوعی ملهم از بورباکی هستند.

موضوعی که بشدت از جانب بورباکی کننا رگذاشته می‌شود، بسط و گسترش مباحث مجرد بدون انگیزه‌ای است که صرفاً "به عنوان تعمیم در عرضه ریاضیات پدیدار شده‌اند، حتی بورباکی قضایا و مباحث مشهوری را که دیگرکاربردی در مباحث ریاضی برایشان متصور نیست کننا ر می‌گذارد. به دیگر سخن، موضوعات مرده و به بن بست رسیده در رساله‌های بورباکی جایی ندارند. مثلاً "نظریه‌های گالوا که ابزاری شگفت‌آور در نظریه‌های اعداد و هندسه جبری است تماماً "در بورباکی بررسی و ارائه شده‌است، در حالی که محک گالوا در مورد حل پذیری یک معادله توسط رادیکالها که منشاء پیدایش نظریه‌های گالواست، ابداً جایی در رساله‌های بورباکی ندارد، زیرا اگرچه یکی از مسائل قدیمی و مشگول را بزبانی حل می‌کند، اما در ذات خود موضوعی مرده است.

کوشش بورباکی در ارائه نتایج کلی و عام تمام ریاضیات بشکلی مجرد و جهان‌شمول در عده‌ای این پندار را دامن زده‌است که بورباکی صرفاً "مجردکاری است که نظریه‌های انتزاعی بدون انگیزه رادرقالی بنیاداشتی (اصل موضوعی) عرضه می‌کند و بدین گونه، نه به آفرینشهای فکری و فرازندگی اندیشه دانشجویان و پژوهشگران کمکی می‌کند و نه به کشف حتی یک قضیه با اهمیت ناثل گشته‌است. اما در واقع چنین نیست، زیرا اولاً "رساله‌های بورباکی در اساس جعبه‌ابزاری است برای پژوهشگران و داعیه یافتن نتیجه‌ها

قضیه‌ای را ندارد و شایاناً "به گفته دیودونه می‌کوشد تا" در جهت بهره‌برداری تمام و کمال از بررسی بنیادینی ساختارها برای حل مسائل اساسی و بنیادی ریاضیات از اشاعه هر نظریه مجرد بدون انگیزه و کاربرد بی‌بهره صورت‌آرا جیف بنیادینی در بسیاری از نوشته‌های ریاضی امروز عرضه می‌شوند جلوگیری نماید. (۶)

کار دیگر بوروباک‌ی تثبیت و ارائه علائم و اصطلاحات یکنواخت و مناسبی است که با دقت و ظرافت ویژه‌ای برگزیده و ابداع می‌شوند. در نظریه مجموعه‌ها از جمله علائم U و ϕ را بترتیب برای اشتراک، اجتماع و مجموعه تهی عرضه کرده است که با پذیرش جهانی روبرو شده‌اند. همچنین ثبت حروف در شت $N, Z, \emptyset, R, \emptyset$ و H بترتیب برای مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی، اعداد مختلط و اعداد چهاربرگی و F_p برای هیات متناهی، $x \times y$ ، $x \otimes y$ بترتیب برای حاصلضربهای تانسوری و خارجی $\langle x, y \rangle$ برای صورت‌های دوطرفی و بسیاری علائم دیگر که در ادبیات ریاضی عصر ما جای دارند، از آن بوروباک‌ی هستند.

در زمینه اصطلاحات هم بوروباک‌ی، اصطلاحات سنتی را در صورت عدم وجود ابهام پذیرفته است و در صورت نا‌رسایی، خود به ساختن اصطلاح جدیدی که عاری از ابهام و پیچیدگی باشد همت گماشته است. و برای نامیدن آنها یا از نام‌هایی استفاده کرده است که معنی و مفهوم را بنمایانند یا نام واضعین این مفاهیم را بر آنها نهاده است. مثلاً "جای اصطلاحات نا‌رسای" مجموعه‌های هیچ جا متراکم" (۷) و "مجموعه‌های از مقوله نخست" (۸) که بفر (۹) به کار برده است، بوروباک‌ی اصطلاحات، "مجموعه‌های کم‌بار" (۱۰) و "مجموعه‌های بی‌بار" (۱۱) را وضع کرده است. همچنین اصطلاحاتی از قبیل حلقه‌های نوتری، حلقه‌های آرتینی، حلقه‌های دکیند و حلقه‌های سازه‌ای (۱۲) در جبر از بوروباک‌ی است. در بسیاری موارد کتاب‌های بوروباک‌ی نخستین مراجع دقیق و آراسته‌ای هستند

که برخی موضوعات را کاملاً "توصیف می‌کنند. مثلاً" درجبر اگرچه کتاب جبر مدرن وان در و اردن حق تقدم بر بورباکی دارد، اما موضوعات و مباحثی از قبیل همزادی مدولها و جبر چندخطی در بورباکی وجود دارد که در کتاب وان در و اردن وجود نداشت، و همچنین رساله بورباکی نخستین مرجعی است که جبر خارجی گراسمان را بطور کامل و دقیق ارائه می‌دهد، موضوعی که حتی در خود کتاب گراسمان آشفته و نامفهوم است. در توپولوژی عمومی هم اگر چه مفاهیم اساسی آن در کتابهای غاسدوف، کورا، توفسکی و سیرپینسکی مطرح شده اند اما باز هم کتاب توپولوژی عمومی بورباکی اولین کتاب در ادبیات ریاضی است که صافیها، فضاها، یکنواخت، گروههای توپولوژیک و فضاهای توابع را بررسی می‌کند. کتاب دیگر بورباکی در فضاهای برداری توپولوژیک نیز نخستین مرجع در فضاهای موضعا "محدب است.

در رساله بورباکی، که مجموعه‌ای از کتابهای پی‌درپی است، سه ویژگی اساسی به چشم می‌خورد. اول اینکه در پایان هر فصل مجموعه برجسته‌ای از تمرینها و مسائل جای داده شده است که بسیار پر محتوا و غالب توجه‌اننده نشانه‌ای از هوش و استعداد او در طرح و گزینش مسائل است. تعدادی از این مسائل نتایج و موضوعات مقالات ریاضیدانانی است که پیشتر در جایی انتشار یافته‌اند. دوم یادداشتها و نکات تاریخی است که باز هم در پایان هر فصل می‌آیند و با سلیقه خاص بورباکی نگاشته می‌شوند و بیشتر اشاراتی به چند مرجع کلاسیک دارند. این یادداشتها و نکات تاریخی که بسیار آموزنده و غالب توجه‌اند، به صورتی یکجا نیز انتشار یافته‌اند. و سرانجام در پایان هر کتاب خلاصه‌ای از تعاریف مهم و قضیه‌ها (بدون اثبات) می‌آید که به صورت یک فرهنگ و فهرست جامع برای مراجعه سریع و گذرا و آشنا شدن با اصطلاحات بورباکی بسیار مناسب و پسندیده‌اند.

حتی بررسی اجمالی و گذر از آثار بورباکی که تا کنون انتشار یافته است نیازمند به اطلاعات وسیع در زمینه های گوناگون ریاضیات و حوصله ای در خورتوجه است. اما بی هیچ تردیدی باید گفت انسجام ریاضیات معاصر و دقت شگفت آور آن در پرتو کوششهای بورباکی شکل گرفته است. و اگر چه بورباکی تنها کسی نیست که سودای یگانگی ریاضیات و پیرایش آن از باهاما^ت و بیدقتیها را در سرپرورانده اند، اما بدون شک او تنها کسی است که تا حد واقعیت بخشیدن این پندار پیش رفته است.

توضیحات .

(۱) نیکلابورباکی (Nicolas Bourbaki) نام گروهی است که توسط تعدادی از ریاضیدانان جوان فرانسوی (سن این ریاضیدانان بین ۲۴ تا ۳۰ سال بوده است.) که همگی فارغ التحصیلان دانشسرای عالی فرانسه بودند در سال ۱۹۳۰ به وجود آمد. از بنیان گذاران این گروه می توان ژان دیودونه، کلود شوالی (این جبريست نامدار فرانسوی در ژوها نسیورگ متولد شده است)، هنری کارتان و آندره ویل را نام برده. انتخاب نام نیکلابورباکی برای گروه، معمایی است که جز بر بنیان این گروه، برکس دیگری گشوده نشده است. خود پایه گذاران بورباکی وعده ای دیگر از ریاضیدانان صاحب نام، افسانه های گوناگونی را در این زمینه اشاعه داده اند، از جمله می توان مراجع ۲، ۳ و ۵ را ملاحظه کرد. دو نکته در رابطه با اعضاء گروه می توان گوش زد کرد. یکی اینکه جز در یک مورد همه اعضاء گروه همیشه فرانسوی بوده اند، این مورد هم سا موئل ایلنبرگ لهستانی است که دست کم در فرانسه آن زمان کسی همپای او در توپولوژی جبری وجود نداشته است. دیگر اینکه ظاهرا "تا کنون هیچ زن ریاضیدانی به این گروه راه نیافته

است .

تشکیلات گروه بورباکی تقریبا "سری است ، و با اینکه اعضای گروه مرتبا "در حال تغییرند (بنا بر روایتی هر عضو گروه که به ۵ سالگی برسد ، باید گروه را ترک کند .) اما سبک و روش کار گروه همچنان ثابت است . پذیرش هر متنی در گروه بورباکی برای درج در رساله به اتفاق آراء اعضای گروه صورت می پذیرد . پیش نویس هیچ متنی از رساله وجود ندارد که دست کم هفت یا هشت بار بازنویسی و بررسی نشده باشد و این از شگفتیها و درعین حال موفقیت های کار این گروه است .

(۲) لازم است به این نکته توجه شود که برتراندراسل و وایتهد نیز در کتاب عظیم خود به نام اصول ریاضیات فکرا استخراج کل ریاضیات را از موضوعی یگانه پی گیری کردند اما این کار که در واقع استخراج ریاضیات از منطق بود با شکست مواجه گردید .

(۳) مرجع ۲ را ملاحظه کنید .

(۴) سنت چنین است که در آغاز هر کتاب یا رساله ای در آنالیز ، پیش از همه اعداد حقیقی را معرفی کنند ، اما در حالی که بخش اول رساله بورباکی — مبانی آنالیز اختصاص دارد ، اعداد حقیقی در کتاب سوم از این بخش معرفی می شوند .

(۵) نخستین کتاب بورباکی در سال ۱۹۳۹ همزمان با آغاز جنگ جهانی دوم — انتشار یافت .

(۶) به نقل از مرجع ۱ با اندک تصرف .

(7) Nowhere dense sets

(8) Sets of first category

(9) Bair

(10) Rare Sets

(11) Meager Sets

(12) Factorial rings

—مراجع:

- 1 Dieudonne', Jean, "the work of Bourbaki During the last thirty years", *Notices of the AMS* ,vol.29,1982.
- 2 P.R.Halmos, " Nicolas Bourbaki", *Scientific American*,vol. 196,No.5,May 1957.
- 3 Guedj,Denis,"Nicalas Bourbaki,collective Mathematician" *the Mathematical Intelligencer* ,vol.7,No.2,1985.
- 4 Hermam,Robert,"Mathematics and Bourbaki",*the Mathematical Intelligencer* ,vol.8,No.1,1986.

- ۵ کارتان، هنری، "نیکلابورباکی وریاضیات معاصر"، ترجمه هما یسون معین، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره اول، بهار ۱۳۶۱، ص ۵۲-۶۶.
- ۶ توم، رنه، "آیاریاضیات نوین" اشتباهی آموزشی و فلسفی است؟ "ترجمه سیاوش شهشانی، بولتن انجمن ریاضی ایران، شماره ۵، زمستان ۱۳۵۵، ص ۲۳-۷.
- ۷ دیودونه، ژان، "آیات تدریس ریاضیات" نوین "لازم است؟" ترجمه علی اکبر عالمزاده، بولتن انجمن ریاضی ایران، شماره ۵، زمستان ۱۳۵۵، ص ۲۴-۳۵.
- ۸ توم، رنه، "ریاضیات نوین و ریاضیات همیشگی" ترجمه هرمز عاملی، بولتن انجمن ریاضی ایران، شماره ۷، پاییز ۱۳۵۶، ص ۵-۲۴.