انگارۀ بایبرباخ: از پندار تا یقین

منوچهر میثاقیان

۱. پیش درآمد

دانش ناب، آن گونه که در مدرسه و دانشگاه با سهولت و آسودگی خیال آموزش و آموخته می‌شود، هرگز بیانگر تلاش و رنج انسانهای بسیاری نیست که سالها در ایجاد و توسعهٔ آن فعالیت کرده‌اند و این مهم تنها در وارسی تاریخ دانش امکان دست یابی می‌یابد و بحق باید گفت که تاریخ دانش خود دانش است. کوشش مداوم و خستگی ناپذیر گروهی از برجسته ترین ریاضیدانان جهان در طی مدتی بیش از سه ماه در سال ۱۹۸۴، سرانجام به تأیید صحت اثبات مسأله ای انجامید که مدت ۶۸ سال جریانی پیوسته از اندیشهٔ بشری را در جای جای جهان به مبارزه طلبیده بود. و اینک برای نسلهای آینده قضیه ای در دست است که در کتابهای آنالیز مختلط خواهند خواند.

این مسأله‌که‌به‌انگارهٔ بایبرباخ مشهوراست یکی ازمهمترین مسائل آنالیزکلاسیک به‌شمار می‌رودکه‌درطی ۶۸ سال پایداری دربرابر پرکارترین ریاضیدانان ،دربسط وتوسعهٔ روشها ومفاهیم‌گوناگون آنالیز نفوذی چشمگیرداشته‌است .

۲.طرح مسأله

بنابرقضیهٔ نگاشت ریمان ،هرحوزهٔ همبندسادهٔ صفحه (مگرخود $\mathbb{C}$)را می‌توان همدیسانه [۲] برگردهٔ یکانی D نگاشت .اغلب به‌استناداین قضیهٔ پرتوان است که‌ریاضیدانان کاربسته ومحض می‌توانندمسائل مربوط به حوزه‌های مسطح رابه‌حالت خاص یک گرده‌یانیمصفحه تبدیل کنند .
ردهٔ Sرا شامل همهٔ توابع f به‌صورت

$$f(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

می‌گیریم‌که یک بنیانی[۳]هستند ،یعنی در D تحلیلی ویک به‌یک اند .
نگرهٔ توابع‌ردهٔ S ازسال ۱۹۰۷ ،هنگامی که کوب[۴] ثابت‌کرد S یک خانوادهٔ بهنجاراست ،آغازمی‌شود .بهنجاربودن نتیجهٔ $|a_2|\leq C$ را برای یک ثابت مطلق C دربرداشت . بایبرباخ در۱۹۱۶ دریافت‌که $C=2$.
برابری برای تابع‌کوب :

$$f_0(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n \tag{2}$$

درست‌است ،وازاین روبایبرباخ می‌انگاشت‌که‌تابع‌کوب بین همهٔ توابع S بزرگترین ضرایب راداراست ،یعنی

به ازای هرتابع f دررده‌ٔ S وبه ازای هرعددطبیعی $n \geq 2$، لزوما "

$$|a_n| \leq n \qquad (B)$$

این است انگارهٔ بایبرباخ که سرانجام در ۱۹۸۴ توسط پروفسورلویی دوبرانژ[۵] ازدانشگاه پردوآمریکا حل گردید.

۳. گذارتاریخی

بعدازطرح مطلب ازسوی بایبرباخ، موضوع موردتوجه ریاضیدانان قرارگرفت. ابتدادر ۱۹۲۵ نوانلینا[۶] انگاره رابرای توابعی‌که بردشان ستاره‌وار[۷] است، ثابت کرد. در ۱۹۲۳ ک. لوونر[۸] ریاضیدان اهل چکسلواکی باابداع روش فراسنجی[۹] (پارامتری) انگارهٔ (B) رابه ازای $n=3$ ثابت کرد. همین روش لوونراست که نقش اساسی رادراثبات انگاره توسط دوبرانژبازی کرده است. ایدهٔ اساسی‌ودرخشان دوبرانژبرساختن دستگاهی ازتوابع ویژه‌ای استواراست که آنها رابامعادلهٔ دیفرانسیل لوونرترکیب می‌کند. درواقع کافی‌است که (B) رابرای توابعی ثابت کردکه D رابر روی صفحه شکافته شده‌دردرازای کمان ژوردان[۱۰] J می‌نگارند. به ازای هر t، که $0 \leq t < +\infty$، گیریم J_t زیرکمانی از J باشدکه $z(t)$ رابه ∞ می‌پیوندندوگیریم f_t، گردهٔ D راهمدیسانه به روی $\mathbb{C} - J_t$ بنگاردبه گونه‌ای‌که $f_t(0)=0$ و $f_t'(0)>0$. آنگاه $f_t(D)$، به ازای هر $0 \leq t < \infty$، یک بسط پیوسته ازقلمرومفروض $f(D)$ رابرهمهٔ صفحه بیان می‌کند. نکتهٔ اصلی این است که برای یک فراسنجش[۱۱] (پارامتریزش) مناسب، f_t معادلهٔ دیفرانسیل لوونررابرمی‌آورد:

(*) کمان ژوردان J، $z(\tau)$، $0 \leq \tau < \infty$، رابه ∞ می‌پیوندند.

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = \frac{1+x(t)\ z}{1-x(t)\ z}\ z\ \frac{\partial}{\partial z} f_t(z)$$

که‌در آن $|x(t)|=1$. مساله‌ٔ ضرایب اکنون به‌یک مسألهٔ وارسی‌بهینه برمی‌گردد .

در ۱۹۲۵ ،لیتلوود [۱۲] نشان دادکه $|a_n| < e\ n$. وبعدها فیتزجرالد [۱۳] در ۱۹۷۲ وهوروویتز [۱۴] در ۱۹۷۶ بترتیب تخمینهای بهتر $|a_n|<1.081\ n$ و $|a_n| < 1.0691\ n$ را به‌دست آوردند .درسال ۱۹۳۱ ژان دیودونه [۱۵] (B) رابرای توابع باضرایب حقیقی ثابت کرد .در ۱۹۳۶ روبرتسون [۱۶] انگارهٔ دیگری راطرح کردکه انگارهٔ (B) ازآن نتیجه میشد .گیریم f تابعی است دررده‌ٔ S ،می‌نهیم :

$$(4)\qquad f_2(z)=\{f(z^2)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} z^{2k-1}.$$

برای این گونه‌توابع ،تابع :

$$(5)\qquad K_\varepsilon^{(2)}(z)=\frac{z}{1+\varepsilon z^2}\ ,\qquad |\varepsilon| =1$$

نقش تابع‌کوب رابازی می‌کند .روبرتسون گمان بردکه‌باید :

$$(R)\qquad \sum_{k=1}^{n} |C_k^{(2)}|^2 \leq n \qquad n \geq 2$$ به‌ازای هر

انگارهٔ روبرتسون کمتر موردتوجه قرارگرفت وتا پیش ازسال ۱۹۸۴، تنها به ازای ۴و۳=n ثابت گردید.

درسال ۱۹۵۵، انگارهٔ (B) به ازای n=۴ توسط گارابدیان[۱۷] وشیفر[۱۸] به روش بسیارپیچیده‌ای ثابت شد. درهمین سال، هیمن[۱۹] به کمک روش لیتلوود - هاردی[۲۰] نشان دادکه (B) به ازای $n \geq n_f$ که درآن n_f وابسته به f ست، برقراراست.

در ۱۹۶۰، چارزینسکی[۲۱] وشیفر به کمک نامساوی گرانسکی[۲۲]، که در ۱۹۳۶ به دست آمده بود، نامساوی $|a_4| \leq 4$ رابه صورتی ساده ومقدماتی ثابت کردند. این نامساوی به طورخلاصه چنین است. گیریم $f \in S$. می‌نهیم

$$(6) \qquad \log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{nk} z^n \zeta^k, \qquad |z|<1, \quad |\zeta|<1$$

که درآن ضرایب C_{nk}، چندجمله ایهایی ازضرایب C_n تابع f هستند. دراین صورت به ازای هرعددصحیح N وهمهٔ اعدادمختلط λ_1، λ_2، ...، λ_N داریم:

$$(G) \qquad \left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} C_{nk} \lambda_n \lambda_k \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |\lambda_n|^2$$

نامساویهای گرانسکی نقشی اساسی درنگرهٔ توابع هندسی دارند.

در ۶۹-۱۹۶۸ پیدرسون[۲۳] واوزاوا[۲۴] هریک جداگانه نامساوی $|C_6| \leq 6$ راثابت کردند، ودر ۷۳-۱۹۷۲ اوزاواوکوبوتا[۲۵] نشان دادندکه $|C_8| \leq 8$. در ۱۹۷۲ شیفروپیدرسون ثابت کردندکه $|C_5| \leq 5$.

دردرازنای پژوهشهای گوناگون برای دستیابی به درستی یانادرستی

انگاره (B) ،دوتن ازریاضیدانان شوروی انگاره دیگری راپیشنهاد کردندکه سرانجام گرهگشای مشکل موردپژوهش شد .این دوتن به نامهای ن . آ .لبدوف [۲۶] وی.م .میلین [۲۷] در ۶۷–۱۹۶۵ نامساوی زیرراثابت کردند :

$$(7) \qquad |C_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |C_k^{(2)}|^2 \leq (n+1)\ \exp\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \right\}$$

که درآن γ_k ازرابطه زیرتعیین می‌شود :

$$(8) \qquad \log \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k z^k, \qquad f \in S.$$

تساوی درنامساوی دوم (۷)تنها درحالت زیردرست است :

$$(9) \qquad \gamma_k = \frac{1}{k}\,\eta^k, \qquad k=1,\ \ldots,\ n; \qquad |\eta| = 1,$$

وبرای تابع کوب داریم

$$(10) \qquad |\gamma_k| = \frac{1}{k} \qquad \text{به ازای هر } k \geq 1$$

ودراین صورت از (۷)داریم :

$$(11) \qquad |C_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |C_k^{(2)}|^2 = n+1$$

اکنون اگرنامساوی زیردرست باشد ،آنگاه (B) و(R) بیدرنگ از (۷)به دست می‌آیند :

$$(L\text{-}M)\qquad \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\ k\ |\gamma_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left(n+1-\frac{1}{k}\right) \frac{1}{k}.$$

لبدوف ومیلین می‌انگاشتندکه این نامساوی درست است ،وازاین روبه انگارهٔ لبدوف ـ میلین معروف شد .دوبرانژبا ارائهٔ اثباتی‌برای این انگاره‌درسال ۱۹۸۴، پروندهٔ ۶۸ سالهٔ انگارهٔ بایبرباخ را مختومه اعلام‌کرد .

۴. سرخط اثبات دوبرانژ.

همچنانکه پیشترگفته شد ،دو برانژ براساس روش معادلهٔ دیفرانسیل لوونر (۳)دستگاهی‌ازتوابع‌ویژه را می‌سازدوبه‌کمک آنها انگارهٔ (L-M) را ثابت می‌کند .گیریم :

$$(12)\qquad \phi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{4}{k}\right) \tau_k(t), \qquad 0\leq t<\infty$$

که درآن $\gamma_k(t)$ ضرایب $\log \frac{f_t(z)}{z}$ هستند .توابع $\tau_k(t)$ شرایط $\tau_k(0)=n-k+1$ و $\tau_k(\infty) = 0$ را برمی‌آورندوبعلاوه‌چنان ماهرانه‌برگزیده شده‌اندکه مشتق $\phi(t)$ چنین می‌شود :

$$(13)\qquad \phi'(t) = -\sum_{k=1}^{n} |\ldots|^2 \tau'_k(t)$$

وشگفت آوراینکه :

$$(14) \qquad -\tau_k'(t) = k\, e^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}\,(1-2\,e^{-t})$$

که در آن $P_j^{(\alpha,\beta)}$ چندجمله ایهای ژاکوبی هستند. پیشتر در ۱۹۷۶، آسکی[۲۸] وگاسپر[۲۹] ثابت کرده بودند که حاصل جمع طرف دوم رابطهٔ (۱۴) مثبت است، وبنابراین از (۱۳) نتیجهٔ $0 \leq \phi'(t)$ ، $0 \leq t < \infty$ ، را به دست می آوریم، یعنی $\phi(0) \leq \phi(\infty) = 0$، واین نامساوی هم ارز انگارهٔ (L-M) است.

۵. همایش لنینگراد.

درروزهای پایانی ژانویهٔ ۱۹۸۴، هنگامی که لویی دوبرانژ به اعضای سمینار نگرهٔ توابع هندسی لنینگراد خبرداد که مایل است برای مدت دوماه به آن شهربیاید تا نتیجهٔ بررسیهایش را که به اثبات انگارهٔ بیبرباخ انجامیده است با آنان درمیان گذارد، چندان رغبتی برای باورگفتهٔ او ایجاد نشد. بیشتر از این جهت که او گفته بود فصل پایانی کتابش تحت عنوان "نگرهٔ سریهای توانی مربع جمع پذیر"، که پیش نویس آن را به همراه خود خواهد آورد، به اثبات انگارهٔ (B) اختصاص دارد. اعضای سمینار از خود می پرسیدند که آیا کسی می تواند این انگاره را به کمک روشهای آنالیز تابعی اثبات کند؟ بویژه اینکه پیش از این یکبار دیگر دوبرانژ با همین روش و از همین مفاهیم اثباتی نادرست برای انگارهٔ "رامانوجان[۳۰]- پیترسون[۳۱]" به دست آورده بود. با این وجود، سمینار لنینگراد در نگرهٔ توابع هندسی

تصمیم گرفت برای بحثی جدی خودرا آماده کنید، واز این روکاموزکی [۳۲] و املجانوف [۳۳] به بررسی کار پیشین دوبرانژ پرداختند وشرحی گسترده و مفصل از آن تهیه کردند. درآوریل ۱۹۸۴، دوبرانژ با پیش نویس حجیم (۳۸۵ صفحهٔ ماشین شده) کتابش به لنینگراد وارد شد، و در نخستین نشست خود با اعضای سمینار با اختصار سرخط ایده‌های اساسی اثباتش را برای انگارهٔ (B) تشریح کرد. و از همین توضیح او روشن شد که او نه تنها از مفاهیم آنالیز تابعی، بلکه از روش لوونر و نامساوی لبدوف ـ میلین استفاده کرده است. رئیس سمینار (کوزمینا [۳۴]) بیدرنگ به دوبرانژ خاطرنشان کرد که اگر اثبات او درست باشد، می‌باید نمونه‌ای کلاسیک از اثبات وجود داشته باشد، یعنی نمونه‌ای بی‌استفاده از آنالیز تابعی. پاسخ دوبرانژ این بود که مدتها درپی یافتن چنین اثباتی بوده است، اما اینک یقین دارد که چنین نمونه‌ای غیر ممکن است. شنیدن چنین پاسخی برای اعضای سمینار عجیب وشگفت بود. با این وجود چون برای سمینار لنینگراد ساده‌ترین راه بررسی اثبات دوبرانژ این بود که متن اثبات به زبان نگرهٔ توابع هندسی برگردانده شود، کوشش در این راه آغاز شد. گروهی از اعضای سمینار، از جمله املجانوف، فدوروف [۳۵]، گولوزنیا [۳۶]، وشیروکوف [۳۷]، دست نویس دوبرانژ را برای مطالعهٔ دقیق ووسواس گونه از او گرفتند و به خانه بردند. درهمان حال خود دوبرانژ طی چند سخنرانی به تشریح کار خود برای اعضای سمینار پرداخت. همه در انتظار یافتن اشتباهی جدی در کار دوبرانژ بودند، اما اندک اندک آشکار می‌شد که دوبرانژ روشی صحیح برای رسیدن به اثبات دارد و اثبات قضیهٔ اساسی او در اصول درست است. استدلال مربوط به تقریب سازی توسط توابعی از

نوع خاص موردایرادبود ،که اثباتی درست برای آن بآسانی انجام گرفت. همچنین ،برخی ازصورت بندیها واستدلالهای دوبرانژبه زبان نگرهٔ توابع هندسی برگردانده شد.

اوج جدال بین دوبرانژوریاضیدانان لنینگراد هنگامی رخ داد که املجانوف یکی ازنامساویهای مهم واساسی دوبرانژرا تغییرداد ،دراین هنگام بودکه دوبرانژپذیرفت نمونه ای کلاسیک ازاثبات اووجوددارد ،بااین وجوداوهرگزحاضرنبودتانمونهٔ کلاسیک اثبات راجداگانه چاپ کند ،وهمچنان می‌خواست که کتاب خودرا با همان فصل آخرمربوط به انگاره به چاپ رساند. اما پافشاری سمینار درانتشارنمونهٔ کلاسیک اثبات انگارهٔ (B) سرانجام دوبرانژرا متقاعدکرد.

اصلاحات تکمیلی قضیهٔ اصلی دوبرانژتوسط املجانوف وسپس میلین صورت پذیرفت ونمونهٔ کلاسیک اثبات قضیه اول دوبرانژآماده شد. هنوز تردیدها کاملا" ازبین نرفته بود ،می‌بایست دقیقا "بررسی کردکه آیا اثبات قضیهٔ دوم که سرراست به نامساوی $|a_n| \leq n$ می‌پرداخت ،به ازای همهٔ n ها درست است یا نه؟ بررسیهای دقیق وموشکافانه آخرین تردیدها راکنارزد بویژه اینکه آ.ن. کیریلوف(۳۸) اثباتی ساده وکوتاه ازنامساویهای مورد نیازدوبرانژرا ارائه دادوبدین ترتیب نمونهٔ کلاسیک اثبات انگارهٔ (B) به طورکامل آماده شد.

یکباردیگردوبرانژبه اتفاق رئیس سمینارقسمتهای گوناگون اثبات رابتفصیل موردبررسی واصلاح قراردادند ،ودرهمان حال دیگران دوبرانژ رابه انتشارنمونهٔ کلاسیک اثبات ترغیب وتشویق کردند.

درپایان ماه ژوئن ۱۹۸۴ دوبرانژبه اروپا واز آنجا به آمریکا رهسپار شد. او درآخرین گفتگوهایش درلنینگراد گفت: "من به آمریکا برمی‌گردم، اما باز هم هیچکس حرف مرا باور نمی‌کند"

درژوئیه ۱۹۸۴، نخستین انتشار اثبات انگاره‌ٔ بایبرباخ ازجانب ریاضیدانان لنینگراد به پروفسور لوبی‌دوبرانژ تبریک گفته شد. اینک ریاضیدانان جهان می‌توانستند باور کنند که انگاره‌ٔ بایبرباخ واقعاً" اثبات شده است

این مطلب عمدتاً "براساس منابع (۲) و (۳) تهیه شده است و برخی از قسمتهای آن تقریباً "برگردان پاره‌هایی ازهمین منابع است.

فهرست منابع

(۱) اثبات انگاره‌ٔ بایبرباخ، ترجمه‌ٔ رحیم زارع نهندی، خبرنامه‌ٔ انجمن ریاضی ایران، سال ششم، شماره‌ٔ ۳.

(2) Ch.Pommerenke," The Bieberbach Conjecture," The Mathematical Intelligencer, vol.7, No2, 1985.

(3) O.M.Fomenko/G.V.Kuzmina, " the Last 100 days of the Bieberbach conjecture", *The Mathematical Intelligencer*, vol.8, No.1, 1986.

(1) Bieberbach conjecture
(2) Conformaly
(3) Univalent
(4) Koebe
(5) Louis debrange
(6) Novanlina
(7) Starlike
(8) K.Lowner
(9) Parametric Method
(10) Jordan
(11) Paratmetrization
(12) Littlewood
(13) Fitz Gerald
(14) Horowitz
(15) Jean Dieudonne
(16) Robertson
(17) Garabedian
(18) Schiffer
(19) Hyman
(20) Hardy
(21) Charzymski
(22) Grunskay
(23) Pederson
(24) Ozawa
(25) Kubota
(26) N.A.Lebedev
(27) I.M.Milin
(28) Asky
(29) Gasper
(30) Ramanujan
(31) Peteson
(32) Kanozkii
(33) Eneljanov
(34) Kuzmina
(35) Fedorov
(36) Goluzina
(37) Schirokov
(38) A.N.Kirillov