مقـــدمه .

پروفسور ر.پ. فاینمن یکی ازبرجسته تـــــرین و شاخص ترین فیزیکدانهای دورهٔ اخیراست وبه خاطرکارهایـــش درنظریه کوانتومی ،میدان الکترومغناطیسی ونیزکارهایـــش درزمینهٔ فیزیک دماهای پایین مشهوراست .درسال ۱۹۵۴ بـــه سبب سهم بارز وی درپیشبردعلوم ریاضی وفیزیک جایزهٔ آلبـــرت انشتین به وی تعلق گرفت .درسال ۱۹۶۵ به سبب نقش اساسی اش درنظریهٔ کوانتومی الکترودینامیک وفیزیک ذرات بنیـــادی جایزهٔ نوبل فیزیک به وی اهـــداء شد .

مقاله ای که تحت عنوان " رابطهٔ ریاضیات با فیـــزیک" درزیرارائه شده است ،ترجمهٔ متن یک سخنرانی ازمجموعه هفت سخنرانی وی درنوامبر ۱۹۶۴. دردانشگاه کورنل است .

متن اصلی این مجموعه ازسخنرانیهای وی تحت عنـــــوان " خصلت قانون فیزیکی" تاکنون یازده بارتجدیدچاپ شـــده است وترجمهٔ فارسی آن دردست تهیه است .

مترجـــم

پیک ریاضی

جلددوم ،شمارهٔ دوم ،تابستان ۶۶

رابطـــهٔ ریاضیات با فیزیک

نوشتهٔ : ریچاردفاینمن

ترجمهٔ : پرویزمیلانی

به هنگام تفکردرموردکاربردهای ریاضیات درفیزیک ،کاملا" طبیعی است به این نتیجه برسیم که ریاضیات هنگامی مفیدخواهدبودکه با اعـــداد بزرگ دروضعیتهای پیچیده سروکارداریم .مثلا" درزیست شناسی کنش یـــک ویروس روی یک باکتری غیرریاضی است .اگراین اثررا زیرمیکروسکوپ تماشا کنیم ،ویروس کوچک ولرزان نقطه ای را روی یک باکتری که شکل غریبـــی دارد- باکتریها همه دارای شکلهای متفاوتی هستند- می یابدوممکن است DNA اش رادرآن فروکندویانکند .درعین حال اگرآزمایش را با میلیونها میلیون باکتری وویروس انجام دهیم ،با میانگین گیری مقدارزیادی در - موردویروسها خواهیم آموخت .می توانیم ریاضیات رادرمحاسبهٔ میانگین به کاربریم ،وببینیم که ویروس درباکتری نفوذمی کندیانه ،ویا با چه کششهای جدید ،وبا چه درصدی،وبنابراین ژنتیک ،جهش وغیره را بررسی کنیم .

مثال پیش پا افتاده تریعنی یک تختهٔ بسیاربزرگ برای بازی شطرنج یا تاس بازی رادرنظرمی گیریم .انجام هرمرحله ازبازی ریاضی نیست- یـــا ریاضی آن بسیارساده است .ولی می توانیم تصورکنیم که روی یک میزبسیـــار

بزرگ ،با تعداد بسیار زیادی از قطعات بازی،تحلیل بهترین حرکت ،ویا حرکتهای خوب یا حرکتهای بد ،بایستی با استدلال عمیقی صورت گیرد که احتمالا "شخص باید قبلا" بدقت در مورد آن فکر کرده باشد .این دیگر ریاضیات است ،زیرا که با استدلال مجرد سروکار داریم .یک مثال دیگر ساختن مدارهای کامپیوتر است .اگر راه گزینی (سویچی) که می‌تواند یا روشن باشد ویا خاموش ـ گرچه ریاضی دانها علاقه مندند که ریاضیاتشان را از اینجا شروع کنند ـ هیچ جیز آن ریاضی نیست .ولی برای آنکه بتوانیم بگوئیم یک سیستم خیلی بزرگ ،با همه اتصالها و سیمهایش چگونه عمل خواهد کرد به ریاضیات احتیاج داریم .

بدون معطلی می‌خواهم بگویم که در بحث پدیده‌های جزئی در وضعیتهای پیچیده ریاضیات کاربرد فوق العاده‌ای در فیزیک دارد ،و قواعد بنیادی بازی را تضمین می‌کند .اگر می‌خواستم فقط درباره‌ٔ رابطهٔ ریاضی و فیزیک صحبت کنم ،این مطلبی بود که بیشتر وقتم را صرف بحث در مورد آن می‌کردم . ولی چون این مبحث بخشی از یک سری سخنرانی درباره‌ٔ ویژگی قانون فیزیکی است فرصت آن را ندارم بحث کنم که در وضعیتهای پیچیده چه رخ می‌دهد ، بلکه فورا " به سوال دیگر ،یعنی ویژگی قوانین اساسی می‌پردازم .

اگر به بازی شطرنج برگردیم ،قوانین اساسی،قواعدی هستند که برطبق آن شطرنج بازها حرکت می‌کنند .در وضعیتهای پیچیده می‌توان ریاضیات را ـ برای پاسخگویی به این مساله به کار برد که در یک شرایط داده شده حرکت خوب کدام است .ولی برای ویژگی اساسی قوانین پایه ،ریاضیات بسیار کمی مورد نیاز است و این ریاضی را می‌توان به زبان محاوره‌ای برای شطرنج باز توضیح داد .

مساله عجیب در فیزیک آن است که ،برای قوانین بنیادی هم به ریاضی نیازمندیم .من دو مثال خواهم آورد ،یکی مثالی که در آن ما واقعا "به ریاضی

نیاز نداریم ،و دیگری مثالی که در آن به ریاضی احتیاج داریم .مثال اول ، قانونی در فیزیک وجود دارد که قانون فاراده نامیده می‌شود ،و می‌گوید که در برقکافت (الکترولیز) مقدار ماده‌ای که رسوب می‌کند با شدت جریان و با مدت زمانی که جریان عمل می‌کند متناسب است .به عبارت دیگر مقدار ماده‌ای که رسوب می‌کند با مقدار بار الکتریکی که از سیستم می‌گذرد متناسب است .این مساله خیلی ریاضی به نظر می‌رسد ،ولی آنچه واقعا "رخ می‌دهد آن است که الکترونهایی که از سیم می‌گذرند هریک حامل یک بار هستند .مثال خاصی را در نظر بگیریم که در آن برای رسوب یک اتم نیاز به آمدن یک الکترون باشد ،بنابراین تعداد اتمهایی که رسوب می‌شوند لزوما "مساوی تعداد الکترونهایی است که جریان می‌یابند ،و بنابراین با باری که از سیم می‌گذرد متناسب است .بنابراین قانونی که ظاهرش ریاضی است ،در باطن هیچ چیز عمیقی ندارد ،نیاز به معلومات واقعی ریاضی نیست .فکر می‌کنم ،اینکه هر اتم برای رسوب دادن خودش نیاز به یک الکترون دارد ریاضی باشد ،ولی این آن نوع ریاضیاتی که من در اینجا درباره‌اش صحبت می‌کنم نیست

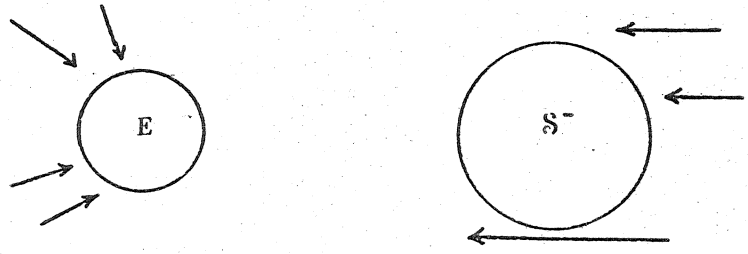
از طرف دیگر قانون نیوتن برای گرانش را در نظر بگیریم .من معادلهٔ

$$F = G\frac{mm'}{r2}$$

را به این جهت به شما می‌دهم تا شما را با سرعتی که نمادهای ریاضی می‌توانند اطلاعات را منتقل کنند تحت تاثیر قرار دهم .ملاحظه می‌کنید که نیرو با حاصل ـ ضرب جرمهای دو جسم و به طور عکس با مربع فاصلهٔ بین آنها متناسب است ، و نیز اجسام با تغییر سرعت یا حرکتشان در جهت نیرو به اندازه‌ای که با نیرو متناسب و با جرم آنها تناسب عکس دارد ،نسبت به نیرو واکنش نشان می‌دهند . خوب ،اینها کلماتند و من لزوما " مجبور نیستم معادله را بنویسم .مع هذا این نوعی ریاضی است ،و ما در حیرتیم چگونه این می‌تواند یک قانون بنیادی

باشد. سیاره چکار می‌کند؟ آیا به خورشید نگاه می‌کند، فاصله‌اش را در نظر می‌گیرد، و تصمیم می‌گیرد در ماشین محاسبهٔ داخلی‌اش عکس مربع فاصله را حساب کند، و در می‌یابد چقدر حرکت کند؟ توصیف نحوهٔ کارگرانش به طور قطع این نیست. شما می‌توانید بیشتر بررسی کنید، و افراد دیگری نیز سعی کرده‌اند مساله را بیشتر بشکافند. نیوتون ابتدا در مورد نظریه‌اش مورد سوال قرار گرفت: "ولی این بی معنی است ــ هیچ چیزی به ما نمی‌گوید". نیوتون جواب داد: "به شما می‌گوید چطور حرکت می‌کند. این بایستی کافی باشد. من به شما گفته‌ام [جسم] چگونه حرکت می‌کند، نه اینکه چرا حرکت می‌کند." ولی مردم اغلب بدون وجود سازوکاری که گرانش را توصیف کند ناراضی‌اند، و من می‌خواهم از میان چند نظریه‌ای که ابداع شده‌اند، نظریه‌ای از آن نوع که شما ممکن است به آن علاقه‌مند باشید را توضیح دهم. این نظریه پیشنهاد می‌کند که این اثر [گرانش] نتیجهٔ تعداد زیادی کنشهایی است که توضیح خواهد داد چرا این قانون ریاضی است.

تصور کنید همه‌جای جهان پر از ذراتی باشد که از میان ما با سرعت بسیار زیادی پرواز می‌کنند. این ذرات به طور یکسان از تمام جهات می‌آیند از مجاورمان همچون صفیری می‌گذرند. و هر از گاهی به ما برخورد می‌کنند. ما و خورشید عملا" برای آنها شفاف هستیم، البته عملا" و نه کاملا"، و برخی از آنها برخورد می‌کنند. پس حالا دقت کنید چه رخ خواهد داد. (شکل ۱).



شکل ۱

S خورشید است، و E زمین. اگر خورشید آنجا نبود، ذرات از همه طرف زمین را بمباران می‌کردند، و تکانهای کوچکی به آن می‌دادند. چون از بالا و پائین و از همه طرف ذرات به تعداد مساوی می‌آیند، این برخوردها زمین را در هیچ راستای خاصی تکان نخواهد داد. ولی واقعا" "خورشید آنجاست، و بخشی از ذراتی که از راستای خورشید می‌آیند، چون با خورشید برخورد می‌کنند و از آن نمی‌گذرند توسط خورشید جذب خواهند شد. بنابراین تعدادی که از راستای خورشید به سوی زمین می‌آیند چون با مانعی، یعنی خورشید، برخورد می‌کنند از تعدادی که از راستاهای دیگر می‌آیند کمترند. بسادگی دیده می‌شود که هرچه خورشید دورتر باشد بخش کوچکتری از ذراتی که از تمام راستاها می‌آیند، کاسته می‌شود. خورشید در اصل به صورت عکس مربع فاصله کوچکتر به نظر خواهد رسید. بنابراین در سوی خورشید ضربه‌ای به زمین وارد خواهد شد که به طور عکس با مربع فاصله تغییر می‌کند. و این نتیجه مقدار زیادی اعمال بسیار ساده، یعنی برخوردهای پشت سرهم و یکی از دیگری از همه راستاها خواهد بود. بنابراین به مقدار زیادی از ناماتوسی رابطهٔ ریاضی کاسته خواهد شد. زیرا عمل اصلی بسیار ساده‌تر از محاسبهٔ عکس مربع فاصله است. محاسبه را این طرح، با ذراتی که برخورد و جهش می‌کنند، انجام می‌دهد.

تنها اشکال این طرح آن است که به دلایل دیگری این طرح درست از آب درنمی‌آید. هر نظریه که می‌سازید بایستی در مقابل همهٔ پیامدهای ممکن تحلیل شود، و روشن شود آیا چیز دیگری را نیز پیش بینی می‌کند یا نه. طرحی که در بالا ذکر کردیم، چیز دیگری را پیش بینی می‌کند. اگر زمین حرکت کند، تعداد ذراتی که از جلو برخورد می‌کنند بیشتر از تعدادی خواهد بود که از پشت برخورد می‌کنند. (اگر شما در باران بدوید، چون به داخل باران می‌دوید باران بیشتری به صورت شما برخورد می‌کند تا به پشت سرشما.) بنابراین اگر زمین

حرکت می‌کند یعنی به داخل ذراتی که به سوی زمین می‌آیند و به دور از آنهایی که آن را از عقب تعقیب می‌کنند می‌دود. در نتیجه تعداد بیشتری ذره از جلو برخورد خواهند کرد تا از عقب، و نیرویی به وجود می‌آید که با هر حرکتی مقابله می‌کند. این نیرو سبب خواهد شد حرکت زمین در مدارش کند شود، و در این صورت مطمئنا" حرکت زمین به گذر خورشید نمی‌تواند (حداقل) سه یا چهار بلیون سال ادامه یابد. این پایان این نظریه است. شما خواهید گفت، " خوب، نظریهٔ خوبی بود، برای مدتی از قید ریاضیات آزاد شده بودم. شاید بتوانم نظریهٔ بهتری اختراع کنم." ممکن است بتوانید، چون هیچکس پایان کار را نمی‌داند. ولی از زمان نیوتون تاکنون هیچکس نتوانسته است برای ریاضیاتی که در پس این قانون وجود دارد یک توصیف نظری اختراع کند مگر آنکه یا باز هم همان چیز را بیان کند و یا ریاضیات آن را مشکلتر سازد و یا پدیده‌هایی را پیش بینی کند که نادرست هستند. بنابراین امروزه به غیر از شکل ریاضی هیچ مدلی برای نظریهٔ گرانش وجود ندارد.

اگر گرانش تنها قانونی بود که این ویژگی را داشت، این امر جالب و قدری نگران کننده بود. ولی آنچه به نظر می‌رسد درست باشد آن است که هر چه بیشتر تحقیق می‌کنیم. و به کشف قوانین جدید نائل می‌شویم، و به طور عمیقتری در طبیعت نفوذ می‌کنیم. این عارضه بیشتر رخ می‌دهد. هر کدام از قوانین ما یک بیان ریاضی صرف با ریاضیاتی نسبتا" پیچیده و غامض است. بیان نیوتونی قانون گرانش ریاضی نسبتا" ساده‌ای دارد. هر چه بیشتر می‌رویم ریاضیات قوانین غامض‌تر و مشکلتر می‌شود. چرا؟ من کمترین اطلاعی در این مورد ندارم. محور این نوشتار تاکید این واقعیت است که بیان درست زیبائیهای قوانین طبیعت به گونه‌ای که عامه آن را احساس کنند، بدون آنکه آنها درک عمیقی از ریاضی داشته باشند غیر ممکن است.

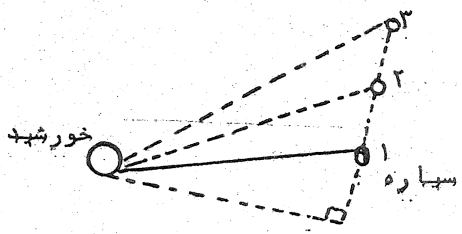
متاسف هستم، ولی به نظر می‌رسد که این چنین باشد.

ممکن است بگوئید، " خوب، اگر توصیفی از قانون وجود ندارد، حداقل به من بگوئید قانون چیست. چرا به جای نمادها آن را با کلمات نمی‌گوئید؟ ریاضیات فقط یک زبان است، و من می‌خواهم قادر به ترجمهٔ این زبان باشم" در واقع با قدری شکیبایی می‌توانم و فکر می‌کنم تا حدی هم انجام داده‌ام. — می‌توانستم اندکی پیشتر بروم و با تفصیل بیشتری توصیف کنم که معنی معادله آن است که اگر فاصله دو برابر شود نیرو یک چهارم است وغیره. می‌توانستم تمام نمادها را به کلمات بدل کنم. به عبارت دیگر می‌توانستم با عوامی که نشسته‌اند و با امیدواری منتظرند تا من چیزی را توصیف کنم مهربانتر باشم. بعضیها برای مهارتشان در توصیف این موضوعات مشکل و غامض برای عوام به زبان خودشان شهرتی به هم رسانده‌اند. آنگاه آن عامی به این امید که از پیچیدگیهایی که لاجرم حتی برای بهترین مفسر از این نوع بروز می‌کند پرهیز کند کتابها را یکی پس از دیگری جستجو می‌کند. هر چه بیشتر می‌خواند سردرگمی فزاینده‌ای برایش به وجود می‌آید: بیانی پیچیده پس از دیگری، مطلب غیر قابل درک و مشکلی پس از دیگری، و همه مطالب ظاهرا" نامربوط به هم. مطلب مبهم می‌شود و وی امیدوار است که شاید در یک کتاب دیگر توضیحی برای آن بیابد... . این مولف تقریبا" مطلب را توضیح داده است — شاید دیگری آن را بهتر توضیح دهد.

ولی من فکر نمی‌کنم امکانپذیر باشد، چون ریاضیات فقط یک زبان نیست. ریاضیات یک زبان به اضافهٔ استدلال است، ریاضیات مانند زبان به اضافهٔ منطق است. ریاضیات ابزاری برای استدلال است. ریاضیات در واقع مجموعهٔ بزرگی از تفکرات و استدلالهای دقیق یک فرد است. با ریاضیات می‌توان جمله‌ای را به جملهٔ دیگر مربوط کرد. مثلا"، می‌توانم بگویم که نیرو

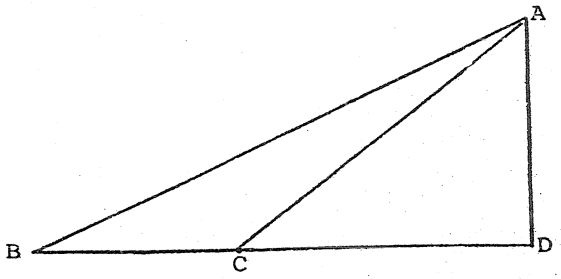
به طرف خورشید است. همچنین همان طور که قبلا "هم گفتم می‌توانم بگویم که سیاره چنان حرکت می‌کند که اگر از خورشید خطی به سیاره بکشیم و پس از یک دوره معین مثلا" سه هفته بعد خط دیگری رسم کنیم، با گردش سیاره دور خورشید سطحی که توسط آن جارو می‌شود دقیقا "با آنچه در سه هفته بعد و... غیره جارو خواهد شد یکی است. من می‌توانم هر دو این جمله‌ها را بدقت توصیف کنم. ولی نمی‌توانم توضیح دهم چرا این دو جمله به یک معنی هستند. پیچیدگیهای عظیم ظاهری طبیعت، با همهٔ قانونها و قواعد مضحکش، که هرکدام از آنها بدقت توضیح داده شده است، واقعا" با هم ارتباط نزدیکی دارند. مع‌هذا اگر شما ارزش ریاضیات را احساس نکنید در میان حقایق بسیار متنوع نمی‌توانید تشخیص دهید که منطق به شما اجازه می‌دهد از یکی به دیگری بروید.

شاید با ورکردنی نباشد که من می‌توانم نشان دهم اگر نیروها سوی خورشید باشند، سطوح جاروشدهٔ در زمانهای مساوی، یکی خواهد بود. بنابراین اگر بخواهید نشان خواهم داد که این دو جمله واقعا "معادلند و بنابراین شما می‌توانید بیش از بیان صرف دو قانون آنها را احساس و تحسین کنید. من نشان خواهم داد که دو قانون بهم مربوطند به طوریکه استدلال صرف شما را از یکی به دیگری می‌رساند، و ریاضیات صرفا" استدلال سازمان یافته است. در نتیجه زیبایی ارتباط دو جمله را تحسین خواهید کرد. می‌خواهم این ارتباط را که اگر نیروها سوی خورشید باشند در زمانهای مساوی سطوح مساوی جارو می‌شوند ثابت کنم.



شکل ۲

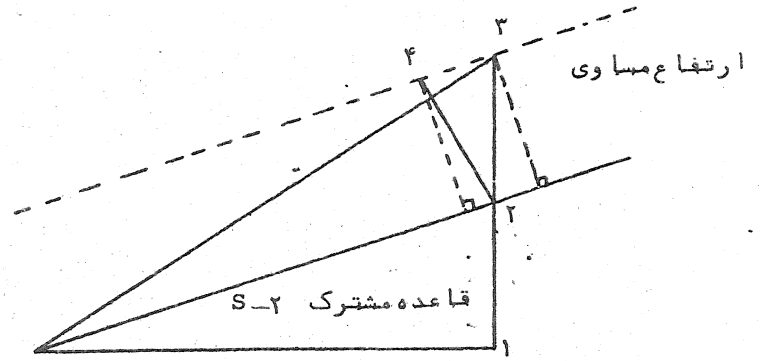
با یک خورشید و یک سیاره شروع می‌کنیم (شکل ۲)، و فرض می‌کنیم در یک لحظه معین سیاره در مکان ۱ باشد. سیاره به نحوی حرکت می‌کند که مثلا "یک ثانیه بعد به مکان ۲ رفته است. اگر خورشید نیرویی به سیاره وارد نکند بر اساس اصل گالیله‌ای لختی، سیاره حرکت مستقیم‌اش را حفظ خواهد کرد. بنابراین بعد از همان فاصله زمانی یعنی یک ثانیه بعد، دقیقا "همان مسافت را روی همان خط مستقیم طی کرده و به مکان ۳ خواهد رفت. ابتدا می‌خواهیم نشان دهیم که اگر نیرویی وجود نداشته باشد، در زمانهای مساوی سطوح مساوی جارو می‌شود. یادآوری می‌کنم که مساحت یک مثلث عبارت از نصف قاعده ضربدر ارتفاع است، و ارتفاع فاصله عمودی تا قاعده است. اگر مثلث منفرجه باشد (شکل ۳) ارتفاع عبارت از فاصله عمودی AD تا قاعده BC است. حال بگذارید سطوحی را که وقتی خورشید هیچ نیرویی وارد نکند جارو خواهد شد مقایسه کنیم (شکل ۲).



شکل ۳

به خاطر داشته باشید که فاصلهٔ ۱–۲ و ۲–۳ مساوی اند. سوال این است که آیا دو سطح مساوی اند؟ مثلثی را که از خورشید و دو نقطهٔ ۱ و ۲ ساخته می‌شود در نظر بگیرید. سطح آن چقدر است؟ سطح آن مساوی حاصلضرب قاعدهٔ ۱–۲ در نصف فاصله عمودی S از خط قاعده است. مثلث دیگر یعنی مثلث مربوط به حرکت از ۲ به ۳ چطور. سطح آن عبارت است از قاعدهٔ ۲–۳ ضربدر نصف ارتفاع

عمودی تا S .دو مثلث یک ارتفاع دارند و همان طور که قبلا" ذکر کردیم دارای قاعده مساوی هستند و بنابراین سطح آنها یکی است .خوب تا اینجا که اشکالی نیست .اگر از طرف خورشید نیرویی نبود .در زمانهای مساوی سطحهای مساوی جارو می‌شد .ولی نیروی خورشید وجود دارد .در فاصلهٔ زمانی ۱–۲–۳ خورشید سیاره را به طرف خود می‌کشد و حرکت را در راستاهای مختلف به طرف خود تغییر می‌دهد .برای آنکه تقریب خوب باشد ،نقطهٔ مرکزی یا مکان متوسط را در ۲ انتخاب می‌کنیم ،و می‌گوئیم که آنچه در فاصله زمانی ۱–۳ انجام شد تغییر حرکت به میزان کمی در راستای S–۲ بود (شکل ۴).



شکل ۴

یعنی گرچه ذرات روی خط ۱–۲ حرکت می‌کردند ،واگر نیرویی نمی‌بود ،در ثانیه بعدی نیز روی همان خط به حرکت خود ادامه می‌دادند ،به علت اثر خورشید وکشش در راستای به موازات خط S–۲ حرکت اندکی تغییر می‌کند .بنابراین حرکت بعدی ترکیب آنچه سیاره می‌خواست انجام دهد و تغییری که در اثر کشش خورشید القاء شده است خواهد بود .بنابراین حرکت سیاره واقعا "به جای مکان ۳ به مکان ۴ منتهی می‌شود .حالا می‌خواهیم مساحت مثلثهای S۲۳ و S۲۴ را مقایسه کنیم و من به شما نشان خواهم داد که این دو مساوی هستند .قاعدهٔ

آنها یعنی S–۲ مشترک است .آیا ارتفاع آنها هم یکی است ؟ البته ، چون هر دو آنها بین دو خط موازی واقع هستند .فاصلهٔ از ۴ تا خط S–۲ مساوی فاصلهٔ ۳ تا (ادامه) خط S–۲ است .بنابراین مساحت مثلث S۲۴ و S۲۳ یکی است .من قبلا" ثابت کردم که مساحت S۱۲ و S۲۳ مساوی هستند ، بنابراین حالا می‌دانیم که S۲۴ = S۱۲ .بنابراین در حرکت مداری واقعی سیاره مساحتهای جاروشده در ثانیه اول و ثانیه دوم مساوی اند .بنابراین با استدلال می‌توانیم رابطهٔ بین این واقعیت که نیرو به طرف خورشید است ،و این واقعیت که مساحتها مساوی اند را ببینیم .آیا این هوشمندانه نیست ؟ من مستقیما" آن را از نیوتن عاریه گرفتم .این اثبات با نمودارها و همهٔ آنها مستقیما" از پرینسیپیا استخراج شده است ،فقط حروف متفاوتند چون او با شمارهای رومی می‌نوشت و اینها شمارهای عربی هستند .

نیوتون در کتابش تمام اثباتها را به طور هندسی انجام داده است . امروزما آن نوع استدلال را به کار نمی‌بریم ،بلکه به کمک نمادها نوعی استدلال تحلیلی را به کار می‌بریم .ترسیم مثلثهای صحیح ،توجه به مساحتها وتعیین اینکه چگونه باید این را انجام داد نیاز به نبوغ دارد .ولی در روشهای تحلیلی ،سریعتر و کارآمدتر هستند ،پیشرفتهایی صورت گرفته است .می‌خواهم نشان بدهم این اثبات برحسب نمادگذاری ریاضیات جدیدتر که شما برای به دست آوردن آن به جز نوشتن تعداد زیادی نمادکاری انجام نمی‌دهید به چه شکلی است .

من می‌خواهم در این باره که مساحت با چه سرعتی عوض می‌شود صحبت کنم ، و من این را با A^0 نمایش می‌دهم .مساحت وقتی عوض می‌شود که شعاع دور بزند . و میزان عوض شدن سطح برابر مولفهٔ سرعت در راستای عمود بر شعاع ضربدر شعاع است و این مقدار نشان می‌دهد با چه سرعتی مساحت عوض می‌شود .بنابراین

این تغییرعبارت است ازمولفهٔ حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی درسرعت ،یا میزان تغییرفاصله .

$$A^{0}=\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

حالاسوال این است که آیا میزان عوض شدن مساحت خودش عوض می‌شود . اصل آن است که میزان عوض شدن سطح قرارنیست عوض شود .بنابراین مجددا" ازآن مشتق می‌گیریم ،واین به معنی فوت وفنی درموردقراردادن نقطه‌ها درجاهای مناسب است وفقط همین. شما مجبوریداین فوت وفنها را بیاموزید .اینها فقط رشته‌ای ازقواعداندکه مردم‌پی برده‌اندکه برای چنین محاسباتی مفیدند .می‌نویسیم :

$$\ddot{A}=\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=\vec{r}\times\vec{F}/m$$

جملهٔ اول به معنی آن است که مولفهٔ سرعت رادرراستای عمودبرسرعت پیدا کنید .این مولفه صفراست ،سرعت درهمان راستای خودش است .شتاب که مشتق دوم یعنی r نسبت دونقطه روی آن ،ویا مشتق سرعت است ،عبارت ازنیرو تقسیم برجرم است .

بنابراین این رابطه می‌گویدکه میزان تغییرآهنگ تغییرمساحت عبارت است ازمولفه نیرودرراستای قائم برشعاع ،ولی اگرهمان طورکه نیوتون می‌گفت نیرودرراستای شعاع است ،

$$\ddot{A}=0 \qquad \text{یعنی} \qquad \vec{r}\times\vec{F}/m=0$$

پس نیرودرراستای عمودبرشعاع ،مولفه ندارد ،واین به معنی آن است که میزان تغییرمساحت تغییرنمی‌کند .آنچه گفته شددرواقع صرفا" قدرت تحلیل توسط انواع متفاوت قراردادها رانشان می‌دهدباکمی اختلاف درعلائم ،نیوتون می‌دانست این کاررا کم‌یا زیادچگونه انجام دهد ،ولی

وی همه‌چیزرا به‌شکل هندسی نوشت ،چون وی سعی کردخواندن مقاله‌هایش رابرای مردم‌ممکن سازد .ولی حسابان (حساب‌دیفرانسیل وانتگرال)راکه ازنوع ریاضیاتی است که من هم‌اکنون ارائه‌کردم اختراع‌کرد .

این نمایش خوبی‌ازرابطهٔ ریاضیات بافیزیک است .وقتی مسائل فیزیک مشکل می‌شوند اغلب ممکن‌است‌به‌ریاضیدانان مراجعه‌کنیم‌وآنها ممکن است چنین چیزهایی راقبلا" بررسی کرده‌وبرای مایک خط منطقی آماده‌کرده‌باشندتاآن رادنبال کنیم .ازطرف‌دیگرممکن است چنین نکرده باشند ،که‌دراین صورت مجبوریم‌خط استدلال موردنیازمان راابداع‌وسپس آن رابه‌ریاضیدانان برگردانیم .هرکس که بدقت درموردچیزی تعقل می‌کنددرواقع درموردانشی که‌وقتی شما به‌چیزی فکرمی‌کنیدچه‌رخ می‌دهد ، مشارکت می‌کند ،واگرشماآن رابه‌صورت مجرددرآوریدوبه‌بخش ریاضی‌بفرستید آنهاآن رابه‌عنوان شاخه‌ای ازریاضیات درکتابها جای می‌دهند .پس ، ریاضیات طریق رفتن ازیک مجموعه‌به‌مجموعه‌دیگری ازاحکام است .ریاضیات مسلما" برای فیزیک مفیداست ،چون روشهای مختلفی که می‌توانیم‌درمورد چیزها صحبت‌کنیم‌ارائه می‌کند ،وریاضیات به‌ما اجازه می‌دهدتانتایج راتوسعه دهیم ،وضعیتها راتحلیل کنیم ،وبرای مربوط ساختن احکام‌مختلف به‌هم قوانین رابه‌طرق متفاوتی عوض‌کنیم .درحقیقت‌کل آنچه‌یک فیزیکدان‌می‌داند خیلی کم‌است .وی فقط بایستی قواعدی راکه‌اورا ازجایی به‌جای دیگر می‌رساندبیاوردواین کافی‌است ،چون تمام‌احکام‌مختلف درباره‌زمانهای مساوی ،درراستای شعاع‌بودن نیروها ،وغیره‌به‌دلایلی به‌هم‌مربوطند .

حال یک سوال جالب بروزمی‌کند .آیا نقطه‌ای وجوددارد‌که‌باشروع ازآن همه‌چیزرانتیجه‌گرفت ؟ آیا گرته‌یا نظم‌به‌خصوصی درطبیعت وجوددارد که‌به‌کمک آن بفهمیم‌که‌یک مجموعه‌ازاحکام‌بنیادی ترندویک مجموعه

از احکام استنتاجی‌تر؟

به ریاضیات می‌توان به دو طریق نگاه کرد، که به خاطر هدف این نوشتار من آنها را سنت بابلی و سنت یونانی می‌نامم. در مکاتب بابلی ریاضی تا زمانی که قاعدهٔ کلی برای دانش‌آموز جا بیافتد، وی هر مطلب را با حل تعداد زیادی مثال یاد می‌گیرد. دانش‌آموز همچنین مقدار زیادی هندسه، مقدار زیادی از خواص دوایر، قضیه فیثاغورس، فرمول مساحت مکعب و مثلث را باید یاد می‌گرفت، علاوه بر این تعدادی براهین در دسترس وی بود تا بتواند از یک چیز به دیگری برسد. جداول مقادیر عددی هم در دسترس بود به طوری که می‌توانستند معادلات پرزحمتی را حل کنند. همه چیز برای محاسبه هر چیزی آماده بود. ولی اقلیدس کشف کرد راهی وجود دارد که به کمک آن همه قضایای هندسه را می‌توان از یک مجموعه اصول موضوع که عملاً" ساده بودند به دست آورد. روش بابلی- یا آنچه من ریاضیات بابلی خواندم- روشی است که شما تمام قضایای مختلف و خیلی از روابط بین آنها را می‌دانید، ولی هرگز کاملاً" متوجه نشده‌اید که تمام آنها را می‌توان از یک دسته اصول موضوع به دست آورد. نوین‌ترین بخش ریاضیات در محدودهٔ چارچوبی کاملاً" معین از قراردادها که مشخص می‌کنند به چه چیزی به عنوان اصل موضوع قابل قبول است و چه چیزی قابل قبول نیست، روی اصول موضوع و اثباتها متمرکز است. هندسه نوین چیزی شبیه به اصول موضوع اقلیدس را در بر می‌گیرد که برای کامل ترشدن، حک و اصلاح شده‌اند، و نحوه نتیجه‌گیری دستگاه [هندسی] را هم نشان می‌دهند. مثلاً"، انتظار نمی‌رود قضیه‌ای مثل قضیه فیثاغورس (که جمع مساحت مربعهایی که روی دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شوند مساوی مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود است) یک اصل موضوع باشد. از طرف دیگر، بنا بر دیدگاهی از هندسه یعنی هندسهٔ دکارتی، قضیهٔ فیثاغورس

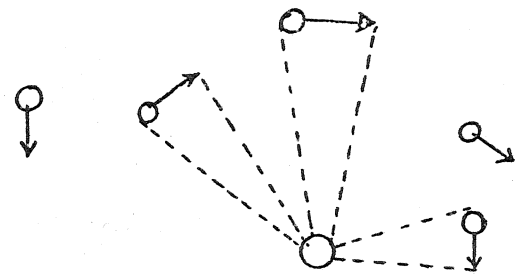
یک اصل موضوع است.

بنابراین نخستین چیزی را که بایستی بپذیریم این است که حتی در ریاضیات نیز شما می‌توانید از جاهای مختلف شروع کنید. اگر همه این قضایای مختلف به کمک یک روش استدلالی به هم مربوط نمی‌شدند هیچ راه واقعی وجود نداشت که بگوییم و اینها بنیادی‌ترین اصول موضوع هستند، زیرا اگر به شما چیز متفاوتی گفته می‌شد، در عوض می‌توانستید استدلال را به طریق دیگری انجام دهید. این ساختار شبیه به پلی با قطعات زیاد، با اتصال‌های اضافی است، اگر قطعاتی گم شده باشند شما می‌توانید مجدداً" آن را به طریق دیگری متصل کنید. ریاضیاتی که امروز معمول است از ایده‌های به خصوصی شروع می‌شود که برطبق نوعی قرارداد به عنوان اصول موضوع انتخاب شده‌اند، و سپس از روی آن ساختار مورد نظر بنا می‌شود. آنچه که من آن را نظر بابلی نامیده‌ام می‌گوید. "اتفاقاً" من این را می‌دانم، و اتفاقاً" آن را می‌دانم، و ممکن است آن یکی را نیز بدانم و من همه چیز را از اینجا به دست می‌آورم. فردا ممکن است درستی آن را فراموش کنم، ولی چیز دیگری را که درست است به خاطر می‌آورم، بنابراین می‌توانم همهٔ آن را مجدداً" بازسازی کنم. هرگز کاملاً" مطمئن نیستم از کجا بایستی شروع و به کجا ختم کنم. من فقط همواره به قدر کافی به یاد دارم که اگر چیزی از خاطرم رفت و قطعه‌ای گم شد می‌توانم مجدداً" آنها را در جای خودشان قرار دهم." این که برای به دست آوردن قضایا همیشه از اصول موضوع شروع کنیم کارآیی زیادی ندارد. در هندسه اگر بخواهید هر وقت که بایدچیزی را ثابت کنید از اصول موضوع شروع کنید کارآیی زیادی نخواهید داشت. اگر در هندسه مجبورید چند چیز را به خاطر بسپارید، همیشه می‌توانید به چیز دیگری برسید، ولی با انجام این عمل بروش دیگری می‌توان کارآیی بیشتری داشت. تعیین این که کدامیک از اصول موضوع بهترین آنهاست لزوماً "کارآمدترین

نحوه مسیر در محدوده هندسه نیست. در فیزیک روش بابلی مورد نیاز ماست، و نه روش اقلیدسی یا یونانی. میل داریم توضیح دهیم چرا.

در روش اقلیدس مساله این است که چیزهایی درباره اصول موضوع که اندکی جالبتر و مهمتر باشند سازیم. ولی، مثلا"، در مورد گرانش سئوالی که می پرسیم این است که، آیا اگر بگوییم نیرو به طرف خورشید است مهمتر، بنیادی تر، یا اصل موضوع بهتری است یا اینکه بگوییم در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی جاروب می شوند؟ از لحاظی عبارت نیرو بهتر است. اگر بگوییم که نیروها چه هستند، چون عبارت نیرو نحوه کشش یکی روی دیگری را به من می گوید می توانم نظام متشکل از ذرات زیادی را که در آن مدارها دیگر بیضی نیستند را مطالعه کنم. در این مورد قضیه مساحتهای مساوی با شکست روبرو می شود. بنابراین من فکر می کنم که به عوض این یکی قانون نیرو بایستی اصل موضوع باشد. از طرف دیگر، برای یک نظام متشکل از تعداد زیادی ذرات، اصل مساحتهای مساوی را می توان به قضیه دیگری تعمیم داد که نسبتا" پیچیده است، و به زبانی بیان اولیه یعنی بیان مربوط به مساحتهای مساوی نیست، ولی مسلما" نتیجه ای است که از آن حاصل می شود. نظام متشکل از تعداد زیادی ذرات مثلا" زهره، مریخ، خورشید، و ستارگان بسیاری را که همگی با هم برهم کنش می کنند در نظر بگیرید و آن را که روی صفحه ای تصویر شده است از دور نگاه کنید (شکل ۵). همه ذرات در راستاهای متفاوتی حرکت می کنند و ما نقطه ای را انتخاب می کنیم و توسط شعاعی که این نقطه را به هریک از ذرات متصل می کند، حساب می کنیم چه مساحتی جاروب می شود. در این محاسبه اثر جرمهایی که سنگین ترند بیشتر است، سطح مربوط به ذره ای که دو برابر سنگین تر از دیگری است، دو برابر به حساب می آید. بنابراین هریک از مساحتهای جاروب شده را متناسب با جرمی که سطح را جاروب می کند به حساب می آوریم، همه آنها را جمع می کنیم، و نتیجه کل به

دست آمده با زمان تغییر نمی کند. این مجموع اندازه حرکت زاویه ای نامیده می شود، و این قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه ای نامیده می شود. پایستگی درست به این معنی است که این کمیت تغییر نمی کند.



شکل ۵

یکی از نتایج این پایستگی به ترتیب زیر است. تعداد زیادی ستاره را که با هم سحابی یا کهکشانی را تشکیل دهند در نظر بگیرید. در ابتدا آنها از هم خیلی دورند، فاصله شعاعی آنها از مرکز بزرگ است، و با سرعت کمی حرکت می کنند و سطح کوچکی تولید می کنند. با نزدیک شدن به هم فاصله ها تا مرکز کوتاهتر خواهد شد، و وقتی خیلی نزدیک اند شعاع خیلی کوچک خواهد بود بنابراین برای آنکه در هر ثانیه همان مساحت جاروب شود بایستی خیلی سریعتر حرکت کنند. بنابراین می بینید که با نزدیک شدن ستارگان به هم آنها سریعتر و سریعتر گردش و دوران خواهند کرد، و به این ترتیب شکل کیفی سحابی مارپیچ برای ما قابل فهم است. به همین نحو می توانیم بفهمیم یک اسکیت باز چگونه می چرخد. وی با حالتی که ساق پایش به بیرون کشیده است شروع می کند و به آرامی حرکت می کند، و با خم کردن ساقش به داخل سریعتر می چرخد. وقتی ساق به بیرون کشیده است در هر ثانیه سهم معینی از سطح دارد، و وقتی ساقش را به داخل می کشد باید سریعتر به چرخد تا همان مقدار سطح را در هر ثانیه تولید کند. ولی من برای اسکیت باز مساحتهای مساوی را با بهت

نکردم: اسکیت باز نیروی ماهیچه‌اش را به کار می‌برد، وگرانش نیروی متفاوتی است. مع هذا، این مطلب در مورد اسکیت باز هم صادق است.

حال مساله‌ای برای ما وجود دارد. اغلب از یک قسمت فیزیک، مثل قانون گرانش، می‌توانیم اصلی را که خیلی معتبرتر از استنتاج آن است به دست آوریم. چنین اتفاقی در ریاضیات رخ نمی‌دهد، قضیه‌ها در جاهایی که انتظارشان نمی‌رود ظاهر نمی‌شوند. به عبارت دیگر، اگر قرار بود بگوئیم قانون مساحتهای مساوی فرضیهٔ فیزیک برای گرانش است، می‌توانستیم پایستگی اندازهٔ حرکت زاویه‌ای را نتیجه بگیریم، ولی این نتیجه فقط برای گرانش صحیح بود. مع هذا، به طور تجربی کشف می‌کنیم که پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای، قانون وسیع تری است. نیوتون فرضیه‌های دیگری داشت که به کمک آنها می‌توانست قانون عام تری را برای پایستگی اندازهٔ حرکت زاویه‌ای بیابد. اما این قوانین نیوتونی غلط بودند. نیروها وجود ندارند، هم‌اش حرف پوچ است، ذرات مدار ندارند، وغیره. درعین حال مشابه آن، یعنی تبدیل دقیق این اصل در مورد مساحتها و پایستگی اندازهٔ حرکت زاویه‌ای، صحیح است. این قانون برای حرکتهای اتمی در مکانیک کوانتومی صحیح است، وتا آنجا که ما می‌توانیم بگوییم، هنوز امروز هم دقیق است. ما چنین اصول هم‌گیری را که برای قوانین مختلف صادق‌اند داریم، واگر اثبات آنها را خیلی جدی بگیریم، وفکر کنیم که این یکی به این دلیل معتبر است که آن یکی معتبر است، آنگاه رابطهٔ شاخه‌های مختلف فیزیک را نمی توانیم درک کنیم. یک روز، وقتی فیزیک به کمالش رسیده است وما همه قوانین را می‌شناسیم، ممکن است بتوانیم از برخی اصول موضوع شروع کنیم، وبدون شک کسی شیوه بخصوص محاسبه را به گونه‌ای که بتوان هرچیز دیگر را از این اصول به دست آورد ارائه خواهد کرد. ولی تا زمانی که همه قوانین را

نمی‌دانیم، می‌توانیم قوانینی را برای پیش بینی قضایایی که تا خارج از محدوده اثباتشان گسترش یابند به کار ببریم. هرکس برای اینکه فیزیک را درک کند همواره باید سعی از توازن خوبی برخوردار باشد وچون قوانین اغلب تا خارج از محدوده استنتاجشان گسترش می‌یابند. باید تمام گزاره‌ها وروابط بین آنها را در ذهن داشته باشد. این فقط وقتی اهمیتش را از دست خواهد داد که تمام قوانین شناخته شده باشند.

یک نکتهٔ دیگر، نکتهٔ بسیار شگفت آوری که به هنگام بررسی رابطهٔ ریاضیات وفیزیک جلب توجه می‌کند آن است که با استدلالهای ریاضی ثابت می شود که می‌توان از نقاط آغازی ظاهرا" متفاوتی شروع کرد ودر عین حال به یک چیز رسید. این مطلب کاملا" روشن است. اگر اصول موضوعی دارید، می‌توانید به جای آنها برخی از قضیه‌ها را به کار ببرید، ولی در واقع قوانین فیزیکی چنان با ظرافت ساخته شده‌اند که بیانهای متفاوت ولی هم‌ارز آنها ویژگیهای کیفی متفاوتی دارند واین خصلت آنها را بسیار جالب می‌سازد. برای اینکه این مطلب را نشان بدهم می‌خواهم قانون گرانش را به سه طریق مختلف، که هم‌آنها دقیقا" "هم‌ارز هستند ولی کاملا" متفاوت به نظر می‌رسند بیان کنم.

بیان اول آن است که بین اجسام برطبق معادله‌ای که قبلا" آن را ذکر کردم، نیروهایی وجود دارد.

$$F=G\frac{mm'}{r^2}$$

هرجسم وقتی نیروی وارد به خودش را احساس می‌کند، به مقدار معینی شتاب می‌گیرد یا حرکتش را عوض می‌کند. این روش متداول بیان قانون گرانش است، که من آن را قانون نیوتون می‌نامم. این نحوه بیان قانون می‌گوید که نیرو به چیزی که در فاصله محدودی از آن قرار گرفته است بستگی دارد. این قانون دارای خصلتی است که آن را کیفیت غیرموضعی می‌نامیم. نیروی وارد

به یک جسم بستگی به این دارد که جسم دیگر در فاصله‌ی دورتر در کجا واقع است.

شما ممکن است ایده‌ء کنش از راه دور را نپسندید. این جسم چگونه می‌تواند بفهمد که در آن نقطه چه می‌گذرد؟ بنابراین راه دیگری برای بیان قانون وجود دارد که خیلی عجیب به نظر می‌رسد و روش میدان نامیده می‌شود. توضیح آن دشوار است، ولی من می‌خواهم ایده‌ای تقریبی راجع به اینکه این روش به چه چیزی شبیه است به شما بدهم. این روش مطلب کاملا" متفاوتی را بیان می‌کند. در هر نقطه از فضا عددی وجود دارد (می‌دانم که این یک سازوکار نیست و فقط یک عدد است، این مشکل مربوط به فیزیک است، این پدیده بایستی ریاضی باشد)، و وقتی از مکانی به مکان دیگر می‌رویم این اعداد تغییر می‌کنند. اگر جسمی را در نقطه‌ای در فضا قرار دهیم، نیروی وارد به جسم در راستایی است که این عدد سریعترین تغییر را دارد (آن طور که معمول است، من این عدد را پتانسیل می‌نامم، نیرو در راستایی است که در آن راستا پتانسیل تغییر می‌کند). بعلاوه، نیروی با کمیتی که نشان می‌دهد در اثر جابجایی، پتانسیل با چه سرعتی تغییر می‌کند متناسب است. این قسمتی از بیان قانون است ولی این کافی نیست، چون هنوز بایستی به شما بگویم تغییر پتانسیل را — چگونه تعیین کنید. می‌توانستم بگویم پتانسیل به نسبت عکس فاصله از هر جسم تغییر می‌کند، ولی بدین ترتیب به همان ایده واکنش — از راه دور برگشته‌ایم. قانون را می‌توانید به صورت دیگری بیان کنید که برطبق آن لازم نیست بدانید که در هر نقطه خارج یک گلوله کوچک چه می‌گذرد. اگر می‌خواهید پتانسیل در مرکز گلوله را بدانید فقط لازم است پتانسیل روی سطح گلوله را، هرچقدر هم که کوچک باشد، بدهید. شما لازم نیست به بیرون نگاه کنید، فقط به من بگویید مقدار آن در همسایگی نقطه چقدر است، و داخل گلوله

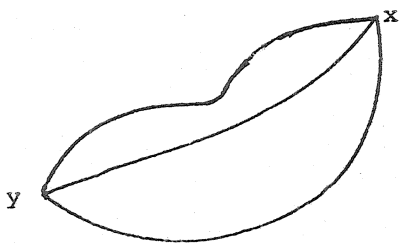
چه جرمی وجود دارد. قاعده این است: اگر گلوله به قدر کافی کوچک باشد، پتانسیل در مرکز مساوی متوسط پتانسیل روی سطح گلوله، منهای همان ثابت G که قبلا" هم در معادله داشتیم تقسیم بر دو برابر شعاع گلوله (که آنرا a می‌نامیم)، و ضربدر جرم داخل گلوله است.

$$\text{پتانسیل در مرکز} = \text{متوسط پتانسیل روی سطح گلوله} - \frac{G}{2a}\ (\text{جرم داخل})$$

می‌بینید این قانون با قبلی متفاوت است، چون این یکی آنچه را که در یک نقطه اتفاق می‌افتد برحسب آنچه در مجاورت آن رخ می‌دهد بیان می‌کند. قانون نیوتون آنچه را که در یک لحظه رخ می‌دهد برحسب آنچه در لحظه‌ء دیگری رخ می‌دهد بیان می‌کند. این قانون نشان می‌دهد رویدادها در لحظه به لحظه، ولی در جا بجایی از یک مکان به مکان دیگر چگونه حساب کنیم. بیان دوم هم از نظر زمانی و هم از نظر مکانی موضعی است، چون فقط بستگی به این دارد که در همسایگی آن نقطه چه رخ می‌دهد. مع‌هذا، این دو جمله از نظر ریاضی دقیقا" یکی هستند.

برای بیان این قانون نحوه کاملا" متفاوت دیگری، متفاوت از لحاظ فلسفی و ایده‌های کیفی که در بر دارد، وجود دارد. اگر شما کنش از راه دور را نمی‌پسندید من به شما نشان داده‌ام چگونه بدون آن سر کنید. حالا می‌خواهم بیانی را ارائه کنم که از نظر فلسفی کاملا" خلاف آن است. در این قانون از اینکه چگونه این اثر از نقطه‌ای به نقطه دیگر منتقل می‌شود بحثی نمی‌شود، کل این مطلب در یک بیان کلی به شرح زیر جمع است. وقتی تعدادی ذره — دارید و می‌خواهید بدانید یکی از آنها چگونه از یک نقطه به نقطه دیگر می‌رود، با اختراع حرکت ممکنی که ذره را در زمان داده شده از یک نقطه به نقطه دیگر

ببرد این کار را انجام می‌دهید (شکل ۶). فرض کنیم ذره بایستی در مدت یکساعت از X به Y برود، و شما می‌خواهید بدانید ذره از چه مسیری می‌تواند



شکل ۶

این کار را انجام دهد. کاری که می‌کنید این است که خمهای مختلفی را در نظر بگیرید و روی هر خم کمیت ویژه‌ای را محاسبه کنید. (نمی‌خواهم به شما بگویم این کمیت چیست، ولی برای آنهایی که قبلا" از این حرفها شنیده‌اند می‌گویم این کمیت روی هر مسیر عبارت است از متوسط تفاضل انرژی جنبشی و پتانسیل) اگر این کمیت را روی یک مسیر و سپس روی مسیر دیگر حساب کنید، برای هر مسیر عدد متفاوتی به دست خواهید آورد. ولی مسیری وجود دارد که برای آن کمترین عدد ممکن به دست می‌آید، و عملا" در طبیعت ذره این مسیر را طی می‌کند. حالا با صحبت کردن در مورد کل خم، حرکت واقعی یعنی حرکت روی بیضی را توصیف می‌کنیم. دیگر ایده عینی را که ذره کشش را احساس و بر اساس آن حرکت می‌کند از دست داده‌ایم. به عوض آن ذره با وقار خاصی تمام خمها و امکانات را ورانداز می‌کند و تصمیم می‌گیرد کدام مسیر را انتخاب کند (با انتخاب مسیری که برای آن کمیت ذکر شده کمینه است).

این مثالی از ظیف وسیع روشهای زیبای توصیف طبیعت است. وقتی مردم می‌گویند بایستی علیت در طبیعت وجود داشته باشد، شما می‌توانید قانون نیوتون را به کار ببرید، یا اگر می‌گویند طبیعت بایستی برحسب اصل کمینه بیان شود در مورد آن به این طریق اخیر صحبت می‌کنید، یا اگر

آنها اصرار دارند که طبیعت بایستی میدان موضعی داشته باشد ـ مطمئنا" شما می‌توانید پاسخگوی این نیز باشید. سوال این است که: کدامیک صحیح است؟ اگر از نظر ریاضی این شقهای مختلف دقیقا" هم ارز نباشند، اگر نتایج تعدادی از آنها با نتایج حاصل از دیگر آنها متفاوت باشد، آنچه بایستی انجام دهیم آن است که به تجربه دریابیم طبیعت عملا" کدام قانون را انتخاب می‌کند. کسانی ممکن است بیایند و به طور فلسفی استدلال کنند که یکی از اینها را به دیگری ترجیح می‌دهند، ولی به تجربه آموخته‌ایم که هم یافته‌های فلسفی در مورد اینکه طبیعت چه می‌خواهد بکند با شکست مواجه می‌شوند. آدم بایستی در مورد تمام راههای ممکن کار کند، و تمام شقها را بسنجد ولی من دارم درباره حالت خاصی صحبت می‌کنم که تمام نظریه‌ها دقیقا" هم ارز هستند. از نظر ریاضی هریک از سه صورت بندی مختلف، یعنی قانون نیوتون، روش میدان موضعی و اصل کمینه، نتایج دقیقا" یکسانی را می‌دهند. بنابراین ما چکار می‌کنیم. شما در همه کتابها می‌خوانید که از نظر علمی نمی‌توانیم یکی یا دیگری را انتخاب کنیم. این درست همه آنها از نظر علمی هم ارزند. تصمیم‌گیری غیرممکن است، چون اگر تمام نتایج یکی باشند هیچ روش تجربی وجود ندارد که بین آنها تمایز قایل شود. ولی به دو دلیل اینها از نظر روانشناسی با هم خیلی متفاوتند. نخست، از نظر فلسفی شما آنها را می‌پسندید یا نمی‌پسندید، و تعلیم دیدن تنها راه رفع این مرض است. دوم از نظر روانشناسی آنها به این علت متفاوتند که وقتی شما سعی می‌کنید قوانین جدیدی را پیش‌بینی کنید این قوانین به کلی غیرهم ارزند.

تا زمانی که فیزیک کامل نیست، و ما در تکاپوی درک قوانین دیگری هستیم، امکان صورت بندیهای مختلف می‌تواند سرنخی در این مورد که در شرایط دیگر چه اتفاقی ممکن است بیفتد به ما بدهد. در این صورت از نظر

این پیش بینی که در وضعیتهای گسترده تر قوانین به چه چیزی ممکن است شباهت داشته باشند، دیگر از نظر روانی هم ارزنیستند. مثلا"، اینشتین متوجه شد علائم الکتریکی نمی توانند سریعتر از سرعت نور منتشر شوند. وی حدس زد که این یک اصل کلی است. (این همان بازی حدس وگمانی است که به کمک آن شما اندازه حرکت زاویه ای را برداشتید و آن را از موردی که برای آن اثباتش کرده بودید به بقیه پدیده های جهان تعمیم دادید.) وی حدس زد که این اثر برای همه چیز صادق است، و نیز حدس زد که برای گرانش نیز صحیح است. اگر علائم نمی توانند سریعتر از نور حرکت کنند، بنابراین بدیهی است که روش توصیف آنی نیروها خیلی سست است. پس در تعمیم اینشتین گرانش، روش نیوتونی توصیف فیزیک به گونه ای ناامیدکننده ناکافی و به طور فاحشی پیچیده است، در حالی که روش میدان دقیق و ساده است، و اصل کمینه نیز همینطور است ـ هنوز بین این دو تای آخری تصمیمی نگرفته ایم.

در حقیقت معلوم می شود که در مکانیک کوانتومی کاملا" به آن نحو که من بیان کردم هیچکدام صحیح نیستند، بلکه ثابت می شود که واقعیت وجود اصل کمینه خود نتیجه این مطلب است که در مقیاس کوچک ذرات از مکانیک کوانتومی تبعیت می کنند. بهترین قانونی که در حال حاضر می دانیم واقعا" ترکیبی از هر دو تاست که در آن اصل کمینه را همراه با قوانین موضعی به کار می بریم. در حال حاضر معتقدیم قوانین فیزیک بایستی دارای خصلت موضعی و نیز اصل کمینه باشند، ولی واقعا" نمی دانیم آیا چنین است؟ اگر ساختاری دارید که بخشی از آن دقیق است و چیزی نادرست از آب درمی آید اگر آن را برحسب اصول موضوع درستی نوشته باشید ممکن است فقط یک اصل موضوع رد شود و بقیه بدون تغییر بمانند. در این صورت بایستی فقط یک

چیز کوچک را تغییر دهید. ولی اگر آن را با مجموعه دیگری از اصول موضوع بنویسید، چون همه آنها به آن یکی که غلط از آب درآمد تکیه دارند، ممکن است همگی رد شوند. بدون کمی بصیرت، از قبل نمی توانیم بگوئیم که بهترین راه نوشتن قانون به گونه ای که بتوانیم وضعیت جدیدی را کشف کنیم کدام است. همواره بایستی تمام راههای مختلفی را که به چیزی نگاه می کنیم در ذهنمان بسپاریم، بنابراین فیزیکدانها ریاضیات بابلی را به کار می برند، و توجه اندکی به استدلال دقیق براساس اصول موضوع ثابت دارند.

یکی از ویژگیهای حیرت انگیز طبیعت وجود راههای مختلفی است که به کمک آنها می توان طبیعت را توجیه کرد. می توان ثابت کرد که این امر به این دلیل امکانپذیر است که قوانین چنین خاص وظریفند. مثلا"، عکس مجذور بودن قانون چیزی است که سبب می شود قانون موضعی باشد، اگر قانون عکس مکعب می بود چنین نمی شد. در طرف دیگر معادله، این واقعیت که نیرو به آهنگ عوض شدن سرعت مربوط است سبب می شود که بتوانیم قانون را به صورت اصل کمینه بنویسیم. اگر مثلا" نیرو به جای میزان تغییر سرعت، با میزان تغییر مکان متناسب بود، نمی توانستید قانون را برحسب اصل کمینه بنویسید. اگر قوانین را باز هم بیشتر تغییر دهید متوجه خواهید شد که آنها را به شکلهای محدودتری می توانید بنویسید. من این نکته را همیشه اسرارآمیز یافته ام و دلیل اینکه چرا قوانین درست فیزیک را به راههای متنوع زیادی می توان بیان کرد نمی فهم. مثل اینکه کسی بتواند در یک لحظه از چند دریچه بگذرد.

مایلم چند چیز را که اندکی عامترهستند درباره رابطه ریاضیات و فیزیک مطرح کنم. ریاضیدانها فقط با ساختار استدلالی سروکار دارند، و واقعا" برایشان اهمیتی ندارد که در مورد چه چیزی صحبت می کنند. آنها حتی نیاز

ندارند که بدانند درباره چه حرف می‌زنند، یا آن طور که خودشان می‌گویند، آیا چیزی که می‌گویند حقیقت دارد یا نه. این نکته را توضیح می‌دهم. شما اصول موضوع را مطرح می‌کنید، چنین و چنان چنین می‌شود، و چنین و چنان چنین می‌شود. بعد چه؟ بدون داشتن اینکه کلمات چنان ـ و چنان چه معنی می‌دهند می‌توان منطق را تا به آخر دنبال کرد. اگر بیان اصول موضوع بدقت صورت بندی شده و به قدر کافی کامل باشند برای به دست آوردن نتایج جدید به همان زبان، کسی که استدلال می‌کند نیازی ندارد از معنی لغات آگاه باشد. اگر من کلمه مثلث را در یکی از اصول موضوع به کار ببرم، در نتیجهٔ به دست آمده گفته‌ای در مورد مثلث وجود خواهد داشت، در حالی که کسی که استدلال می‌کند ممکن است نداند مثلث چیست. ولی من می‌توانم به عقب برگردم و بگویم، "مثلث آن شی سه ضلعی است که تو داری، که چنین و چنان است" و به این ترتیب من واقعیتهای جدیدی را که وی به دست آورده است می‌دانم. به عبارت دیگر ریاضیدانها استدلال مجردی را مهیا می‌کنند تا اگر شما مجموعه اصول موضوعی در مورد جهان واقعی دارید بتوانید آن را به کار ببرید. ولی فیزیکدان برای تمام عبارتهایش معنی دارد. این نکته بسیار مهمی است که آنهایی که از طریق ریاضیات به فیزیک می‌آیند آن را احساس نمی‌کنند. فیزیک، ریاضی نیست، و ریاضی هم فیزیک نیست. یکی به دیگری کمک می‌کند. ولی در فیزیک شما رابطه کلمات با دنیای حقیقی را درک می‌کنید در نهایت آنچه را که در قالب زبان فارسی ریخته‌اید باید بستی به جهان به قالبهای مس و شیشه‌ای که می‌خواهید آزمایش را روی آنها انجام دهید، ترجمه کنید. فقط به این طریق می‌توانید درست بودن نتایج را دریابید. مسأله ریاضیات به هیچ وجه چنین نیست.

البته واضح است که برای فیزیکدانها استدلالهای تکامل یافته

ریاضیدانهای قوت و کاربرد زیادی هستند. از طرف دیگر برخی اوقات نیز روشهای استدلالی فیزیکدانها برای ریاضیدانها مفید است.

ریاضیدانها علاقه‌مند هستند تا حد ممکن به استدلالشان جنبه عام بدهند. اگر به آنها بگویم "می‌خواهم درباره فضای سه بعدی معمولی صحبت کنم"، در جواب می‌گویند "اگر یک فضای n بعدی داشته باشی، آنوقت قضیه‌هایش اینها هستند". "ولی من فقط فضای ۳ بعدی را لازم دارم" "خوب، n را مساوی ۳ بگذار". به این ترتیب معلوم می‌شود بسیاری از قضیه‌های بسیار پیچیده ریاضیدانها وقتی در حالت خاص به کار روند خیلی ساده‌تر هستند. فیزیکدان همیشه به موردهای خاص علاقه‌مند است، وی هیچگاه علاقه‌ای به حالت عمومی ندارد. فیزیکدان به طور مجرد در مورد یک چیز عام صحبت نمی‌کند، بلکه در مورد چیز خاصی صحبت می‌کند. وی می‌خواهد قانون گرانش را در سه بعد مورد بحث قرار دهد. هرگز حالت نیروی اختیاری در n بعد مورد نظرش نیست. بنابراین چون ریاضیدانها این قضیه‌ها را برای محدودهٔ وسیعی از مسایل فراهم کرده‌اند مقداری ساده‌سازی لازم است صورت گیرد. این امر خیلی مفید است، و همواره بعداً "معلوم می‌شود که فیزیکدان بیچاره باید برگردد و بگوید "ببخشید، وقتی خواستی در مورد فضای چهار بعدی برایم توضیح دهی ...."

وقتی شما می‌دانید در مورد چه چیزی صحبت می‌کنید، می‌دانید که برخی نمادها نیروها را نشان می‌دهند، برخی دیگر جرمها، لختی، و غیره را نمایش می‌دهند می‌توانید مقدار زیادی عقل سلیم، و احساس رضایت خاطر را در مورد ـ جهان به کار ببرید. شما چیزهای مختلفی را دیده‌اید و می‌دانید که پدیده مورد نظرتان کم و بیش چگونه باید باشد. ولی ریاضیدان بیچاره آن را به شکل معادله‌هایی درمی‌آورد، و چون نمادها برای وی بی‌معنی هستند، به جز تکابه انضباط دقیق ریاضی و دقت در استدلال هیچگونه راهنمایی ندارد. فیزیکدان، که کم و بیش می‌داند جوابی که به دست می‌آورد باید چگونه

باشد تا حدی می‌تواند روش عمل را حدس بزند، وبنابراین قدری سریعتر پیش برود. سختگیری ریاضی در دقت زیاد برای فیزیک خیلی مفید نیست. ولی کسی نباید ریاضیدان را به خاطر این امر مورد انتقاد قرار دهد. چون بصرف آنکه چیزی برای فیزیک مفید خواهد بود ضرورت ندارد ریاضیدانها کارشان را بدان نحو انجام دهند. ریاضیدانها کار خودشان را انجام می‌دهند. اگر شما چیز دیگری را احتیاج دارید، آن را برای خودتان به دست بیاورید.

سوال دیگر آن است که وقتی سعی می‌کنیم قانون جدیدی را حدس بزنیم آیا باید احساس رضایت خاطر و اصول فلسفی ـ " من اصل کمینه را نمی‌پسندم"، یا "من اصل کمینه را می‌پسندم"، "من کنش از راه دور را نمی‌پسندم" یا "من کنش از راه دور را می‌پسندم" را به کار ببریم یا نه. الگوها تا چه حدی به این مساله کمک می‌کنند؟ نکته جالب این است که الگوها غالبا " مفید هستند و بیشتر معلمین فیزیک سعی می‌کنند نحوه به کاربردن الگوها و به دست آوردن احساس فیزیکی صحیحی در این مورد که نتیجه الگوها چگونه باید باشد را تعلیم دهند. ولی نتیجه‌ای که همیشه به دست می‌آید آن است که بزرگترین کشفیات مستقل از الگوهستند و الگوهیچ گونه کمکی در این زمینه نمی‌کند. کشف الکترودینامیک توسط ماکسول در ابتدا بوسیله تعداد زیادی چرخ‌ودنده تخیلی فضایی صورت گرفت. ولی وقتی شما خود را از شر تمام این دنده‌ها و چیزهای فضایی دیگر خلاص می‌کنید هنوز هم همه چیز درست است. دیراک*(۲) صرفا " با حدس زدن شکل معادلات قوانین صحیح، مکانیک کوانتومی نسبیتی را کشف کرد. به نظر می‌رسد شیوه حدس معادله راهی کاملا "موثر برای پیش بینی قوانین جدید است. این نکته بار دیگر نشان می‌دهد ریاضیات روشی عمیق برای توصیف طبیعت است، وهرگونه کوششی برای توصیف طبیعت توسط اصول فلسفی،

* پل دیراک فیزیکدان بریتانیایی که جایزه نوبل سال ۱۹۳۳ را به طور مشترک با شرودینگر دریافت کرد.

یا احساس مکانیکی رضایت خاطر، روش کارآمدی نیست.

این مساله همیشه مرا نگران می‌کند که برطبق قوانین، به گونه‌ای که امروز ما آنها را می‌فهمیم، یک ماشین حسابگر برای آنکه بتواند آنچه را در یک ناحیه، هرچقدر هم کوچک، از فضا و یک ناحیه، هرچقدر هم کوچک، از زمان رخ ـ می‌دهد محاسبه کند بایستی تعداد نامتناهی اعمال منطقی را انجام دهد. چگونه ممکن است همه اینها در یک ناحیه کوچک از فضا اتفاق بیفتد؟ چرا برای آنکه حساب کنیم یک قطعه بسیار کوچک از فضا/زمان چه می‌خواهد انجام دهد مقدار نامتناهی اعمال منطقی لازم است؟ چنین است که من اغلب فرض کرده‌ام نهایتا " فیزیک به بیان ریاضی نیازنخواهد داشت، وبالاخره سازوکار قوانین فیزیکی آشکار خواهد شد، ومثل میز شطرنج با همه پیچیدگیهای ظاهری‌اش، معلوم خواهد شد که قوانین ساده‌اند. ولی این نوع تفکر درست ازهمان نوعی است که دیگران انجام می‌دهند ـ " من آن را می‌پسندم"، "من آن را نمی‌پسندم" ـ وخیلی پسندیده نیست در مورد چنین چیزهایی پیشداوری داشته باشیم.

برای آنکه این مطالب را خلاصه کنم. کلمات چینزرا به کار خواهم برد، که گفت " به نظر می‌رسد معمار بزرگ ریاضیدان باشد". برای آنهایی که به ریاضیات آشنایی ندارند مشکل است به احساس واقعی زیبایی، ژرفترین زیبایی طبیعت دست یابند. س. پ. اسنو در مورد دو فرهنگ صحبت کرد. من حقیقتا " فکر می‌کنم آن دو فرهنگ مردمی را که به قدر کافی شم فهم ریاضیات را داشته‌اند، تا طبیعت را تحسین کنند، وآنهایی که این شم را نداشته‌اند از هم جدا می‌کنند.

واقعا "خیلی بد است که قانون بایستی به زبان ریاضی باشد. وبرای عده‌ای فهم ریاضی دشوار است. مشهور است ـ من نمی‌دانم درست است

یا نه ـ که وقتی یکی از پادشاهان سعی داشت هندسه را از اقلیدس بیاموزد از دشواری ریاضیات به وی شکایت کرد و اقلیدس گفت " راهی شاهانه به هندسه وجود ندارد". وراه شاهانه وجود ندارد. فیزیکدانها نمی‌توانند به هیچ زبان دیگری صحبت کنند. اگر شما می‌خواهید طبیعت را بیاموزید، طبیعت را احساس کنید، لزوما " بایستی زبانی را که طبیعت به آن زبان سخن می‌گوید درک کنید. طبیعت اطلاعاتش را فقط به یک شکل عرضه می‌کند، وما آنقدر خودخواه نیستیم که انتظار داشته باشیم به جای آنکه ما به طبیعت توجهی کنیم طبیعت زبانش را عوض کند.

همه استدلالهای روشنفکرانه‌ای که شما می‌توانید به کار ببرید نمی‌تواند بطور واقعی تجربه یک قطعه موسیقی را به گوشهای کر منتقل کند. به همین ترتیب تمام استدلالهای روشنفکرانه در دنیا نمی‌تواند هیچگونه درکی از طبیعت را به "آنهایی که به فرهنگ دیگر تعلق دارند" منتقل کنند. فلاسفه ممکن است سعی کنند طبیعت را به طور کیفی به شما بیاموزند. من نیز در این نوشتار سعی می‌کنم آن را توصیف کنم. ولی مفهوم را نمی‌توان به خواننده منتقل کرد چون چنین چیزی امکانپذیر نیست. شاید علت این باشد که افقهای فکری آنها محدود است بدین معنی که برخی تصور می‌کنند که انسان مرکز جهان است.

پیک ریاضی
جلد دوم، شماره دوم، تابستان ۶۶

اعداد گنگ

نوشته: ریچارد ددکیند
ترجمه: ناهید اشرفی

هنگامی که بر خط راست L نقطه o را به عنوان مبدای مشخص یا نقطه صفر در نظر بگیریم و واحد طول مشخصی برای اندازه‌گیری پاره‌خط ها اختیار کنیم یک تناظر حقیقی برقرار می‌شود که شباهت بین اعداد گویا و نقاط خط راست را به خوبی نشان می‌دهد. با کمک این قرارداد می‌توان به هر عدد گویای a طولی متناظر ساخت که اگر بر حسب مثبت یا منفی بودن نقطه a این طول را در سمت راست یا چپ نقطه o علامت بزنیم به نقطه انتهائی p می‌رسیم که می‌توان آن را نقطه متناظر با a محسوب کرد. نقطه گویای صفر به همان نقطه o نظیر می‌شود. به این طریق به هر عدد گویای a در میدان R که شامل همه اعداد گویا است یک و تنها یک نقطه مشخص p در L نظیر می‌شود. به دو عدد a و b به ترتیب دو نقطه p و q را نظیر می‌کنیم و اگر a>b آنگاه p در سمت راست q قرار می‌گیرد.