پیک ریاضی

جلد دوم، شماره ٔ سوم پائیز ۱۳۶۶

حل دستگاههای بسجمله‌ای

نوشته ٔ : تین ین لی

ترجمه ٔ : فرهاد خلت

۱. مقدمه

هر دانش آموز دبیرستانی باید قادر به حل مساله ٔ زیر باشد :

$$x^2+y^2=5 \quad (۱)$$

$$x-y=1 \quad (۲)$$

یعنی ، از (۲)، $x=y+1$ را به دست می‌آوریم و سپس در (۱) جانشین می‌کنیم. جوابهای $y=1, x=2$ و $y=-2, x=-1$ به دست می‌آیند .

سوال : آیا این روش می‌تواند برای حل کردن یک دستگاه بسجمله‌ای کلی شامل n معادله با n مجهول مورد استفاده قرار گیرد ؟

صورت کلی این روش در جبر نوین به " نظریه ٔ حذفی" مشهور است . اما به خاطر بی ثباتی حل بسجمله‌های درجه بالا این روش برای اجرا کردن در کامپیوترها بسیار مشکل است .

حتی دانش‌آموزان دوره‌ٔ راهنمایی‌هم‌باید بتوانند دستگاه زیر را حل کنند:

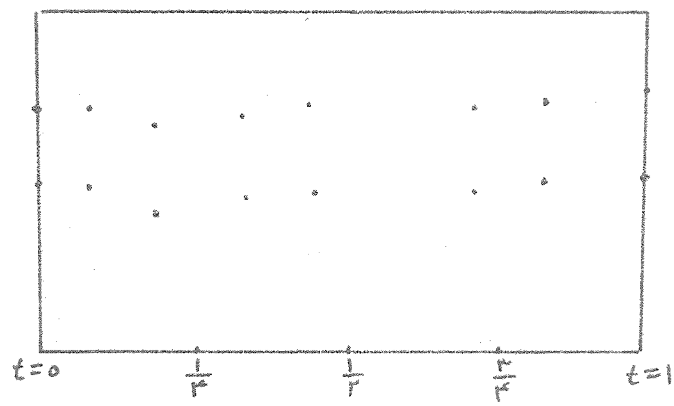
$$x^2=1 \qquad (۳)$$

$$y=1 \qquad (۴)$$

چون مجهولها مخلوط نیستند، واضح است که جوابها $y=1, x=1$ و $y=1, x=-1$ هستند. حال، برای اینکه دستگاه (۱) ـ (۲) را حل کنیم، پارامتر t را اضافه می‌کنیم. یعنی، دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم

$$(1-t)\begin{bmatrix} x^2-1 \\ y-1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x^2+y^2-5 \\ x-y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

به‌ازای $t \in [0, 1]$ وقتی $t=0$ است، ما با دستگاه (۳) ـ (۴) که جوابهای آنها را می‌دانیم مواجهیم. وقتی $t=1$ است، ما با مساله‌ای که جوابهایشان را می‌خواهیم روبروهستیم. به‌ازای هر t در $[0, 1]$، (۵) یک دستگاه دومعادله‌ای از بسجمله‌ها ست که عموما" دوجواب دارد، مانند شکل ۱. مثلا" به‌ازای $t=\frac{t}{4}$، دستگاه (۵) به‌صورت:



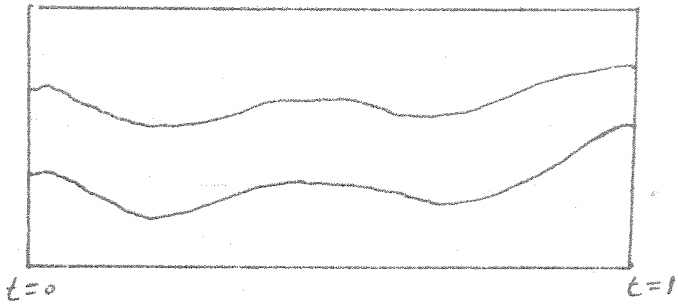
$$x^2+\frac{1}{4}y^2-2=0$$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0$$

(شکل ۱)

درمی‌آیدکه‌دوجواب $y=6/828, x=-9/656$ و $y=1/172, x=1/65$ دارد.

ازنظرشهودی، همهٔ چیزها پیوسته و مشتق پذیر هستند، ودلیلی نداردکه تردیدکنیم تمام تصویرنباید مانندشکل ۲ باشد.



(شکل ۲)

فرض کنیم چنین باشد. قرار دهیم $Z=(x,y)$ ودستگاه (۵) را چنین می‌نویسیم:

$$H(z,t)=\begin{bmatrix} H_1(z,t) \\ H_2(z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۶)$$

مانندشکل۲، جواب z تابعی از t است، پس می‌توانیم (۶) را چنین بنویسیم:

$$H(z(t),t)=0 \qquad (۷)$$

از (۷) نسبت به t مشتق می‌گیریم، داریم:

$$H_z \frac{dz}{dt}+H_t=0$$

$$\frac{dz}{dt}=-H_z^{-1} H_t \qquad (۸)$$

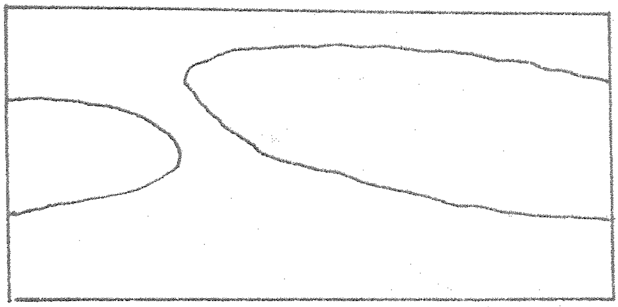
که‌درآن H_z، H_t بترتیب مشتقهای جزئی H نسبت به z و t هستند.

توجه‌کنیداگرخمهای $z(t)$ مانندشکل ۲ باشند، آنگاه H_z وارون پذیر است. این دوخم جوابهای مسائل مقدار اولیه $z(0)=(1,1)$ ، $z(0)=(-1,1)$

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی(۸) هستند. برای یافتن جوابهای تقریبی مسائل مقدار اولیه معادله‌دیفرانسیل معمولی کلی نظریه‌ای پرداخته شد. وجود دارد. جوابهای $z(t)$ از (۸) به‌ازای $t=1$ جوابهایی برای دستگاه (۱) و (۲) هستندکه می‌خواهیم آنها را حل کنیم. این روش بسادگی‌می‌توانند به حالت کلی n معادله‌با n مجهول تعمیم‌یابد. اما چه اشتباهاتی ممکن است رخ‌دهد؟ مثلا"، خمهای شکل ۲ سوالهای زیر را پیش می‌کشند:

۱. از لحاظ نظری، آیا آنها واقعا" خم‌هستند؟

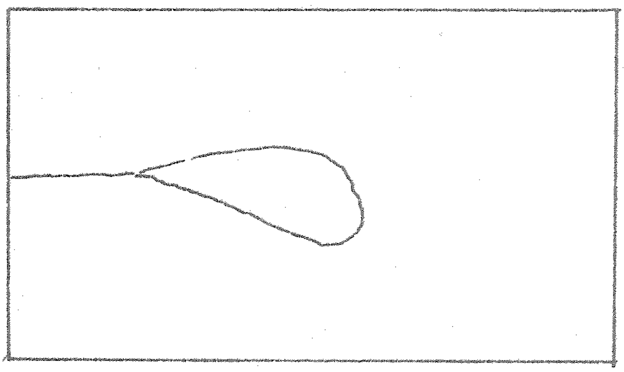
۲. حتی اگر آنها خمهای مطلوب باشند، آیا می‌توانند مانندشکل ۳ بچرخند؟



$t=0$ $t=1$

(شکل ۲)

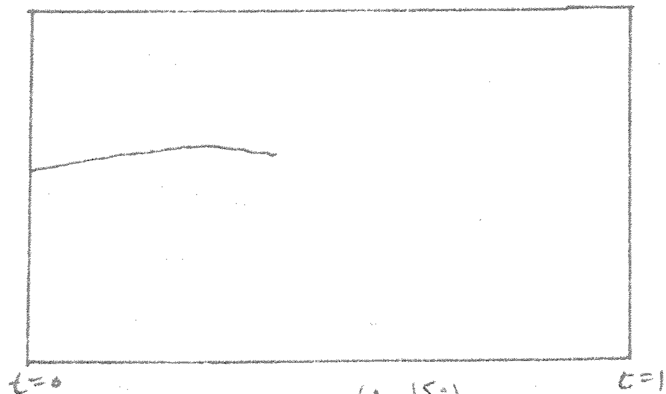
۳. آیا آنها می‌توانندمانندشکل ۴ دوشاخه شوند؟



$t=0$ $t=1$

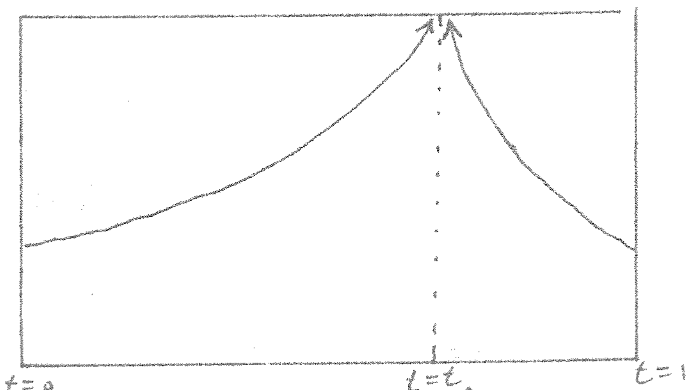
(شکل ۴)

۴. آیا آنها مانند شکل ۵ متوقف می‌شوند؟



(شکل ۵)

۵. آیا آنها مانند شکل ۶ "منفجر" خواهند شد؟ (یعنی، به ازای $t_0<1$، دستگاه بسجمله‌ای مربوطه ریشه‌ای بی‌نهایت دارد.)



(شکل ۶)

موضوع اصلی این روش که به "روش تمدید" مشهور است (به [1] مراجعه کنید) چنین است. برای آنکه جوابهای یک دستگاه بسجمله‌ای را تقریب بزنیم، در $t=0$ با دستگاهی که جوابهای آن را می‌دانیم آغاز می‌کنیم. آنگاه چند خم، به عنوان جوابهای یک معادله دیفرانسیل معمولی، به دست می‌آیند. سپس به جوابهای دستگاه مجهول در $t=1$ می‌رسیم. بوضوح می‌توان دید که اگر یکی از سوالهای فوق (۱ تا ۵) جواب مثبت داشته باشد، این روش ناموفق است.

۰۲ روش تمدید هموتوپی

حال مساله را بطورصوری فرمول بندی می‌کنیم .فرض کنیم

$$p_1(x_1,\ldots,x_n)=0$$
$$\vdots$$
$$p_n(x_1,\ldots,x_n)=0$$

n بسجمله‌ٔ n مجهولی باشند و $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $P(x)=(p_1(x),\ldots p_n(x))$

برای آنکه تمام صفرهای منفرد $P(x)=0$ را تقریب بزنیم ،درجستجوی یک هموتوپی $H:[0,1]\times C^n \to C^n$ هستیم که با یک مجموعهٔ بدیهی (یعنی ،بسادگی حل شونده)از معادلات بسجمله‌ای

$$q_1(x_1,\ldots,x_n)=0$$
$$\vdots$$
$$q_n(x_1,\ldots,x_n)=0$$

یا $Q(x)=0$ ،که‌درآن $Q(x)=(q_1(x),\ldots,q_n(x))$ ،شروع‌شود و $H(0,x)=Q(x)$ ، $H(1,x)=P(x)$ ،وبه ازای‌هر صفر منفرد $\bar{x}$ از P ،یک‌خم‌هموار Γ ازصفرهای H در $[0,1]\times C^n$ موجودباشدکه‌ازصفری از Q در $t=0$ تا $(1,\bar{x})$ هدایت می‌شود .

دریکسلر [۳] وگارسیا و زانگویل [۴]جداگانه‌وتقریبا "همزمان بررسی حل دستگاههای بسجمله‌ای با این روش راآغازکردند .چندسال بعد ،به‌جای هموتوپیهای آنان آنچه‌کدرزیرمی‌آیدنشست [۶و۷و۱۱] :

قضیهٔ الف . برای‌دستگاه بسجمله‌ای $P(x)=(p_1(x),\ldots,p_n(x))$ ،که‌درآن $x\in C^n$ ، $\deg p_i=d_i$ است ،هموتوپی $H:[0,1]\times C^n\to C^n$ را با ضابطهٔ $H(t,x)=(1-t)Q(x)+tP(x)$ تعریف می‌کنیم که درآن $Q(x)=(q_1(x),\ldots,q_n(x))$

$$q_1(x)=a_1x_1^{d_1}-b_1$$
$$\vdots$$
$$q_n(x)=a_nx_n^{d_n}-b_n$$

۲. روش تمدید هموتوپی

حال مساله را بطوری فرمول بندی می‌کنیم. فرض کنیم

$$
\begin{aligned}
&P_1(x_1,\dots,x_n)=0\\
&\vdots\\
&P_n(x_1,\dots,x_n)=0
\end{aligned}
$$

n بسجمله‌ٔ n مجهولی باشند و $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $P(x)=(p_1(x),\dots p_n(x))$ برای آنکه تمام صفرهای منفرد $P(x)=0$ را تقریب بزنیم، درجستجوی یک هموتوپی $H:[0,1]\times C^n\to C^n$ هستیم که با یک مجموعهٔ بدیهی (یعنی، بسادگی حل شونده) از معادلات بسجمله‌ای

$$
\begin{aligned}
&q_1(x_1,\dots,x_n)=0\\
&\vdots\\
&q_n(x_1,\dots,x_n)=0
\end{aligned}
$$

یا $Q(x)=0$، که‌درآن $Q(x)=(q_1(x),\dots,q_n(x))$، شروع شود و $H(0,x)=Q(x)$، $H(1,x)=P(x)$، وبه ازای هر صفر منفرد $\bar{x}$ از P، یک خم هموار Γ ازصفرهای H در $[0,1]\times C^n$ موجود باشد که از صفری از Q در $t=0$ تا $(1,\bar{x})$ هدایت می‌شود.

دریکسلر [۳] وگارسیا و زانگویل [۴] جداگانه وتقریبا "همزمان بررسی حل دستگاههای بسجمله‌ای با این روش را آغاز کردند. چندسال بعد، به‌جای هموتوپیهای آنان آنچه که در زیر می‌آید نشست [۶و۷و۱۱]:

قضیهٔ الف. برای‌دستگاه بسجمله‌ای $P(x)=(p_1(x),\dots,p_n(x))$، که‌درآن $x\in C^n$، $\deg p_i=d_i$ است، هموتوپی $H:[0,1]\times C^n\to C^n$ را با ضابطهٔ $H(t,x)=(1-t)Q(x)+tP(x)$ تعریف می‌کنیم که درآن $Q(x)=(q_1(x),\dots,q_n(x))$

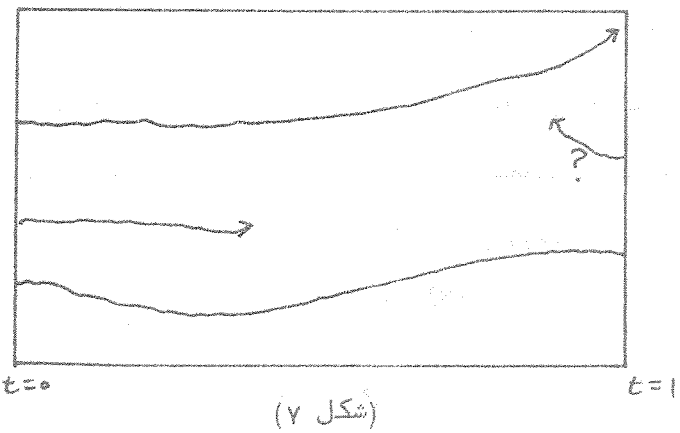
$$
\begin{aligned}
&q_1(x)=a_1x_1^{d_1}-b_1\\
&\vdots\\
&q_n(x)=a_nx_n^{d_n}-b_n
\end{aligned}
$$

در این صورت به ازای " تقریبا " هر $(a,b) \in C^n \times C^n$ که $a=(a_1,\dots,a_n)$، $b=(b_1,\dots,b_n)$ داریم،

(الف) مجموعهٔ جواب $H(t,x)=0$ شامل خمینه‌ای (ماینفولدی) یک بعدی هموار پارامتری شده توسط $t\in[0,1]$ است و

(ب) هر جواب منفرد $P(x)=0$ از یک مسیر متناهی که ناشی از یک جواب $Q(x)=0$ است به دست می‌آید.

قضیهٔ الف عمدتا "بیان می‌کند که به ازای انتخاب تصادفی $a=(a_1,\dots,a_n)$، $b=(b_1,\dots,b_n)$، مسائل بیمارگونه (۱تا ۵) که در بخش قبل ذکر گردید ناپدید می‌شوند. اولا"، مجموعهٔ جواب $H(t,x)=0$ از خمها تشکیل شده است. با استدلالی ساده، با استفاده از قضیهٔ سارد و قضیهٔ تابع ضمنی، این خمها هیچگاه نمی‌ایستند، چرخش نمی‌کنند، یا دوشاخه نمی‌شوند. بنابراین می‌توان آنها را با t پارامتری کرد و می‌توانند به عنوان جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی (مانند (۸)) درنظرگرفته شوند. قضیهٔ الف همچنین می‌گوید که خمهای $x(t)$ به ازای t در [۰و۱] متناهی می‌مانند. بنابراین، مانند شکل ۷، خمهای بدست آمده از $t=1$ باید با یکی از خمهایی که از $t=0$ آغاز می‌شود یکی شود.



(شکل ۷)

۳. دستگاههای بسجمله‌ای ناقص

قضیه کلاسیک بزودرهندسهٔ جبری می‌گویدکه کران بالابرای تعداد صفرهای منفردیک دستگاه بسجمله‌ای $P(x)=(p_1(x),\ldots,p_n(x))$ با شمارش تکرارهابرابر $d=d_1\times d_2\times\ldots\times d_n$ است که درآن d_i مساوی درجهٔ p_i است. عدد d معمولا" **عددبزو** نامیده می‌شود. برای دستگاه بسجمله $P(x)$ که تعداد همهٔ صفرهای منفردآن، با شمارش تکرارهایش، به این کران بالامی‌رسند ظاهرا "قضیهٔ الف یک روش "کامل" برای تقریب تمام جوابهای منفرد به دست می‌دهد. دراین حالت d خم وجوددارندکه از $t=0$ ناشی می‌شوند وهریک به یکی ازصفرهای منفرد $P(x)$ می‌رسد. متاسفانه، تقریبا "همهٔ دستگاههای بسجمله‌ها که درکاربردها با آنها مواجهیم جوابهایی کمتر، ودربرخی ازحالتها تنها کسرکوچکی، ازعددبزوجواب دارند. چنین دستگاهی را **ناقص** می‌نامیم. برای یک دستگاه ناقص $P(x)=0$، بعضی از d خم ذکرشده درقضیهٔ الف به جوابهای منفرد $P(x)=0$ می‌رسندوبقیه خمها همچنانکه t به سمت ۱ میل می‌کندبه سمت بینهایت میل می‌کنند. دراین وضع، پرداختن به خمهایی که به ازای $t\to 1$ سرانجام به بینهایت واگراهستندبیهوده است. بگذاریداین بیهودگی‌رابا مثالی‌واقعی نشان دهیم. یک مساله مقدار ویژه رادرنظرمی‌گیریم.

$$Ax=\lambda x \qquad (۹)$$

که درآن $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$، $x=(x_1,\ldots,x_n)\in C^n$. می‌توانیم (۹) را مانند $n+1$ معادلهٔ بسجمله‌ای از $n+1$ مجهول $(\lambda,x_1,\ldots,x_n)$ به صورت زیردرنظر بگیریم:

$$P_1=\lambda x_1-(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)=0 \qquad (۱۰)$$

$$P_n=\lambda x_n-(a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n)=0$$

$$P_{n+1}=b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_nx_n-1=0$$

که درآن $b=(b_1,\dots,b_n)\varepsilon C^n$ بطورتصادفی انتخاب شده است. توجه کنید اگر (λ,x) یک زوج ویژهٔ (۹) باشد، آنگاه (λ,kx) نیزبه ازای هر $k\varepsilon C$ در (۹) صدق می‌کند. به منظورمنفردکردن جوابها، معادلهٔ P_{n+1} را اضافه می‌کنیم تا بردارهای ویژه را نرمال سازیم.

درکاربردهای واقعی، مقدار $n=100$ کاملا" معمولی است. دراین وضع، عددبزو $۲^{۱۰۰}$ است وتعداد صفرهای منفرد (۱۰)، درحالت کلی ۱۰۰ است. یعنی، $۲^{۱۰۰}$ خم وجوددارد که ازقضیهٔ الف پیروی می‌کنند تمام آنها بجز ۱۰۰ تا همچنانکه $t\to 1$، به بینهایت واگرا هستند. اما این ۱۰۰ خم کدامند؟ بدون هیچگونه اطلاعی، مجبوریم برای یافتن ۱۰۰ خمی که همگرایند، همهٔ $۲^{۱۰۰}$ خم را بررسی کنیم. بررسی $۲^{۱۰۰}$ یعنی تقریبا" $۱۰^{۶۰}$ خم اگرغیرممکن نباشد بسیارمشکل است.

۴. بررسی دستگاههای بسجمله‌ای ناقص

برای یک دستگاه بسجمله‌ای $P(x)=p_1(x),\dots,p_n(x)$ با $x=(x_1,\dots,x_n)$، $\deg p_i=d_i$، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} p_1(x)&=p_1^1(x)+p_1^2(x)\\ &\vdots\\ p_n(x)&=p_n^1(x)+p_n^2(x)\end{aligned}\qquad(۱۱)$$

که درآن $p_i^1(x)$ عبارت است ازهمهٔ جمله‌های $p_i(x)$ با درجهٔ d_i و $p_i^2(x)=p_i(x)-p_i^1(x)$. حال دستگاه بسجمله‌ای همگن

$$p_1^1(x_1,\dots,x_n)=0 \qquad (۱۲)$$
$$\vdots$$
$$p_n^1(x_1,\dots,x_n)=0$$

رادرنظرمی‌گیریم. واضح است که $(0,\dots,0)$ یک جواب $p^1(x)=(p_1^1(x),\dots,p_n^1(x))$ است.

قضیه‌ٔ ب. اگر ه تنها جواب (۱۲) باشد، آنگاه دستگاه (۱۱) دقیقا" $d=d_1\times d_2\times\dots\times d_n$ جواب منفرد، با شمارش تکرارها، دارد.

این قضیه توسط وان دروا ردن [۱۳] اثبات شده بود و توسط گارسیا و لی [۵] دوباره کشف شد. یک نمود حالب قضیه‌ٔ ب آن است که دو مطلب اساسی از ریاضیات دوره‌ٔ لیسانس را تعمیم می‌دهد:

۱. به ازای ماتریسی $n\times n$ مانند $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ و $x=(x_1,\dots,x_n)\in C^n$ و $b=(b_1,\dots,b_n)\in C^n$،

معادلهٔ ماتریسی

$$Ax=b \qquad (۱۳)$$

را مانند یک دستگاه از معادلات بسجمله‌ای زیر درنظرمی‌گیریم:

$$p_1(x_1,\dots,x_n)=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n-b_1=0 \qquad (۱۴)$$
$$\vdots$$
$$p_n(x_1,\dots,x_n)=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n-b_n=0$$

هر p_i ازدرجهٔ 1 است، یعنی $d_i=1$ به ازای هر i. دستگاه بسجمله‌ای (۱۲) مربوط به آن

$$p_1^1(x_1,\ldots,x_n)=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0$$

$$\vdots$$

$$p_n^1(x_1,\ldots,x_n)=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=0$$

یا به شکل ماتریسی آن

$$Ax=0 \qquad (۱۵)$$

می‌باشد. قضیه ب بیان می‌کندکه اگر ۰ تنها جواب (۱۵) باشد (A در اصطلاح جبرخطی وارون پذیر است)، آنگاه دستگاه (۱۴)، صفرمنفرددارد $d=d_1\times d_2\times\ldots\times d_n=1\times 1\times\ldots\times 1=1$. به‌عبارت دیگر معادلهٔ ماتریسی (۱۳) یک جواب منحصربفرددارد.

۲. یک بسجملهٔ ازدرجه n با یک مجهول

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (۱۶)$$

رادرنظرمی‌گیریم. جملهٔ درجه n دراین حالت

$$p^1(x)=x^n$$

است. چون ۰ تنها جواب $p^1(x)=0$ است، قضیهٔ ب نتیجه می‌دهدکه (۱۶) درست n ریشه‌دارد. این نتیجه‌به" قضیهٔ اساسی جبر" مشهوراست.

جوابهای غیرصفر (۱۲) رامعمولا" "صفرهای دربینهایت" دستگاه بسجمله‌ای $P(x)=(p_1(x),\ldots p_n(x))$ در (۱۱) نامیده می‌شوند. دستگاه ناقصی که دربخش قبل بدان اشاره‌شدیک دستگاه بسجمله‌ای $P(x)=(p_1(x),\ldots,p_n(x))$ است که مانند (۱۲) جوابهای غیرصفربرای $p^1(x)=(p_1^1(x),\ldots,p_n^1(x))=0$ دارد. یعنی، یک دستگاه بسجمله‌ای ناقص" صفرهای دربینهایت" دارد.

همانگونه که در بخش آخر بحث کردیم تقریبا "تمام دستگاههای بسجمله‌ای که در کارسردها با آنها مواجهیم" صفرهای در بینهایت" دارند ودربرخی موارد تعداد زیادی هم دارند! برای آن مسائل ،هموتوپی $H(t,x)$ که در قضیهٔ الف معرفی شد ممکن است مناسب نباشد ،چون بعضی (شاید تعداد بیشتری) از خمها وقتی که $t \to 1$ ،به بینهایت واگرا هستند.

درهرصورت ،هرکس می‌تواند بسادگی مشاهده کند ،که برای دستگاه " بدیهی " $Q(x)=(q_1(x),\ldots,q_n(x))$ ،که در آن

$$
\begin{aligned}
q_1(x)&=a_1x_1^{d_1}-b_1\\
&\vdots\\
q_n(x)&=a_nx_n^{d_n}-b_n
\end{aligned}
$$

شبیه آنچه در قضیه الف است ، ۰ تنها جواب قسمت همگن بزرگترین درجه‌اش می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
q_1^1&=a_1x_1^{d_1}\\
&\vdots\\
q_n^1&=a_nx_n^{d_n}
\end{aligned}
$$

بدین معنی که دستگاه بسجمله‌ای $Q(x)$ غیرناقص است .بدین ترتیب می‌توان بسادگی نشان داد که $d=d_1\times d_2\times\ldots\times d_n$ صفر منفرد دارد. قضیهٔ الف عمدتا" بیان می‌کند که برای انتخاب تصادفی $a=(a_1,\ldots,a_n)$ و $b=(b_1,\ldots,b_n)$ در C^n، برای هر بسجملهٔ متناظر به هر t ثابت در $[0,1]$ ۰ تنها جواب قسمت همگن بزرگترین درجه‌اش می‌باشد .بنابراین ،خمهای جواب $H(t,x)=0$ ،به ازای $t\varepsilon\ [0,1]$ متناهی می‌مانند ،چون به ازای هر t ثابت در $[0,1]$ ،دستگاه بسجمله‌ای متناظر با آن هیچ صفری در بینهایت ندارد.

ازطریق این مشاهدات ،می‌توانیم برای حل یک دستگاه بسجمله‌ای ناقص

$P(x)=(p_1(x),\ldots,p_n(x))$ چنین عمل کنیم :

(یک) ابتدا باید دستگاه $Q(x)=(q_1(x),\ldots,q_n(x))$ را که به سادگی می‌توان حل کرد برای شروع انتخاب کنیم .

(دو) به ازای $i=1,2,\ldots,n$ باید $q_i(x)$ با $p_i(x)$ هم‌درجه باشد .

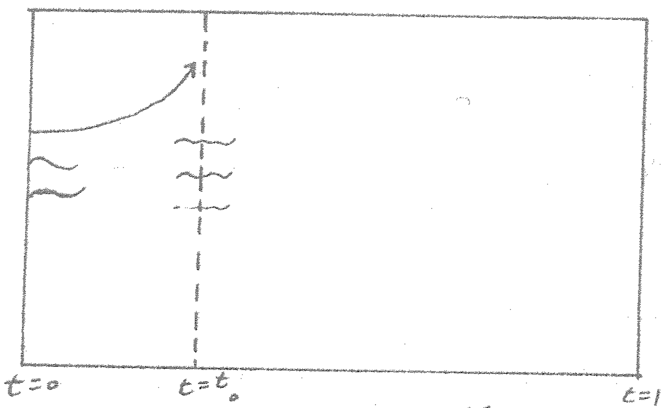
(سه) دستگاه $Q(x)$ نیز ناقص است و همان " صفرهای در بینهایت " $P(x)$ را دارد .

(چهار) مطمئن می‌شویم که به ازای هر t در $[0,1]$ دستگاه چندجمله‌ای متناظر با آن در هموتوپی

$$H(t,x)=(1-t)Q(x)+tP(x)$$

همان " صفرهای در بینهایت " $Q(x)$ را دارد .

کوتاه سخن اینکه (دو) ما را متقاعد می‌سازد که مجموع تعداد صفرهای منفرد متناهی با اضافهٔ تعداد " صفرهای در بینهایت " $P(x)$, $Q(x)$ مساوی می‌مانند سپس ، (چهار) تضمین می‌کند که به ازای هر t در $[0,1]$ ، تعداد صفرهای منفرد متناهی دستگاه چندجمله‌ای متناظر $H(t,x)$ ثابت می‌مانند . درنتیجه ، خمهای ناشی شده از صفرهای منفرد متناهی $Q(x)$ در $t=0$ برای $t\varepsilon[0,1]$ متناهی می‌مانند . زیرا اگر تعداد صفرهای منفرد متناهی Q برابر k باشد ، آنگاه دستگاههای چندجمله‌ای متناظر $H(t,x)$ به ازای هر t در $[0,1]$ نیز k صفر منفرد متناهی دارد . مانند شکل ۸ ، اگر هر یک از خمهای $x_i(t)\to\infty$ وقتی $t\to t_0<1$ ، آنگاه به ازای t در همسایگی $(t_0-\varepsilon, t_0)$ از t_0 دستگاه چندجمله‌ای متناظر $H(t,x)$ بیش از k صفر منفرد متناهی دارد ، که یک تناقض است .



(شکل ۸)

بمراتب کلی ترین نتیجه‌ای که در این جهت به دست آمد قضیهٔ پ در زیر است. منظور از یک **هموتوپی حاصلضرب تصادفی** یک هموتوپی به صورت زیر است.

$$H(t,x)=(1-t)c\ Q(x)+tP(x)$$

که در آن $Q(x)$ یک "ضرب تصادفی" به صورت زیر

$$\begin{aligned} q_1&=(L_{11}+b_{11})\cdots(L_{1d_1}+b_{1d_1})\\ &\vdots\\ q_n&=(L_{n1}+b_{n1})\cdots(L_{nd_n}+b_{nd_n}) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

است. در اینجا $L_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$ یک فرم خطی از $x_1,\ldots,x_n$ است و $b_{ij},\ c\in C$ ثابتهایی هستند که بطور تصادفی انتخاب می‌شوند. جوابهای $H(0,x)=Q(x)$ به خاطر ساختمان حاصلضرب $Q(x)$ ساده یافت می‌شوند، بنابراین خاصیت بدیهی بودن را دارد.

قضیهٔ پ [۱۰]. فرض کنیم $p_1,\ldots,p_n$ بسجمله‌هایی از متغیرهای $x_1,\ldots,x_n$ باشند و فرض کنیم $q_1,\ldots,q_n$ فرم حاصلضرب تصادفی (۱۷) با $\deg p_i=\deg q_i$ باشند. همچنین فرض کنیم که

(الف) مجموعه S از "صفرهای در بینهایت" $Q=(q_1,\dots,q_n)$ "هموار" است،

(ب) هرنقطهٔ S نیزیک "صفر در بینهایت" $P=(p_1,\dots,p_n)$ است. آنگاه به ازای $b=(b_{ij})$ متعلق به یک زیرمجموعه چگال باز $C^{d_1\times\dots\times d_n}$ با اندازهٔ کامل است،

(پ) جواب مسیرهای $H(t,x)=0$ که در $t=0$ آغاز می‌شوند خمینه‌های یک بعدی هموار می‌باشند که توسط $t\varepsilon[0,1]$ پارامتری شده‌اند، و

(ت) هرجواب منفرد $P(x)=0$ توسط مسیری متناهی که از یک جواب $Q(x)=0$ می‌گذرد به دست می‌آید.

برای نشان دادن کاربرد قضیه بالا، مثال زیر را درنظرمی‌گیریم. نقاط تعادلی ربایندهٔ چهاربعدی لورنتس [۱۱] همان صفرهای دستگاه

$$p_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1(x_2-x_3)-x_4+h$$
$$p_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2(x_3-x_4)-x_1+h$$
$$p_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_3(x_4-x_1)-x_2+h$$
$$p_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_4(x_1-x_2)-x_3+h$$

هستند که در آن h ثابتی مفروض است. در اینجا "صفرهای در بینهایت" $P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ صفرهای دستگاه بسجمله‌ای زیر می‌باشند

$$x_1(x_2-x_3)=0$$
$$x_2(x_3-x_4)=0$$
$$x_3(x_4-x_1)=0$$
$$x_4(x_1-x_2)=0$$

بسادگی می‌توان با دست محاسبه کرد که جوابهای غیرصفر $(a,0,0,0)$ ، $(0,b,0,0)$ ، $(0,0,c,0)$ ، $(0,0,0,d)$ و (r,r,r,r) هستند که در آن r,d,c,b,a ثابتهای غیرصفر دلخواهند. برای آنکه همین صفرها را در بینهایت داشته باشیم، فرض می‌کنیم که $Q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$

$$q_1=(x_1-r_1x_4+\alpha_1)(x_2-x_3+\beta_1)$$

$$q_2=(x_2-r_3x_1+\alpha_2)(x_3-x_4+\beta_2)$$

$$q_3=(x_3-r_3x_2+\alpha_3)(x_4-x_1+\beta_3)$$

$$q_4=(x_4-r_4x_3+\alpha_4)(x_1-x_2+\beta_4).$$

به ازای انتخاب تصادفی $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ ، $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ و $r=(r_1,r_2,r_3,r_4)$ دستگاه $Q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$ ، ۱۱ صفر منفرد متناهی دارد، و آنها را می‌توان با حل ۱۱ ترکیب از معادلات ماتریسی نامنفرد ۴×۴ پیدا کرد. هموتوپی

$$H(t,x)=(1-t)cQ(x)+tP(x)=0$$

با انتخاب تصادفی c ، ۱۱ خم جواب دارد که هیچکدام به ازای t در $[0,1]$ به بینهایت نمی‌روند.

کلیه جوابهای منفرد $P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ از این ۱۱ خم، که از صفرهای منفرد $Q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$ در $t=0$ آغاز می‌کنند، به دست می‌آیند.

به عنوان مثالی دیگر مسالهٔ مقدار ویژهٔ (۱۰) که در بخش ۳ بدان اشاره شد در نظر می‌گیریم.

$$p_1=\lambda x_1-(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)$$

$$p_n=\lambda x_n-(a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n)$$

$$p_{n+1}=b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n-1$$

" صفرهای دربینهایت" $P=(p_1,\ldots,p_{n+1})$ را با حل

$$p_1^1(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=\lambda x_1$$
$$\vdots$$
$$p_n^1(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=\lambda x_n$$
$$p_{n+1}^1(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=b_1x_1+\ldots+b_nx_n$$

به دست می‌آوریم. بسادگی دیده می‌شود که آنها چنین اند.

$$z_1=\{(x_1,\ldots,x_n,\lambda)\in C^{n+1}\mid \lambda=0,b_1x_1+\ldots+b_nx_n=0\}$$

$$z_2=\{(x_1,\ldots,x_n,\lambda)\in C^{n+1}\mid x_1=x_2=\ldots=x_n=0\}$$

برای آنکه صفرهای دربینهایت را داشته باشیم، چنین انتخاب می‌کنیم:

$$q_1(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=(\lambda+\alpha_1)(x_1+\beta_1)$$
$$\vdots$$
$$q_n(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=(\lambda+\alpha_n)(x_n+\beta_n)$$
$$q_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n+\beta_{n+1}$$

به ازای $\alpha_i\neq\alpha_j$ و $\beta_i\neq\beta_j$ (که $1\leq i,j\leq n+1$)، می‌توانیم مشاهده کنیم که $Q=(q_1,\ldots,q_{n+1})$، n صفر منفرد دارد که به صورت

۱۹۸

$(-\beta_1,-\beta_2,\ldots,-\beta_{i-1},h_i,-\beta_{i+1},\ldots,-\beta_n,-\alpha_i)$ هستندکه درآن $h_i=-\beta_{n+1}+\sum_{j\neq i} b_j\beta_j$ به‌ازای $i=1,\ldots,n$. هموتوپی

$$H(t,x)=(1-t)cQ+tP$$

n خم داردکه هیچکدام به ∞ نمی‌روندوما همهٔ زوجهای ویژه‌را به‌دست می‌آوریم.

۵. نتیجه

تحقیق دراین زمینه‌درمراحل مقدماتی اش است .برای محاسبهٔ تمام جوابهای منفرددستگاه‌بسجمله‌ای بااستفاده‌ازقضیهٔ الف به‌محاسباتی متناسب باحاصلضرب درجه‌ها ،احتیاج است ـ به‌بیانی نادقیق ،متناسب بااندازهٔ دستگاه .هموتوپیهایی برای حل دستگاههای ناقص عرضه شده‌اند که‌به‌محاسباتی متناسب باتعدادواقعی جوابها نیازدارند .بطورکلی، هموتوپیها باتوجه‌به‌ساختمان ویژهٔ دستگاه‌ناقص ساخته می‌شوند .قضیهٔ پ به‌حل مسائل دردستگاههای دینامیکی [۱۱] ،معادلات جریان بار الکتریکی درسیستمهای قدرت،مسائل مختلف مقدارویژه‌کمک کرده‌است . دستگاههای بسجمله‌ای زیادی درالگوهای مهندسی‌هست‌که‌باقضیهٔ پ حل نمی‌شوندامامراجع [۱۴،۱۵،۱۷] شامل مواردی که‌بااین روش حل می‌شوند .

جالبترین خصوصیت به‌کارگیری روش تمدیدهموتوپی برای حل کردن دستگاههای بسجمله‌ای آن‌است‌که‌خمهایی که‌پیش‌کشیده می‌شوندمستقل ازیکدیگرمحاسبه می‌شوند .درنتیجه ،این آلگوریتم‌کاندیدی عالی‌برای به‌کارگیری امتیازات‌پردازش موازی است ،که‌مهمترین ساختمان ویژه کامپیوترهای نسل پنجم‌است .مثلاً"روش تمدیدهموتوپی برای محاسبهٔ

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس جانشینی جدی برای متداول‌ترین رهیافت ،یعنی EISPACK [۶] ،است .نتایج محاسبه مقدماتی بسیار امید بخش اند .

Tien-yien L_i

Solving Polynomial Systems

The Mathematical Intelligencer

Vol. 9, No. 3, 1987

مراجع

1. E. Allgower and K.Georg, "Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations," SIAM Review 22(1980),28-85.
2. M. Chu, T.Y. Li, T. Sauer, "A homotopy method for general λ-matrix problems," preprint.
3. F.J. Drexler, "A homotopy method for the calculation of all zero-dimensional polynomial ideals," Continuation Methods,69-93, H. Wacker(ed.),Academic Press,New York,1978.
4. C.B. Garcia and W. I. Zangwill,"Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations," Math. Programming 16 (1979), 159-176.
5. C. B. Garcia and T. Y. Li, " On number of solutions to polynomial systems of equations," SIAM J. of Numer Anal. 17 (1980),PP. 540-546.
6. T. Y. Li, "On Chow, Mallet-Paret,and Yorke homotopy for solving systems of polynomials," Bull. Institute of Mathematics, Academica Sinica 11 (1983),433-437.

7. T. Y. Li and T. Sauer, "Regularity results for solving systems of polynomials by homotopy method," to appear, Num Math.
8. T.Y. Li and T. Sauer, "Homotopy methods for generalized eigenvalue problems," to appear, Lin. Alg.Appl.
9. T. Y. Li, T. Sauer, J. Yorke, "Numerical solution of a class of deficient polynomial systems," to appear, SIAM J. Num.Anal.
10. T. Y. Li, T. Sauer, J. Yorke, "The random product homotopy and deficient polynomial systems," Preprint.
11. E. Lorenz, "The local structure of a chaotic attractor in four dimensions," Physica 13D (1984), 90-104.
12. A. Morgan, "A homotopy for solving polynomial systems," Applied Math. and Comp. 18(1986),87-92.
13. B.L. van der Waerden," Die Alternative bei nichtlinearen Gleichungen, "Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ,Math.Phys.Klasse(1928),PP. 77-87.
14. S.Richter and R. De Carlo, "A homotopy method for eigenvalue assignment using decentralized feedback," IEEE Trans. Auto. Control, AC-29(1984),148-158.
15. M. G. Safonov, "Exact calculation of the multivariable structured-singular-value stability margin," IEEE Control and Decision Conference,Las vegas, Dec. 12-14,1984.
16. B. T. Smith,J. M. Boyle,J.J. Dongarra, B.S. Garbow,Y. Ikebe V.C. Klema,C.B. Moler,Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide,Springer-Verlag,1976.
17. L. W. Tsai and A. Morgan, "Solving the Kinematics of the most general six-and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods," ASME J. Mechanisms, Transmissions and Automation in Design 107 (1985),48-57.