گزارش دیوید

(قسمت دوم)

ترجمهٔ حمیدرضا زنگنه

ب . ریاضیات دروبه عنوان علم

۱. جهان غیرخطی

ریاضیات همواره رابطه‌ای نزدیک با علوم فیزیکی داشته است. مکانیک پیوستاری و آنالیز ریاضی همراه هم توسعه یافته‌اند. درفیزیک جدید این قرن، ریاضیات پیش از مفاهیم فیزیکی دردسترس بوده است (مثلاً"، نظریهٔ ماتریسها وگروهها برای مکانیک کوانتومی یا هندسهٔ دیفرانسیل برای نسبیت عمومی) وهمراه آنها توسعه یافته‌اند. درسالهای اخیردرشیمی و زیست شناسی ریاضیات گامهای بزرگی به جلوبرداشته است. مثلاً"، مطالعهٔ مکانیزم واکنش ـ انتشار [۱] درهردورشته منجربه تولیدغیرخطی الگوهای موجی، تپشی (پالسی)، وپیشانهای شوک [۲] شده است که ازنظرپدیده شناختی جدیدهستندوبه تحلیل جدیدی نیازدارند. درزمین شناسی تقریبهای تحلیلی حرکتهای اتمسفری، اقیانوسی، وموجی کشانید (الاستیک) به تعبیرهای جدیدی منجرشده است که درپیش بینی هوا وزلزله استفاده می‌شوند.

درهمهٔ این رشته‌ها توجه زیادی به پدیدهٔ غیرخطی جدیدی می‌شودکه

وابسته است به نیروی قوی اندرکنشهای انرژی، اندرکنشهای گسسته ـ پیوسته، ویا پدیده‌های غیرخطی با انرژی کم زیست‌شناختی. پدیده‌ای که بسیاری از علوم ریاضی را بعد از این به خود مشغول خواهد داشت. ما این امر را پیش از این در نظریه‌های جذب با حل آشوب[۳]، دوشاخگی[۴]، و تکینگی دیده‌ایم.

می‌توان گفت این زمان، زمان آزمایش ریاضیات است، چراکه محتاج به توسعهٔ مفاهیم وساختارهای پیچیده‌تری از جهان خطی قرن نوزدهم است. روال کارها خوب شروع شده است. روشهای توپولوژیک وآنالیزی نظریهٔ ارگودیک وسیستمهای دینامیکی به حل مسائل غامضی مانند تلاطم[۵] کمک می‌کنند.

۲. نظریهٔ میدانهای پیمانه‌ای

پژوهش ریاضی، که با پویایی درونی خود به پیش می‌رود، مفاهیمی را که در نظریهٔ میدانهای پیمانه‌ای[۶] در فیزیک اهمیت دارند مطرح کرده است. س. ن. یانگ فیزیکدان نوشته است "با تعجب دریافتم که میدانهای پیمانه‌ای همان همو ستاروی کلافهای تاری[۷] هستند که ریاضیدانان بدون رجوع به دنیای فیزیکی آن را توسعه داده‌اند." هندسهٔ جبری همهٔ جوابهای خودهمزاد[۸] معادلات یانگ ـ میلز را به دست می‌دهد. اما نظریهٔ فیزیکی به نوبهٔ خود نتایج مهمی در توپولوژی داشته است.

فیزیکدانان نظریهٔ پیمانه‌ای را در چهاربعد (فضا ـ زمان) به عنوان اصلی یگانه‌ساز در نظریهٔ میدانها مطرح کرده‌اند. دانلدسن با مطالعهٔ معادلات حرکت یانگ ـ میلز به توصیفی قابل توجه از برخی از فضاهای چهاربعدی دست یافته است. کمی پس از او، فریدمن، با استفاده از روشهای صرفاً" توپولوژیک، نظریهٔ گسترده‌ای از خمینه‌های (مانیفولدهای) چهاربعدی

را ابداع کرد. در بعدهای دیگر، آنچه که انجام می‌شود اساساً "نوعی محاسبات در فضای اقلیدسی است: به ازای $n \neq 4$، فضای اقلیدسی n بعدی ساختار دیفرانسیلی یکتا دارد؛ اما وضع در بعد چهار کاملاً "فرق می‌کند - در فضای اقلیدسی چهار بعدی حداقل دو ساختار دیفرانسیلی متفاوت وجود دارد. این تفاوت کیفی بین بعد چهار و دیگر ابعاد، نقطهٔ شروع توسعهٔ توپولوژی است، و ممکن است منعکس کنندهٔ اصول فیزیکی عمیقی باشد.

۳. آنالیز همه‌جایی

آنالیز همه‌جایی[۹] اخیراً "نه تنها هندسهٔ دیفرانسیل، توپولوژی، و نظریهٔ گروههای لی، بلکه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، آنالیز تابعی، نظریهٔ نگاشتهای شبه همدیس[۱۰] و نظریهٔ ارگودیک را به خدمت گرفته است. به برخی از کاربردهای مستقیم آن پیشتر از این اشاره شد. ایده‌های این نظریه در زمان نسبتاً "طولانی تکامل یافته است.

هر دانشوری از زمان نیوتون به بعد از حساب آن (حساب دیفرانسیل و انتگرال) برای تعیین آثار قوانین فیزیکی استفاده کرده است. در حالی که این نظریه برای تحلیل تغییرات تدریجی ایده‌آل بوده است، در اغلب مسائل غیرخطی با مقیاس بزرگ خاموش است. پیش از ۱۹۴۵، بررسی پیکربندیهای همه‌جایی به طور منسجم انجام نمی‌شد، صورتبندی مفاهیم آن به گونه‌ای بود که تفهیم و تفاهم بین دست اندرکاران را مشکل می‌کرد. شکی نیست که در این زمینه باید قدر ایده‌های توپولوژیک پوانکاره، کارتان و لفشتس را بدانیم. اما تنها پس از ۱۹۴۵ بود که با استفاده از عناصر اساسی ساختارهایی که در دههٔ ۱۹۳۰ (اساساً "در فرانسه و آمریکا) پرورده شده بودند، این پیوند بزرگ اتفاق افتاد. این امر نه تنها منجر به درک نسبتاً "کامل

هندسهٔ موضعی بلکه درک خصوصیت همه‌جایی فضاهای اساسی ریاضی شد. اینها همان فضاهای همگنی هستند که فلیکس کلاین در برنامهٔ ارلانگن خود، به سال ۱۸۷۲، برگزیده بود: هندسه‌هایی که در آنها موقعیت هر نقطه مانند موقعیت سایر نقاط است. این فضاها شامل کره‌ها و خمینه‌های پرچمی [11] از یک سو (که در آنها گروههای فشرده به‌صورت انتقالی عمل می‌کنند) و تعمیم رویه‌های ریمانی در ابعاد بالاتر از دیگر سو بود. فضاهای همگن سنگ بناهای فضاهایی هستند که در فیزیک و ریاضی رخ می‌دهند.

۴. گروههای متناهی

مفهوم ریاضی "گروه" در ۱۸۳۲ پا به عرصه گذاشت، هنگامی که گالوا به اهمیت بررسی سیستماتیک ساختارها کلی جابگشتهای ریشه‌های معادلات پی برد. کاربرد گستردهٔ نظریهٔ گروهها به اوایل این قرن باز می‌گردد - منظور کاربردها در ریاضیات، فیزیک، شیمی، و رشته‌های متعدد دیگر است.

اکنون رده‌بندی کامل گروههای سادهٔ متناهی دانسته شده است. آنچه از حل این مسالهٔ ۱۰۰ ساله جالبتر است خود حل آن است. مقالهٔ مشهور ۲۵۴ صفحه‌ای فیت و تامپسون نشان داد که مرتبهٔ هر گروه سادهٔ متناهی عددی است زوج، و از آن باطی مراحل متعدد رده‌بندی کامل به‌دست آمد: هر گروه سادهٔ متناهی یا یک گروه متناوب است، یا شکلی از یک گروه لی، یا یکی از ۲۶ گروه استثنایی دیگر.

این ۲۶ گروه استثنایی خود داستانی جالب دارند. گروه ماتیو در نظریهٔ کدها به‌کار می‌رود. گریس "هیولا"، آخرین گروهی که اثبات را کامل کرد، را در ۱۹۸۱ یافت. مطالعهٔ بیشتر این گروه به منبع سرشاری از مسائل ریاضی منجر شد که روابط بین ساختار هیولا را دربرداشت؛ جبر گریس، که

هیولاگروه اتومورفیسمهای آن است؛ شبکهٔ لیچ ،که با آن فرانکل ، لپوسکی،ومورمان جبرگریس را بازسازی کردند؛ جبرهای بینهایت بعدی کاچ ـ مودی؛ وتوابع اتومورفیک کلاسیک .

۵. حدس موردل

ریاضی‌کارانی که درهندسهٔ جبری ونظریهٔ اعداد کار می‌کردند ،در ۱۹۸۳ با شنیدن این خبرکه حدسی ۶۰ ساله‌را یک ریاضیدان آلمانی ،گردفالتینگز ، حل کرده است درحیرت رفتند .حدس موردل ابتدا در ۱۹۲۲ فرمولبندی شد . این حدس دربارهٔ نقاط گویای روی یک خم‌جبری ازگونهٔ (۱۲) ۲ یا بیشتر است ؛ یعنی دربارهٔ نقاط با مختصات گویا روی خمهایی است‌که با معادله‌ای بسجمله (چندجمله‌ای)با ضرایب گویا تعریف شده‌اند .حدس موردل ـ این بودکه‌تعداد این نقاط با مختصات گویا متناهی است ؛ فالتینگز این ادعا را ثابت‌کرد ،وبرای این کار ازابزارهای ریاضی متعددی که‌درطول سالها برای حل مسائل اساسی نظریهٔ اعداد وهندسهٔ جبری ساخته‌شده‌بودند استفاده‌کرد .

اثبات فالتینگز درضمن پیشرفتی به‌سوی حدسی که‌به‌آخرین قضیهٔ فرما معروف است .یکی ازمواردی که‌مشمول حدس موردل می‌شود معادلهٔ $x^n+y^n=1$ است .یک جواب گویای x و y برای این معادله متناظر است به جوابی صحیح برای معادلهٔ $a^n+b^n=c^n$ ،ودربارهٔ همین معادله است‌که فرما حدس معروف خودرا در ۳۰۰ سال پیش مطرح کرد :هنگامی که n بزرگتر از ۲ باشد ،هیچ جواب صحیح a و b و c وجودندارد .فرما درحاشیهٔ کتابچهٔ خود نوشته‌بودکه‌برای این حدس اثبات بسیارجالبی یافته‌است ،که‌متاسفانه حاشیهٔ کتاب برای نوشتن آن بسیارکوچک‌است .ازآن وقت به‌بعد

ریاضیدانان به‌دنبال اثباتی برای آن گشته‌اند. اینکه فالتینگز ثابت کرده است که $x^n+y^n=1$ تنها تعدادی متناهی جواب گویا دارد گام مهمی به‌حساب می‌آید.

بحث خود درباره علوم ریاضی را با تذکر این نکته خاتمه می‌دهیم که نظریه اعداد، که مدتهای مدید به‌عنوان محض‌ترین بخش ریاضیات شناخته می‌شد، امروزه کاربردی روزافزون در ساختن الگوریتمهایی که از نظر علمی مهم هستند در رشته‌هایی مانند رمزنگاری پیدا کرده است. بخشهای متعددی از جبر و هندسه جبری نیز چنین وضعی دارند. البته این امر نباید تعجبی داشته باشد، اگر زیاد نبریم که یکی از هدفهای جبر همواره این بوده است که حل مسائل را به الگوریتمها تبدیل کند.

پ . گرایشها

۲. گرایشهای فکری

بعضی از گرایشهای فکری که در دهه‌های اخیر پدید آمده‌اند، دورنمای پژوهشهای آینده را ترسیم می‌کنند.

(الف) توجه به پدیده‌های غیرخطی. پیش از این انواع گسترده‌ای از مسائل غیرخطی در علم را بررسی کردیم، از جمله مسائلی را که به پیشرفتهای در آنالیز ریاضی، توپولوژی، و غیره مربوط می‌شدند. از این روتنها باور خود را تکرار می‌کنیم که در سالهای پیش رو تلاش برای درک جهان غیرخطی بخشهای بزرگی از ریاضیات را بر علم مسلط خواهد کرد.

(ب) نقش فزاینده ریاضیات گسسته. قرنهاست که معماها و الگوریتمها

که مراحل حل آنها را توصیف می‌کنند حیرت برانگیز بوده‌اند. بسیاری از مسائل دشوار ریاضی چنین خصلتی دارند. در دهه‌های اخیر این رشته به عنوان ریاضیات ترکیبی فرمولبندی شده است: بررسی ساختارهای متناهی که در آنها بین اعضا روابطی موجود است اما (معمولا") عملی جبری وجود ندارد.

مسائلی از این نوع مانند تعیین محل ایستگاههای یک شبکه، گردش پیامها، و توزیع اطلاعات به صورت مسائل ترکیبی فرمولبندی شده‌اند و اهمیت عملی زیادی دارند. همراه با تشخیص نوع مساله و پدید آمدن الگوریتمها خود محاسبه مورد توجه واقع شده است. مفهوم پیچیدگی (میزان دشواری) پرورده شده است، زیرا بسیاری از مسائلی که بی آزار به نظر می‌رسند همراه با افزایش اندازهٔ مساله به افزایش سریع نمایی در مقدار محاسبات منجر می‌شوند. حاصل این بررسی مفهوم توانمند و فریبندهٔ تمامیت است: آیا محاسبه‌ای مشخص را می‌توان در زمانی بسجمله یا زمانی نمایی انجام داد؟ منظور زمان برحسب تعداد اجزای مساله (مانند تعداد گره‌ها در شبکه) است. این مفهوم مجرد به ما می‌گوید که چه هنگام می‌توان مساله‌ای را عملا" حل کرد و چه هنگام نمی‌توان.

(پ) نقش فزاینده تحلیلهای احتمالی. با کارهای کرامر، فیشر، نیمان، پیرسون، و والد آمار بر پایه‌های ریاضی استواری قرار گرفته است. و پس از جنگ دوم به نظام فکری مستقلی تبدیل شده است، این رشته در دههٔ ۱۹۷۰ موقعیت آکادمیک خود را استوار کرده است.

آمار ریاضی برای حرکتی دیگر به جلو خیز برداشته است. نظریهٔ قابلیت اعتماد (۱۳) هم کاربردهای نظامی دارد هم کاربردهای صنعتی. نظریه‌های آماری جدید، که از قدرت کامپیوترهای جدید استفاده می‌کنند، پا به صحنه می‌گذارند. توانایی زیادی که در پردازش داده‌ها به دست آمده است به پدید آمدن

روشهای قدرتمندکمک کرده است ،به‌طوری که به‌فرضهای گاوسی‌وریاضیات خطی،که‌همواره‌سدراه‌نظریه‌پردازان وعمل پردازان بوده‌است ،نیازی‌نیست.

درفیزیک ،رده‌های جدیدی ازاندازه‌ها روی فضاهای تابعی ساخته شده‌است که‌تغییرفازدرمکانیک آماری را توصیف می‌کنندووجودمیدانهای کوانتومی را ثابت می‌کنند.حل مسائل فیزیک کوانتومی با روشهای نظریهٔ احتمال برای فیزیکدانان اهمیت پیداکرده‌است وزمینهٔ پژوهشی جدیدی رادراین نظریه‌بازکرده‌است .

سابقهٔ تصادف[۱۴] درمحاسبه‌به‌روش مونت کارلودردههٔ ۱۹۴۰ باز می‌گردد.درسالهای اخیر ،آلگوریتمهای تصادفی- یعنی‌آلگوریتمهایی‌که تقریبا "همواره‌درست‌هستند- باکمترین امکان خطا ،زمان زیادی (تعداد مراحل محاسبه)ازوقت محاسبهٔ کامپیوتررا صرفه‌جویی کرده‌اند .این آلگوریتمها ،که‌ایمنی کارباکامپیوترها را بسیاربهترمی‌کنند ،درآیندهٔ نزدیک به‌صورت تراشه‌های سیلیکون[۱۵] درخواهندآمد .این روشها درآینده نقش مهمی خواهندداشت وازنظرریاضی‌نیز جالب توجه‌اندزیراازخاصیت ساختاری بسجمله‌ها ،هیاتهای اعداد ،وگروههای جایگشتها استفاده‌می‌کنند .

(ت) توسعهٔ محاسبهٔ علمی درمقیاس بزرگ .مدتهاست که‌کامپیوتر همهٔ علوم ،وبیشترفعالیتهای بشری را تحت تاثیرقرارداده‌است .درآینده بعضی ازرشته‌های علمی تماما "به‌دقت‌بسیارزیادکامپیوترها وتوانایی نسبتا "کم‌خرج آنها درحل تقریبی دستگاههای عظیم‌معادلات وابسته‌خواهند بود‌پیشتر درهواشناسی وهوانگاری‌چنین شده‌است .مفاهیم‌جدیدفیزیکی، مانندبازبهنجارش ،درکاربردمحتاج محاسبات زیادهستند .محاسبات بزرگ ازاین نوع‌همواره‌پابه‌پای پیشروترین بخشهای فناوری (تکنولوژی) - محاسباتی حرکت‌کرده‌اند .

گروه‌بزرگی ازمسائل درفضای سه‌بعدی درژئوفیزیک (مانند اکتشاف نفت)، آیرودینامیک ، ومهندسی وجوددارندکه به‌سخت افزارکامپیوتری و سیستمهای عامل جدیدنیازدارند ،مانندپردازنده‌های زنجیره‌ای وموازی. همچنین مساله‌ٔ غامض درنوع‌ریاضیاتی است که‌درمکانیسمهای محاسباتی جدیدشرکت دارندودرساختن آنها به‌کارمی‌روند .برای آنکه‌این نسل جدید محاسبه‌به‌راه‌خودادامه‌دهد ،انواع‌بسیاری ازریاضیات بایدبه‌کارروند .

(1) reaction- diffusion
(2) schock front
(3) chaos
(4) bifurcation
(5) turbulence
(6) gauge field
(7) connections on fiber bundle
(8) self-dual
(9) global analysis
(10) quasi-comformal mapping
(11) flag manifold
(12) genus
(13) reliability
(14) randomness
(15) silicon chip