بسم الله الرحمن الرحیم

پیک ریاضی
نشریه دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان
جلد دوم ، شماره دوم تابستان ۱۳۶۶
شورای سردبیری : محمد صادق منتخب ، منوچهر میثاقیان ، فرخ وطن
تایپ : زهرا صدرعاملی
چاپ : چاپخانه دانشگاه صنعتی اصفهان

سیر تکاملی نظریه گروهها

نوشته : اسرائیل کلاینر
ترجمه : فهیمه تقوی

این مقاله که طرح مختصری از نحوه تکامل نظریه گروهها به دست می‌دهد ،براساس این باور نگاشته شده است که تاریخ ریاضیات می‌تواند در تکمیل آموزش آن مفید و مهم باشد و چون اینجا جای ارائه تفصیلی نقش تاریخ در آموزش نیست ،شاید نقل قول مناسبی در این زمینه بس باشد :

گرچه مطالعه تاریخ ریاضیات دارای جذابیت ذاتی خاص خود است ،قطعا" دلیل وجودی آن نقشی است که در روشنگری خود ریاضیات بازی می‌کند .مثلا" ،آگاهی از نحوه تکامل تدریجی مفهوم انتگرال ازمحاسبات حجمی ارشمیدس تا انتگرالهای شهودی نیوتن ولایب نیتز وبالاخره تا تعریفهای کوشی ،ریمان ولبگ نمی‌تواند منجر به درک عمیقتری از نظریه های جدید انتگرال گیری نشود. س .ه . ادواردز [11]

ارائه‌چگونگی رشدموضوع‌گسترده‌ای همچون نظریهٔ گروهها دریک مقاله ایجاب می‌کندکه‌موضوعات انتخاب شده‌ومعینی را مختصرا" موردبحث قراردهیم .همچنین ناچاریم ،بحث راجع به‌زمینه‌های وسیعی راکه‌این نظریه درآنها ظاهرمی‌شود (همچون جبرمجرد وکل ریاضیات)حذف کنیم . (البته به‌بعضی‌ازاین ارتباطات باختصاراشاره‌خواهیم‌کرد)مع الوصف اطمینان داریم‌که‌به‌اندازهٔ کافی‌به‌نکات عمده‌وخطوط اصلی بسط وگسترش نظریهٔ گروهها ،تاحدی که‌خواننده‌برآن اساس بتواندبه‌شاخه‌های متنوع‌این نظریه دسترسی یابد ،پرداخته‌شده‌است برای این منظورفهرست مراجع می‌تواند مفیدواقع شود .

دراین مقاله‌خواننده‌طرحی ازریشه‌های مفاهیم‌وقضایا ونتایج‌اساسی راکه‌درابتدای نظریهٔ گروهها بحث می‌شودپیداخواهدکرد.مثلا" ،مفهوم مجردگروه ،زیرگروه‌نرمال ،گروه‌خارج قسمتی ،گروه‌ساده ،گروه‌آزاد ،یکسانی همسانی ،خودسانی ،سریهای ترکیبی ،حاصلضرب مستقیم ،قضایای‌لاگرانژ کوشی،کیلی،ژردن،هولدر ،قضایای گروههای جایگشتی وگروههای آبلی. درعین حال کوشیده‌ایم‌توازنی میان وجوه‌تکنیکی ازیک‌طرف واطلاعات وتعبیرات توصیفی ازسوی دیگربرقرارکنیم .

بررسی ماازنحوهٔ تکامل نظریهٔ گروهها درچندمرحله‌به‌شرح زیرارائه خواهدشد .

۱) منابع نظریهٔ گروهها .
۲) گسترش وتوسعهٔ نظریه‌های " خاص " گروهها .
۳) ظهورتجریددرنظریه‌گروهها .
۴) تحکیم‌مفهوم گروه‌مجرد ،افول نظریهٔ گروههای مجرد .
۵) انشعاب دربسط وتوسعهٔ نظریه‌گروهها .

قبل ازبحث راجع به‌هریک ازمراحل بالامی‌خواهیم‌پیشرفت‌نظریه گروهها رادرریاضیات بطوراعم ودرزمینهٔ جبربطوراخص موردتوجه‌قراردهیم . گرچه" داستان" تکامل این نظریه‌ازسال ۱۷۷۰ شروع‌وتاقرن بیستم ادامه‌ی یافته ،اما پیشرفت اصلی درقرن نوزدهم‌بوقوع‌پیوسته‌است‌برخی ازویژگیهای ریاضی کلی آن قرن که‌مهرونشان خودرابرتکامل این نظریه‌گذاشته‌اند عبارتنداز: الف) علاقهٔ روزافزون به‌دقت واستحکام ، ب) ظهورتجرید ، پ) تجدیدحیات روش اصل موضوعی ،د) پیدایش ریاضیات به‌عنوان یک فعالیت انسانی مستقل ازملاحظات وپدیده‌های فیزیکی.هریک ازاین جنبه‌ها به‌توضیح تفصیلی وگسترده‌ای نیازمنداست .اگرچه‌این امرفراتر ازاهداف (مجال)این مقاله‌می‌باشد .

تااواخرقرن هجدهم‌جبر (تاحدودزیادی)به‌بررسی جوابهای معادله‌های بسجمله‌ای محدودبود ،امادرقرن بیستم‌به‌مطالعه‌ای درزمینهٔ دستگاههای مجردواصل موضوعی تبدیل گشت.انتقال ازبه‌اصطلاح جبرکلاسیک معادلات بسجمله‌ای به‌جبرمدرن دستگاههای اصل موضوعی درقرن نوزدهم‌به‌وقوع پیوست .علاوه‌برنظریه‌گروهها ساختمانهایی مانندحلقه‌های جابجایی ، میدانها ،حلقه‌های غیرجابجایی وفضاهای برداری پا به‌عرصهٔ وجود گذاشتند .این نظریه‌ها همزمان وگاهی درارتباط بانظریهٔ گروهها توسعه یافتند .مثلا" نظریه‌گالواهردونظریه‌گروهها وحلقه‌ها راموردبحث قرارداد . نظریهٔ جبری اعدادعلاوه‌برنظریه‌حلقه‌های جابجایی ونظریهٔ میدانها ، مقدماتی ازنظریه‌گروهها راشامل شد ،نظریهٔ نمایش‌گروهها به‌صورت‌آمیزه‌ای ازنظریهٔ گروهها ،جبرغیرجابجایی وجبرخطی به‌وجودآمد .

منابع نظریهٔ گروهها

نظریه گروهها چهار خاستگاه اصلی دارد الف. جبرکلاسیک (لاگرانژ ۱۷۷۰)، ب. نظریه اعداد (گاوس ۱۸۰۱)، پ. هندسه (کلاین ۱۸۷۴)، ت. آنالیز (لی ۱۸۷۴ و پوانکاره و کلاین ۱۸۷۶). هریک را به نوبت بررسی می‌کنیم

الف) جبرکلاسیک (لاگرانژ ۱۷۷۰) مسالهٔ اصلی جبر در سال ۱۷۷۰ که لاگرانژ نیز مقالهٔ علمی خود را با عنوان "Reflexions sur la resolation algebrique des equations در آن زمینه نوشته بود به معادلات بسجمله‌ای مربوط می‌شد. در آن زمان سوالاتی " نظری" درمورد وجود و ماهیت ریشه‌های یک بسجمله (که مثلا" آیا هر بسجمله ریشه دارد و یا تعداد ریشه‌های آن چندتاست، آیا حقیقی هستند یا مختلط، مثبت هستند و یا منفی) و سوالاتی " عملی" دربارهٔ روشهای پیدا کردن ریشه‌های بسجمله‌ها مطرح بود. مساله‌ای که اهمیت کمتری داشت یافتن روشهای دقیق وتقریبی بود. ما در این مقاله تنها روشهای دقیق را ذکر خواهیم کرد.

بابلی‌ها حدود ۱۶۰۰ سال قبل از میلاد حل معادلات درجهٔ دوم را می‌دانستند (براساس روش تکمیل مربعات) در حوالی ۱۵۴۰ روشهایی جبری برای حل معالات درجهٔ سوم و چهارم ارائه شد. یکی از مساله های اصلی درطول دو قرن بعد از آن حل جبری معادلات درجهٔ پنجم بوده است. این کاری بود که لاگرانژ در مقالهٔ منتشرشده‌اش در ۱۷۷۰ به عهده گرفت.

در این مقاله، ابتدا لاگرانژ روشهای متنوع شناخته شده برای حل معادلات درجهٔ سوم و چهارم را (که ویت، دکارت، اویلر، و بزو ساخته بودند) تحلیل می‌کند. او نشان داده است که کار اصلی در این روشها، تبدیل این معادلات به معادله‌هایی معین، موسوم به معادله‌های حلال، است در واقع

مرتبهٔ معادلهٔ حلال متناظر با هر معادلهٔ درجهٔ سوم و یا چهارم، درجه‌ای یکی کمتر از مرتبهٔ معادلهٔ اصلی دارد. تلاش بعدی لاگرانژ تجزیهٔ مشابهی برای بسجمله‌ای دلخواه بوده است. متناظر با هر بسجمله مانند $f(x)$ یک معادلهٔ حلال به صورت زیر مربوط ساخت. فرض کنیم $x_1, x_2, \dots, x_n$ ریشه‌های $f(x)$ باشند $R(x_1,\dots,x_n)$ را تابعی گویا از ریشه‌ها و ضرایب $f(x)$ اختیار می‌کنیم. (لاگرانژ روشهایی را برای انجام این کار توصیف می‌کند.) $R(x_1,\dots,x_n)$ تحت هرکدام از n جایگشت ریشه‌های $f(x)$ مقادیر مختلفی را اختیار می‌کند که آنها را با $y_1,\dots,y_k$ نشان می‌دهیم. حال معادلهٔ حلال را برابر $g(x)=(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_k)$ قرار می‌دهیم. (لاگرانژ نشان می‌دهد که k عدد $n!$ را می‌شمارد. در واقع اساس کار همان چیزی که ما در نظریه گروهها قضیهٔ لاگرانژ می‌نامیم) مثلا"، اگر $f(x)$ بسجمله‌ای درجهٔ چهار با ریشه‌های x_1,x_2,x_3,x_4 باشد، $R(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ممکن است به صورت $x_1x_2+x_3x_4$ انتخاب شود این تابع تحت هرکدام از ۲۴ جایگشت $x_1,\dots,x_4$ حداکثر ۳ مقدار متفاوت دارد. بنابراین معادلهٔ حلال متناظر با یک بسجملهٔ درجهٔ ۴، معادله‌ای است درجهٔ دوم. هرچند در انتقال این روش به بسجمله‌ای درجهٔ ۵، وی دریافت که معادلهٔ حلال آن از درجهٔ ۶ است!

گرچه لاگرانژ به حل مساله حل پذیری جبری معادله‌های درجهٔ ۵ موفق نشد، اما کار او اهمیت زیربنایی دارد. این اولین بار بود که یک نوع ارتباط بین حل یک معادله بسجمله‌ای و مجموعهٔ تبدیلات ریشه‌های آن برقرار شده بود. درحقیقت مطالعهٔ جایگشتهای ریشه‌های یک معادله، پایه و اساس نظریه عمومی لاگرانژ در زمینهٔ معادلات جبری بود. به گمان او این شیوه "اصول صحیح حل معادلات را تشکیل می‌داد". (البته در این مورد وی به

کارهای گالوا نیز تکیه داشت)گرچه لاگرانژ ازجایگشتها بدون درنظرگرفتن محاسبات آنها سخن می‌گوید (چراکه او به هیچ وجه ترکیب ویا بستار جایگشتها رادرنظرنگرفته است)، اما می‌توان گفت اصل واساس مفهوم گروه (به عنوان گروهی ازجایگشتها)درکار او معرفی شده است . برای جزئیات بیشتر می‌توانید به [۱۲]، [۱۶]، [۱۹]، [۲۵]، [۳۳] مراجعه کنید .

ب) نظریهٔ اعداد (گاوس ۱۸۰۱)

درسال ۱۸۰۱ گاوس درکتاب تحقیقات حسابی Disquisitiones Arethmeticae کارهایی راکه قبل از او درزمینهٔ نظریهٔ اعداد انجام شده بود، گردآوری کرد . این کار روشهای جدیدی را القاء کرد که ریاضیدانان برای یک قرن آنها را به کار می‌گرفتند . درابتدای این کتاب مفهوم گروه درقالب برخی از گروههای آبلی متناهی مطرح شده است . درواقع گاوس خیلی از خواص مهم این گروهها را بدون آنکه از اسم نظریه گروهها استفاده کند، به کار گرفته است . دراین کتاب گروهها درچهار شکل مختلف ظاهر می‌شوند: گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانهٔ m، گروه ضربی اعداد صحیحی که نسبت به m اول‌اند به پیمانهٔ m، گروه رده‌های هم‌ارزی صورتهای درجه دوم دوتایی وگروه ریشه‌های m ام واحد . با اینکه این مثالها درزمینهٔ نظریهٔ اعداد ظاهر می‌شوند، درواقع گروههای آبلی هستند که گاوس با آنها کار می‌کرده است (استفاده از آنها امروزه به وضوح جزء اولین نمونه‌هایی از اثباتهای جبری مدرن است .)

مثلاً" ، گاوس نشان می‌دهد که اعداد صحیح ناصفر به پیمانهٔ p (p یک عدد اول)همگی توانهایی از یک عضو مشخص هستند . به عبارت دیگر Z_p^* گروهی است چرخه‌ای (سیکلیک)وحتی بیشتر از این وی تعداد مولدهای این گروه :

را نیز مشخص می‌کند . او نشان می‌دهد که تعداد مولدهای Z_p^* برابر $\psi(p-1)$ است، که ψ همان تابع اویلر است)وی به هرعضو Z_p^* عددی را نسبت می‌دهد که امروزه آنرا مرتبهٔ آن عضو می‌نامیم (بدون آنکه نامی از آن ببرد) ، و نشان می‌دهد که مرتبهٔ هرعضو Z_p^* مقسوم علیهی از p-1 است وسپس این نتیجه را برای اثبات " قضیهٔ کوچک " فرما که $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$ اگر $p \nmid a$ به کار می‌گیرد . درواقع وی از ایده‌های نظریهٔ گروهها برای اثبات قضایای نظریهٔ اعداد استفاده می‌کند . سپس نشان می‌دهد که اگر t عدد صحیح مثبتی باشد که p-1 را بشمارد عضوی در Z_p^* هست که مرتبه‌اش t باشد . که این همان عکس قضیهٔ لاگرانژ درمورد گروههای چرخه‌ای است راجع به ریشهٔ n ام واحد (که او آن را دررابطه با معادلهٔ دایره‌بر (سیکلوماتیک) درنظر می‌گیرد)نشان می‌دهد که آنها نیز تشکیل یک گروه چرخه‌ای می‌دهند . دررابطه با این گروه هم وی بسیاری ازسوالاتی راکه درمورد Z_p^* مطرح کرده بود طرح وبه آنها پاسخ می‌دهد .

مساله نمایش اعداد طبیعی به صورت مجموع دومربع به فرما درقرن هفدهم برمی‌گردد (یادآوری کنیم که قضیهٔ فرما این بود که هرعدد اول به صورت 4n+1 قابل نمایش به شکل x^2+y^2 است . گاوس بخش عظیمی ازکتاب فوق را به مطالعهٔ کامل فرمهای درجهٔ دوم دوتایی ونمایش اعداد طبیعی به وسیلهٔ آنها اختصاص داد . (یک فرم درجه دوم دوتایی به شکل $ax^2+bxy+cy^2$ است که درآن a، b و c اعدادی صحیح اند) . او روی این فرمها یک عمل ترکیب به این صورت که اگر K و K^1 دوفرم درجه دوم دوتایی باشند ترکیب آنها را، که با $K+K^1$ نمایش داده می‌شود، تعریف می‌کند وسپس نشان می‌دهد که این عمل شرکت‌پذیر وجابجایی است وعلاوه برآن عضو خنثی دارد ومتناظر با هرعضو، عضو معکوسی وجود دارد واین همان اثبات خواص یک گروه آبلی است .

با این همه اطلاعات قابل توجه، هیچکس نمی‌تواند چنین استنباط کند که گاوس تصوری از گروه بطور مجرد و یا حتی گروه آبلی متناهی داشته است. اگرچه مباحث **تحقیقات حسابی** کاملا" عمومی هستند اما هرکدام از انواع مختلف گروه بطور جداگانه مورد بحث و بررسی واقع شده‌اند. بدین معنی که هیچ روش واحد و مشخص نظریهٔ گروهی که به کار برده باشد وجود ندارد. برای جزئیات بیشتر می‌توانید به [۵]، [۹]، [۲۵]، [۳۵]، [۳۳] مراجعه کنید.

پ) هندسه (کلاین ۱۸۷۲)

در اینجا ما اشاره می‌کنیم به سخنرانی موثر و مشهور کلاین تحت عنوان " بررسی تطبیقی از پژوهشهای اخیر در هندسه " که در سال ۱۸۷۲ به مناسبت استخدامش در دانشگاه ارلانگن، ایراد کرده است. هدف این سخنرانی که آن را برنامهٔ ارلانگن نامید رده‌بندی هندسه به عنوان مطالعهٔ ناورداها تحت گروههای تبدیلات مختلف بود. در اینجا گروههایی مانند گروه تصویری، گروه حرکتهای صلب، گروه تقارنها، گروه هذلولوی، گروههای بیضوی همچنین هندسه‌های وابسته به آنها ظاهر می‌شوند (کلاین به گروه آفین توجه نکرده بود). اکنون سخنی چند که زمینه‌ساز برنامهٔ ارلانگن کلاین است بیان می‌داریم.

قرن نوزدهم شاهد رشد فزاینده‌ای در هندسه هم از نظر دامنه و هم از نظر عمق بود. هندسه‌های جدیدی پا به عرصه حیات گذاشتند، هندسه تصویری، هندسه‌های نااقلیدسی، هندسه دیفرانسیل، هندسهٔ جبری، هندسهٔ n بعدی و هندسه گراسمنی توسیع. روشهای هندسی مختلفی جهت برتری بیشتر به رقابت پرداختند: ترکیبی در مقابل تحلیلی، متریک در مقابل تصویری. در اواسط قرن مساله مهمی مطرح شد، یعنی رده‌بندی روابط و ارتباطات

داخلی بین هندسه‌ها و روشهای هندسی متفاوت. این امر منجر به مطالعهٔ " روابط هندسی " و تمرکز یافتن آن بر ویژگی های اشکالی که تحت این تبدیلات ناوردا هستند، گردید و بزودی این تمرکز به بررسی خود تبدیلات منحصر شد. بدین گونه مطالعهٔ روابط هندسی شکلها به مطالعهٔ تبدیلات وابسته مبدل گشت. انواع مختلفی از تبدیلها (به عنوان مثال تبدیلات همراستایی، تبدیلات مدور، تبدیلات وارونپذیر، تبدیلات آفین) به عنوان موضوع مطالعه‌های تخصصی درآمدند. و در نتیجه روابط منطقی بین تبدیلات مورد بررسی واقع می‌شدند. و این به مساله رده‌بندی تبدیلات و بالاخره به تدوین نظریه گروهی کلاین برای هندسه منجر شد.

استفاده کلاین از گروهها در هندسه آخرین مرحلهٔ نظام بخشی به هندسه بود. یک مرحلهٔ میانی نظریهٔ ناورداهای کیلی ـ سیلوستر در دههٔ ۱۸۵۰ بود که اولین نظریهٔ مهم رده‌بندی در هندسه است. در اینجا منظور مطالعهٔ ناورداهای "فرمها" تحت تبدیلات متغیرهای آنها بود. می‌توان گفت نظریه رده‌بندی که در واقع مقدمهٔ برنامهٔ ارلانگن کلاین است به طور ضمنی رهیافتی نظریهٔ گروهی است. البته استفاده کلاین از گروهها در هندسه صریح بود (برای بررسی دقیق و کامل این تفکر تلویحی از نظریه گروهها در هندسه که منجر به برنامهٔ ارلانگن کلاین شد می‌توانید به [۳۳] مراجعه کنید). در بخش بعدی (۲ـ (پ)) ما به اهمیت برنامهٔ ارلانگن کلاین در پیشرفت نظریهٔ گروهها اشاره خواهیم کرد. از آنجایی که این برنامه حدود ۱۰۰ سال بعد از کار لاگرانژ و ۸ سال بعد از کار گاوس آغاز شده است، ارزش آن در نظریه گروهها بهتر مشخص خواهد شد در صورتی که آن را بعد از بحث راجع به کارهای لاگرانژ و گاوس در این زمینه، که در حدود ۱۸۷۰ پایان یافت، مورد بررسی قرار دهیم.

ت) آنالیز (لی ۱۸۷۴، پوانکاره وکلاین ۱۸۷۶)

درسال ۱۸۷۴ لی قضیهٔ عمومی خودرا درزمینهٔ گروه تبدیلات (پیوسته) معرفی کرد (آنچه که امروزه آن را گروههای لی می‌نامیم) این رده از گروهها توسط تبدیلاتی به صورت

$$x_i'=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n), \quad i=1,2,\ldots,n$$

نمایش داده می‌شوند. که در آن f_i ها توابعی تحلیلی از x_i و a_i هستند و x_i ها و a_i ها می‌توانند مقادیر مختلط و یا حقیقی را اختیار کنند. مثلاً،

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}$$

به ازای اعداد حقیقی a و b و c و d و $ad-bc\neq 0$ یک تبدیل پیوسته است.

لی خودرا جانشین آبل وگالوا می‌دانست از آن جهت که همان کاری را برای معادلات دیفرانسیل انجام می‌داد که آن دو برای معادلات جبری انجام داده بودند. کار او از تامل در این مطلب الهام گرفته شده بود که تقریباً "همهٔ معادلات دیفرانسیلی که به روشهای قدیمی ترانتگرال گیری شده بودند تحت گروههای پیوسته‌ای که به سادگی می‌توانستند ساخته شوند ناوردا می‌مانند. سپس وی به این مطلب راهنمایی شد که در حالت کلی معادلات دیفرانسیلی را درنظر بگیرد که تحت یک گروه پیوستهٔ معین ناوردا می‌مانند و آنها را تا حد ممکن وتا جائیکه از خواص شناخته شده این گروهها نتیجه می‌شد ساده کند (با نظریه گالوا مقایسه کنید). گرچه لی موفق به طرح ریزی واقعی " نظریه گالوای معادلات دیفرانسیل " نشد، کار او در طرح ریزی بعدی چنان نظریه‌ای توسط پیکارد (۱۸۸۳/۱۸۸۷) و وسیوت (۱۸۹۲) نقشی اساسی بازی کرد.

حدوداً " درسال ۱۸۷۶ پوانکاره وکلاین کار خودرا روی " توابع خود ریخت " وگروههای مربوط به آنها آغاز کردند. " توابع خودریخت " (که درواقع تعمیم توابع مدور، هذلولوی، بیضوی وسایر توابع مقدماتی درآنالیز است) توابعی از یک متغیر مختلط z هستند که در دامنه‌ای مانند D تحلیلی هستند وتحت گروه تبدیلات $z'=\frac{az+b}{cz+d}$ (a,b,c,d اعداد مختلط و $ad-bc\neq0$) ویا زیرگروهی از آن ناوردا می‌مانند. بعلاوه، گروه مورد بحث بایستی " گسسته " باشد (یعنی هر دامنهٔ فشرده تنها تعداد متناهی از مبدل های هرنقطه را شامل گردد) به عنوان مثالهایی از این گروهها می‌توان از گروه پیمانه‌ای (که در آن a ، b ، c ، d اعداد صحیح اند و ad-cd=1) که مربوط به توابع پیمانه‌ای بیضوی هستند و از گروههای فوشی (که در آن a ، b ، c و d اعداد حقیقی اند و ad-bc=1) مربوط به توابع یکریخت فوشی نام برد. همانند برنامهٔ ارلانگن کلاین، ما نتایج این کارها در رابطه با نظریهٔ گروهها در بخش (۲-(پ)) دنبال خواهیم کرد.

۲. پیدایش وتوسعهٔ نظریه‌های " خاص " گروهها

در بخش ۱ ما چهار خاستگاه اصلی تکامل نظریه گروهها را بیان کردیم اولین خاستگاه ـ جبر کلاسیک ـ منجر به نظریهٔ گروههای جایگشتی شد. دومین خاستگاه ـ نظریه اعداد ـ باعث پیدایش نظریهٔ گروههای آبلی گشت و سرانجام سومین وچهارمین ـ هندسه و آنالیز ـ ظهور نظریهٔ گروههای تبدیلات را موجب شد. ما اکنون تحولات برخی از این نظریه‌های خاص را بررسی می‌کنیم.

الف) گروههای جایگشتی .

همانطورکه قبلاً" ملاحظه شد کارلاگرانژ درسال ۱۷۷۰ با مطالعهٔ جایگشتها

برای بررسی جواب معادلات آغاز شد. این احتمالا" اولین نمونهٔ واضح ازتفکرتلویحی راجع به نظریهٔ گروهها درریاضیات بوده است. این کار بطورمستقیم به کارهای رافینی، آبل وگالوا درثلث اول قرن نوزدهم ومفهوم گروه جایگشتی راه برد. رافینی وآبل حل ناپذیری معادله‌های درجه ۵ را ازطریق ایده‌های لاگرانژدربارهٔ " معادلات حلال " اثبات کردند لاگرانژنشان دادشرط لازم برای حل پذیری یک معادلهٔ بسجملهٔ درجهٔ n وجودیک معادلهٔ حلال ازدرجهٔ کمتر از n است. رافینی وآبل نشان دادندکه چنین معادلات حلالی به ازای $n>4$ وجودندارد. آنها درحین انجام این کار به مقدارقابل توجهی ازنظریه جایگشتها استفاده کردند (نگاه کنید به [۱]، [۹]، [۱۹]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵] [۳۰] [۳۳]. مع هذا این گالوا بودکه پیشرفتهای اساسی ومفهومی راایجادکردواغلب به عنوان موسس نظریهٔ گروهها (گروههای جایگشتی)شناخته شده است.

هدف گالوا دوررای پیداکردن روشی برای بررسی حل پذیری معادلات قرارگرفت. او به کسب بصیرت دراصول کلی علاقه مندبودوازروشهایی که پیشینیانش به کاربرده بودندناراضی بود. وی می‌نویسد: "ازابتدای این قرن روشهای محاسبه بسیارپیچیده شده است تاحدی که هرگونه ترقی وپیشرفت بااین روشها غیرممکن گشته است " [۱۹ صفحهٔ ۹۲]

گالوا تفاوت بین " نظریهٔ گالوا " (تناظرمیان میدانها وگروهها) وکاربردش درحل معادلات رامی‌شناخت وبه همین دلیل اونوشت که وی "قواعد کلی وفقط یک کاربرد" ازاین نظریه رانشان داده است [۱۹ صفحهٔ ۴۲]

" خیلی ازمفسرین اولیه نظریه گالواتمایزبین این دوموضوع را تشخیص نداده وبه جای خودنظریه بیشتربرکاربردآن تاکید می‌کردند". ([۱۹]، کی‌پرنان)،

گالوا اولین کسی بودکه ازنام" گروه" به معنای تکنیکی استفاده

کرد. " گروه" نزدا وبه رده‌ای ازجایگشتها که تحت عمل ضرب بسته بودند معنی می‌داد." اگرکسی دریک گروه جایگشتهای S و T راداشته باشد، قطعا " جایگشت ST رانیزخواهدداشت " [۳۳صفحهٔ ۱۱۱] . وی دریافت که اکثرخواص مهم یک معادلهٔ جبری درخواص معینی ازگروهی که بطوریگانه توسط آن معادله مشخص می‌شود، منعکس است ـ " گروه آن معادله". برای توصیف این خاصیتها مفهوم اساسی زیرگروه نرمال راابداع کردوبه مقدار زیادی ازآن استفاده کرد. هرچندکه معادلات حلال ذهن ،لاگرانژ، رافینی وآبل رابه خودمشغول کرده بود، ایدهٔ اساسی گالوا آن بودکه آنها رابه کناری نهد. چراکه ساختن یک معادلهٔ حلال به روشهای زیادی احتیاج داشت وبراساس یک متدلوژی واضح ومشخص بناگذاشته نشده بود. گالوا متوجه شدکه وجودیک معادلهٔ حلال معادل وجودیک زیرگروه نرمال باشاخص (اندیس)اول درگروه معادله می‌باشد. این مطلب باعث شدکه گروه مربوط به یک معادلهٔ جبری وزیرگروههای آن به جای معادلهٔ حلال آن بنشینند.

گالواگروه مربوط به یک معادله رابه صورت زیرتعریف می‌کند [۱۹صفحهٔ ۸۰]:

معادله‌ای با m ریشهٔ a، b، c، ... مفروض است. همواره گروهی ازجایگشتهای حروف a،b،c، ... باخواص زیروجوددارد:

۱) هرتابعی ازاین ریشه‌هاکه تحت جانشینی های آن گروه ناوردا باشندتابعی است گویا. [یعنی تابع گویایی ازضرایب وهرکمیت وابسته به آنها]

۲) برعکس هرتابعی ازریشه‌های این معادله که به صورت گویا قابل بیان است تحت هرعضواین گروه ناوردا می‌ماند.

درواقع این تعریف چنین می‌گویدکه گروه وابسته به یک معادله شامل همهٔ

جایگشتهایی از ریشه‌های آن است که تمام روابط میان این ریشه‌ها را روی میدان ضرایب آن معادله ناوردا نگه می‌دارد، که این اساساً "همان تعریفی است که امروزه ما ارائه می‌دهیم. البته این تعریف وجود یک چنین گروهی را ضمانت نمی‌کند و بنابراین گالوا اقدام به اثبات وجود آن کرد. وی بعداً" به بررسی این موضوع می‌پردازد که وقتی که عضو جدیدی به "میدان زمینه F" اضافه می‌شود این گروه چگونه تغییر می‌کند. شیوهٔ کار او بطور شگفت‌آوری شبیه به شیوهٔ بررسی متداول این مساله در یک کتاب درسی جبر مدرن است.

کار گالوا به کندی درک و جذب می‌شد. در واقع گرچه این کار در حوالی ۱۸۳۰ به ثمر رسید، پس از وفاتش و در سال ۱۸۴۶ توسط ژ. لیوویل منتشر گشت. وی گذشته از هنر تکنیکیش " گسترش ریاضیات را از دو طریق به مبارزه طلبید. او قضایایی را بدون آنکه اثبات کند، کشف کرد، قضیه‌هایی که اثبات آنها به مفاهیم و محاسبات جدید و پیشرفته نیازمند بود. همچنین، کار پر کردن شکافهای کار او به یک توضیح اساسی روشهایش و جو هر نظریهٔ گروهی آنها نیاز داشت" (وسینگ، [۳۳]). برای جزئیات بیشتر به [۱۲]، [۱۹]، [۲۳]، [۲۵]، [۳۱]، [۳۳] مراجعه کنید.

یکی دیگر از افرادی که در نظریه جایگشتها در نیمه اول قرن نوزدهم نقش به سزایی را ایفا کرد، کوشی است. در بسیاری از مقاله‌های اصلی در ۱۸۱۵ و ۱۸۴۴ کوشی رسما "مطالعهٔ نظریهٔ گروههای جایگشتی را به عنوان موضوعی مستقل آغاز کرد. (قبل از کوشی جایگشتها بطور مستقل مورد مطالعه قرار نمی‌گرفتند. بلکه به عنوان طرح مفیدی برای پیدا کردن جوابهای یک معادلهٔ بسجمله‌ای مطرح می‌شدند). گرچه کوشی به خوبی از کار لاگرانژ و رافینی آگاه بود (کار گالوا هنوز در آن زمان منتشر نشده بود) وسینگ حدس می‌زند که وی "مشخصا" و بطور مستقیم از صورتبندی نظریه گروهی جوابهای معادلات جبری در زمان خودش الهام نگرفته است". [۳۳]

در این کارها کوشی اولین عرضهٔ سیستماتیک از موضوع گروههای جایگشتی را ارائه می‌دهد. وی در مقالات ۱۸۱۵ از هیچ نام خاصی برای مجموعهٔ جایگشتهایی که تحت ضرب بسته‌اند استفاده نمی‌کند. هرچند از اهمیت آنها آگاه بوده و برای تعداد اعضای این چنین مجموعهٔ بسته‌ای نام "diviseur indicatif" را انتخاب کرده است. در مقالهٔ ۱۸۴۴ او مفهوم گروه جایگشتهای تولید شده توسط تعدادی از عضوها را تعریف می‌نماید [۲۲ صفحهٔ ۶۵].

اگر یک یا چند جایگشت از اعضای x، y، z، ..... داده شده باشند من حاصلضرب آنها در یکدیگر و یا در خودشان بدون توجه به ترتیب آنها، را جایگشت مستخرجه می‌نامم. این جایگشتها به همراه جایگشتهای مستخرجه توسط آنها، تشکیل چیزی را می‌دهند که من آن را دستگاه جایگشتهای مزدوج می‌نامم.

در این کارها که بسیار موثر و با نفوذ بودند کوشی ضمیمه‌های موثر و با دوامی برای نامگذاری، نمادگذاری و نتایج نظریه جایگشتها ارائه می‌دهد. مثلاً" وی نماد $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}$ را معرفی می‌کند که امروزه به کار می‌رود، همچنین نمایش چرخه‌ای جایگشتها ضرب جایگشتها، درجه یک جایگشت، جایگشت چرخه‌ای، و ترانهاده را تعریف می‌کند، جایگشت همانی را به عنوان یک جایگشت می‌شناسد، راجع به آنچه که امروزه ما آن را حاصل ضرب مستقیم دو گروه می‌نامیم بحث می‌کند و به طور گسترده‌ای جایگشتهای متناوب را مورد بررسی قرار می‌دهد. در اینجا به ذکر برخی از قضایایی که او اثبات کرده است می‌پردازیم:

(یک) هر جایگشت زوج حاصل ضرب چند ۳- چرخه است.

(دو) اگر p (p عددی اول) مرتبهٔ یک گروه را بشمارد، یک زیرگروه از مرتبهٔ p وجود دارد. (که امروزه به قضیهٔ کوشی معروف است اگرچه این مطلب بدون اثبات توسط گالوا بیان شده بود.)

(سه) تمام زیرگروههای S_3، S_4، S_5، S_6 را مشخص می‌کند. (البته در مورد S_6 یک اشتباه داشت.)

(چهار) تمام جایگشتهایی که با یک جایگشت معین تعویض پذیرند تشکیل یک گروه می‌دهند. (مرکزساز یک عضو).

بایستی توجه داشت که تمام قضایای بالا در زمینهٔ گروههای جایگشتی بیان و اثبات شده‌اند. برای تفصیل بیشتر به [۶]، [۸]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵] و [۳۳] مراجعه کنید.

نتیجه بزرگ این دو مسیر تکاملی، که تلفیقی از کارهای اساسی گالوا و کوشی است، انتشار کتاب مهم و موثر ژردان تحت عنوان رساله‌ای در جایگذاریهای معادله‌های جبری e des substutions et des equations algebriques در سال ۱۸۷۰ بود. گرچه نویسنده در مقدمه عنوان می‌کند که "هدف از این مقاله توسیع روش گالوا و تبدیل آن به نظریه‌ای تمام عیار، توسط نشان دادن این مطلب است که به وسیلهٔ آن با چه سهولتی همهٔ مسائل بنیادی نظریه معادلات قابل حل است"، اما این نظریه گروهها ست که موضوع اصلی آن را تشکیل می‌دهد، نه شاخه‌ای از نظریه حل پذیری معادلات. کوشش برای ایجاد یک نظام ریاضی یکپارچه بر اساس مفاهیم کلیدی از وجوه برجسته کار ژردان و تعدادی از ریاضیدانان معاصر اوست (مثلاً "کلاین") مفهوم گروه (جایگشتی) به منظور آماده کردن زمینهٔ یک چنین ایدهٔ کلیدی به نظر ژردان رسید. تمایل او وی را قادر کرد تا یک نمایش واحد از نتایج کارهای گالوا، کوشی و دیگران ارائه دهد. بکارگیری مفهوم گروه توسط وی در نظریه

معادلات، هندسهٔ جبری، توابع غیرجبری و مکانیک نظری البته جزء قسمتی از کار یکی سازی مطالب مختلف به شمار می‌آید". ژردان در کتابش تمام هندسه جبری، نظریه اعداد و نظریه توابع را به جستجوی گروههای جایگشتی مناسب متمایل می‌کند" (کلاین، [۲۰]). در حقیقت هدف، یک بررسی از کل ریاضیات با توجه به قسمتهایی که نظریهٔ گروههای جایگشتی در آن بکار برده می‌شود و یا به نظر می‌رسد که کاربرد پذیر باشد، بود." این کار نشان دهنده یک تجدید نظر به کل ریاضیات معاصر از نقطه نظر ظهور تفکر نظریهٔ گروهی در شکل نظریه جایگشتها می‌باشد" (وسینگ، [۳۳]).

رسالهٔ ژردان مضمون بیشتر آثار ژردان در زمینهٔ گروهها تا آن زمان را در قالبی واحد عرضه کرد. (وی بیش از ۳۰ مقاله راجع به گروهها در خلال سالهای ۱۸۶۰ تا ۱۸۸۰ نوشت) و با معرفی مفهومهای بنیادین متعددی توجه ریاضیدانان را به تعداد متنابهی از مسائل مشکل معطوف کرد. برای مثال، ژردان بطور صریح تصوری از یکریختی و همریختی گروهها (جانشینی) می‌سازد. برای اولین بار اصطلاح "گروه حل پذیر" را به معنای فنی آن معرفی می‌کند، به معرفی مفهوم سریهای ترکیبی می‌پردازد و قسمتی از قضیه ژردان – هولدر را اثبات می‌کند، یعنی اینکه در دو سری ترکیبی شاخصها (اندیسها) با یکدیگر مساویند (در آن زمان مفهوم گروه خارج قسمتی بطور صریح شناخته نشده بود)، وی مطالعهٔ بسیار دقیق متعدی و اولیه بودن گروههای جایگشتی را به عهده می‌گیرد و به نتایجی دست می‌یابد که هنوز اکثر آنها مورد استفاده واقع می‌شوند. ژردان همچنین اثباتی برای ساده بودن A_n (به ازای $n>4$) ارائه می‌دهد.

قسمت مهمی از این کتاب به مطالعهٔ "گروه خطی" و بعضی از زیرگروههای آن اختصاص داده شده است. به زبان امروزی اینها متشکل از گروههایی مشهور به گروههای کلاسیک یعنی گروه خطی عام، گروه یک هنگ،

گروه متعامد و گروه سادگی (سیمپلکتیک) می‌باشند. ژردان این گروهها را فقط روی میدانهای متناهی در نظر می‌گرفت، و ساده بودن آنها را در موارد مشخصی اثبات می‌کند. هرچند این نکته قابل توجه است که وی اینها را به عنوان گروههای جایگشتی و نه فقط گروهی از ماتریسها و یا تبدیلات خطی مورد نظر قرار می‌دهد. (نگاه کنید به [۲۹] و [۳۰]).

این کتاب ژردان واقعه‌ای برجسته و تاریخی در تکامل نظریه گروهها است. هرچند دیدگاه نظریه جایگشتی او بزودی جای خود را به مفهوم گروه به عنوان گروه تبدیلات می‌دهد. (به قسمت (پ) در زیر مراجعه کنید) "کتاب ژردان نقطهٔ توقفی است بر تکامل و کاربرد مفهوم نظریه جایگشتی گروهها. این بیانی از آرزوی عمیق ژردان در فراهم آوردن تلفیقی مفهومی از ریاضیات آن زمان بود. وی با تکیه بر مفهوم گروه جایگشتی کوشید تا به چنین تلفیقی دست یابد. اگرچه در مرحلهٔ بعدی تکامل ریاضیات معلوم شد که محدود شدن به گروههای جایگشتی بیمورد بوده است، اما این امر هم مایهٔ افتخار کتاب ژردان است و هم محدودیتهای آن را آشکار ساخت (وسینگ، [۴۳]) برای جزئیات بیشتر به [۹]، [۱۳]، [۱۹]، [۲۵]، [۲۲]، [۲۴]، [۴۹]، [۳۳] مراجعه کنید.

ب) گروههای آبلی

همانطور که قبلا" دیدیم، منشاء اصلی نظریه گروههای آبلی، نظریهٔ اعداد بوده که با تحقیقات حسابی گاوس آغاز شده است. بعکس نظریهٔ جایگشتها، روشهای نظریه گروهی در نظریهٔ اعداد تا آخرین ثلث قرن نوزدهم همچنان بطور ضمنی و تلویحی باقی ماند. تا آن زمان هیچ استفادهٔ صریحی از کلمهٔ "گروه" به عمل نیامده بود و هیچ نوع ارتباطی بین این

نظریه و رشد نظریه گروههای جایگشتی وجود نداشت. هم اکنون ما به بیان نمونه‌ای از کارهای نظریهٔ گروهی که بطور غیرصریح در نظریه اعداد خصوصا" در رابطه با نظریه اعداد جبری انجام شده بود می‌پردازیم.

نظریهٔ اعداد جبری در ارتباط با حدس فرما در مورد معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ نظریه گاوس راجع به فرمهای درجهٔ دوم دوخطی و قانونهای تقابل مربعی مرتبهٔ بالاتر، پا به عرصه گذاشت. میدانهای اعداد جبری و خواص حسابی آنها موضوع اصلی مطالعه را تشکیل می‌دادند. درسال ۱۸۴۶ دیریکله، یکه‌های یک میدان از اعداد جبری را مورد مطالعه قرار داد و ثابت کرد که (به اصطلاح امروزی) گروه یکه‌های این میدان حاصل ضرب مستقیم یک گروه چرخه‌ای متناهی و یک گروه آزاد آبلی با رتبهٔ متناهی است. تقریبا" درهمان سال کومر "اعداد ایدآلی" خود را معرفی کرد و رابطه‌ای هم‌ارزی روی آنها تعریف کرد و در مورد میدانهای دایره‌بر (سیکوماتیک)، برخی از خواص ویژهٔ تعداد رده‌های هم‌ارزی را به دست آورد. (موسوم به عدد رده‌ای یک میدان دایره‌بر که امروزه آن را گروه رده‌ای ایدآلی میدان دایره‌بر می‌نامیم). دیریکله قبلا" مطالعاتی مشابه در زمینهٔ میدانهای درجهٔ دوم انجام داده بود.

درسال ۱۸۶۹، ا. شرینگ، که پیشتر شاگرد گاوس بود، به مطالعهٔ ساختمان (گروه) رده‌های هم‌ارزی گاوس فرمهای درجهٔ دوم دوتایی پرداخت. او دریافت که رده‌های بنیادین و معینی از آنها می‌توانند توسط عمل ترکیب کل گروه را تولید کنند. در اصطلاح نظریهٔ گروهها، شرینگ مولدی برای گروه آبلی کلاسهای هم‌ارزی فرمهای درجه دوم دوتایی یافته بود.

کار کومر روی میدانهای دایره‌بر، توسط کرونکر به هر میدان دلخواه از اعداد جبری تعمیم داده شد. وی در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۰ در زمینهٔ نظریهٔ اعداد جبری دیدگاه بسیار محض و مجردی را اتخاذ می‌کند. او مجموعه‌ای متناهی از -

"اعضای" دلخواه را انتخاب کرد و عمل مجردی را که در قوانین مشخص صدق می‌کند روی آنها تعریف کرد. قوانینی که امروزه ما به عنوان اصول یک گروه متناهی آبلی آنها را می‌شناسیم.

فرض کنید θ'، θ''، θ'''، ..... تعدادی متناهی از اعضایی باشند که متناظر با هر دو تا از آنها عضو سومی توسط قانون معینی نظیر شود. حال اگر f همان قانون و θ' و θ'' دو عضو دلخواه از این مجموعه باشند (احتمالا" با هم مساوی)، — عضوهایی مثل θ''' وجود دارد بطوری که $\theta'''=f(\theta',\theta'')$ به علاوه $f(\theta',\theta'')=f(\theta'',\theta')$ $f(\theta',f(\theta'',\theta'''))=f(f(\theta',\theta''),\theta''')$ و اگر θ'' مخالف θ''' باشد، $f(\theta',\theta'')$ مخالف $f(\theta',\theta''')$ است. همینکه این را فرض کنیم می‌توانیم به جای عمل $f(\theta',\theta'')$، ضرب $\theta'.\theta''$ را جایگزین نماییم، مشروط برآنکه به جای تساوی، هم‌ارزی به کار گیریم. پس با استفاده از علامت معمول هم‌ارزی "$\sim$"، ما هم‌ارزی $\theta'\theta''\sim\theta'''$ را به معنی $f(\theta',\theta'')=\theta'''$ تعریف می‌کنیم."

کرونکر در جریان ارائه یک تعریف تلویحی از مفهوم گروه آبلی متناهی، کار کردن روی قوانین ترکیب "magnitude" ها را مورد هدف قرار می‌دهد و به نتایج زیر رسید:

(یک) اگر θ عضو دلخواهی از مجموعه مورد بحث باشد آنگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند k داریم $\theta^k=1$. اگر k

کوچکترین چنین اعدادی باشد، گوییم θ "متعلق به k" است. واگر θ "متعلق به k" باشد و $\theta^m=1$ آنگاه k عدد m را می‌شمارد.

(دو) اگر θ "متعلق به k" باشد، به ازای هر مقسوم علیه k، عضوی متعلق به آن وجود دارد.

(سه) اگر θ و θ' به ترتیب متعلق به k و k' باشند و k و k' نسبت به هم اول باشند، آنگاه $\theta\theta'$ متعلق به kk' است.

(چهار) یک "دستگاه بنیادی" از اعضای θ_1، θ_2، θ_3، .... موجود است به طوری که عبارت $\theta_1^{h_1}\theta_2^{h_2}\theta_3^{h_3}$ $(h_i=1,2,\dots,n_i)$ نمایش عضوی از مجموعه فوق است و نمایش هر عضو بدین طریق یگانه می‌باشد. اعداد n_1، n_2، ... بترتیب اعدادی هستند که اعضای θ_1، θ_2، .... به آنها متعلقند و به گونه‌ای قرار داده شده‌اند که هر یک توسط تالی خود بخش پذیر است و حاصلضرب $n_1n_2\dots$ برابر تعداد اعضای آن مجموعه است.

البته مطالب بالا می‌توانند به قضایای شناخته شده گروههای آبلی متناهی تغییر شوند. مثلا" قسمت (چهار) می‌تواند به عنوان قضیه اساسی گروههای آبلی متناهی درنظر گرفته شود. با اینکه این چهارچوب کلی توسط کرونکر بنا گذاشته شد اما وی آنها را در حالتهای خاصی از رده‌های هم‌ارزی فرمهای درجه دوم دوتایی و رده‌های ایدآلی به کار گرفت. او به این نکته توجه کرد که (چهار) در حالت اول همان قضیه هرینگ است.

گرچه کرونکر ارتباطی بین تعریف تلویحیش از گروه آبلی متناهی با مفهوم جاافتاده گروه جایگشتی برقرار نکرد (با اینکه از مفهوم آن اطلاع کافی داشت)، موضوع به مزیت دیدگاه مجردی که اختیار کرده بود، واقف بود:

اصول بسیار ساده نه تنها در زمینه‌های فوق بلکه غالبا "در جاهای دیگر حتی در مقاطع مقدماتی نظریه اعداد، کاربرد پذیرند. این مساله نشان می‌دهد (و می‌توان از جهات دیگر نیز به آسانی دید) که این اصول به قلمروی کلی‌تر و مجردتری از ایده‌ها تعلق دارند. لذا شایسته است که گسترش آنها را از هر قید و بند غیراساسی فارغ کرد. بنابراین تکرار استدلات به هنگام اعمال آن در حالتهای مختلف غیرضروری می‌شود. همچنین هرگاه این اصول به کلی‌ترین صورت موجه بیان شوند، نظر به اینکه تنها جنبه‌های واقعا "بنیادی در آنها مطرح می‌گردند، ساده‌تر نیز جلوه می‌کنند.

درسال ۱۸۷۹، خطوط تکامل فوق در مقاله مهم فربنیوس و استیکبرگر تحت عنوان " درباره گروههای اعضای جابجایی " به اوج خود رسید. گرچه این دو بر اساس کارهای کرونکر کار می‌کردند اما از مفهوم گروه آبلی بطور صریح استفاده می‌کردند، و بیشتر از آن، به این پیشرفت مهم دست یافتند که دریافتند که مفهوم گروه بطور مجرد همنهشتیها و ترکیب فرمهای گاوس، همچنین گروههای جانشینی گالوا را دربردارد. (علاوه بر این آنها، در ذیل این مقاله به گروههایی نامتناهی تحت عنوان گروه یکه‌های میدان اعداد و گروه ریشه‌های واحد توجه نمودند. یکی از نتایج مهم کار آنها اثبات قضیه اساسی گروههای آبلی متناهی شامل اثباتی بریگانگی تجزیه است. جالب خواهد بودکه مقایسه‌ای کنیم میان فرمولبندی صریح (مدرن) آنها

وقسمت (چهار) مقاله کرونکر):

یک گروه تحویل ناپذیر [تجزیه ناپذیر] می‌تواند به عاملهای تحویل ناپذیر بدیهی تجزیه گردد. معمولا "این تجزیه از طرق مختلف انجام پذیر است. هرچند که بدون توجه به نحوه تجزیه تعداد عاملهای تحویل ناپذیر در تجزیه‌های مختلف همواره با هم برابر است و عوامل دو تجزیه می‌توانند طوری مرتب شوند که فاکتورهای متناظر هم مرتبه باشند [۳۳، صفحه ۲۳۵]

آنها تا تشخیص این مساله که "عوامل تحویل ناپذیر"، گروههای چرخه‌ای از مرتبه توانی از یک عدد اولند، پیش رفتند. سپس نتایج خود را در مورد گروه اعداد صحیح به پیمانه m، فرمهای درجه دوم دوتایی وردههای ایدآلی درمیدان اعداد جبری به کار بستند.

مقاله فربنیوس و استیکلبرگ "کار برجسته‌ای است که به تاسیس نظریه مستقلی در زمینه گروههای آبلی متناهی به روشی نزدیک به دیدگاههای امروزی می‌پردازد" (فوش، [۳۰]). برای تفصیل بیشتر راجع به این قسمت به [۵]، [۹]، [۲۴]، [۳۰]، [۳۳] مراجعه کنید.

(پ) گروههای تبدیلات

همانند نظریه اعداد، ایده‌های نظریه گروهی در هندسه و آنالیز نیز تا آخرین ثلث قرن نوزدهم همچنان بصورت ضمنی و تلویحی باقی مانده بود. به علاوه، استفاده صریح کلاین (و لی) از گروهها در هندسه و بیش از جنبه‌های تکنیکی، از جهت مفهومی در توسعه نظریه گروهها تاثیر گذاشت

چرا که در تکامل نظریه گروهها، این استفاده به معنی تغییر توجه واقعی از گروههای جایگشتی به مطالعهٔ گروه تبدیلات بوده (البته منظور این نیست که گروههای جایگشتی بعداً دیگر مطالعه نمی‌شدند). همچنین این موضوع در واقع نقطهٔ شروعی برای گردش از گروههای متناهی به سمت گروههای نامتناهی بود.

کلاین به ارتباط بین کار خود و گروه جایگشتها توجه داشت، در عین حال متوجه بود که انتقالی صورت گرفته است. وی اظهار می‌دارد که نقطهٔ مشترک نظریهٔ گالوا و کار او و پژوهش راجع به "گروههایی از تغییرات" است. اما اضافه می‌کند که "یقیناً "تغییرات" بکار برده شده در این دو حالت متفاوتند: در آنجا (نظریه گالوا) با تعداد متناهی از این اعضا سروکار داریم، حال آنکه در اینجا با تعداد نامتناهی از اعضای خمی پیوسته مواجهیم" [۳۳، صفحهٔ ۱۹۱]. با پیگیری این شباهتها کلاین متوجه شد که دقیقاً "همانند آنجا، این نیز یک نظریهٔ گروههای جایگشتی است." "ما به یک نظریهٔ تبدیلات علاقمندیم، به مطالعه‌ای دربارهٔ گروههایی که توسط یک تبدیل خاص تولید می‌شوند". [۳۳، صفحهٔ ۱۹۱].

کلاین از نگرش تجریدگرایانه به نظریهٔ گروهها اجتناب می‌کرد. وحتی تعریف تکنیکی او از یک گروه (تبدیل) ناقص بود: "حال فرض کنید دنباله‌ای از تبدیلات A، B، C، ..... در دست باشد. اگر این دنباله دارای این خاصیت باشد که ترکیب هردو عضو آن دوباره عضوی از همین دنباله شود، این دنباله گروه تبدیلات خوانده می‌شود". [۳۳، صفحهٔ ۱۸۵]. با وجود این کار او قابل مطرح بودن مفهوم گروه و کاربردهایش در حوزه‌های دیگری از ریاضیات را نمایان کرد. کلاین این عقیده که ایده‌های نظریه گروهی در ریاضیات اساسی و پایه‌ای هستند را شدیداً ترویج می‌کرد: "نظریه

گروهها به عنوان نظام مجزایی در سراسر ریاضیات مدرن ظاهر می‌شود و در بسیاری از حوزه‌های مختلف ریاضیات به عنوان اصول کلاسه کردن و مرتب نمودن سرایت می‌کند" [۳۳ صفحهٔ ۲۲۸].

زمینهٔ دیگری که در آن گروهها با هندسه مرتبط می‌شدند "هندسهٔ حرکت" بود یعنی استفاده از حرکت و یا تبدیلات اشیاء هندسی به عنوان اعضای گروه. تقریباً " در سال ۱۸۵۶ هامیلتون (بطور غیرصریح)" گروههای "اجسام منظم را مورد مطالعه قرار داد. در سال ۱۸۶۸ ژردان به رده‌بندی همهٔ زیرگروههای گروه حرکتهای فضای سه بعدی اقلیدسی پرداخت. و کلاین در کتاب **مباحثی دربارهٔ بیست وجهی** معادلهٔ درجهٔ ۵ را توسط گروه تقارنهای بیست وجهی " حل "کرد. بنابراین او ارتباط عمیقی میان گروههای چرخش اجسام منظم، معادلات بسجمله‌ای و نظریهٔ توابع مختلط یافته بود. (در همین **مباحث** بود که " گروه ۴تایی کلاین " کشف شد).

تقریباً "در اواخر ۱۸۶۰ کلاین و لی تواماً " بررسی اشیاء هندسی یا تحلیلی را که توسط **گروههایی از تغییرات** برخودشان منطبق می‌شوند". برعهده گرفتند. (این توصیف کلاین، در ۱۸۹۴، از سوابق برنامه‌شان است.)

درزمانی که کلاین روی گروههای گسسته متمرکز شده بود، لی گروه تبدیلات پیوسته را بررسی می‌کرد. لی این امر را محقق ساخت که نظریهٔ گروههای تبدیلات پیوسته ابزار قدرتمندی در هندسه و معادلات دیفرانسیل می‌باشند، و خود را موظف به "مشخص کردن تمام گروههای ..... تبدیلات پیوسته" کرد [۳۳ ، صفحهٔ ۲۱۴]. در اوایل ۱۸۸۰ وی با رده‌بندی این گروهها به هدفش نائل آمد (نگاه کنید به [۳۳]) چندسال بعد یک رده‌بندی از گروههای تبدیل ناپیوسته توسط پوانکاره و کلاین صورت گرفت.

فراسوی هنرهای تکنیکی به زمینهٔ گروه تبدیلات پیوسته و غیرپیوسته

(که نظریه‌های زیادی درهردو زمینه پیدا شد وگسترش یافت وهنوز نیز زمینه‌های فعالی برای پژوهش هستند) آنچه که از پیدایش این نظریات برای ما مهم است عبارت است از:

(یک) آنها یک توسیع وگسترش اساسی از برد مفهوم گروه فراهم آوردند - از گروههای جایگشتی وآبلی تا گروههای تبدیلات.

(دو) آنان نمونه‌های مهمی از گروههای نامتناهی را ارائه نمودند قبلاً تنها موضوع مورد مطالعه گروههای متناهی بودند.

(سه) دامنهٔ کاربرد مفهوم گروه تا نظریهٔ اعداد، نظریهٔ معادلات جبری، هندسه، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل (هم معمولی وهم پاره‌ای) ونظریهٔ توابع (توابع یکریخت، توابع مختلط) بطور گسترده‌ای توسط ایشان گسترش یافت.

تمام اینها مقدم بر ظهور مفهوم گروه مجرد اتفاق افتاد. درحقیقت این رخدادها در پیدایش مفهوم یک گروه مجرد که بعداً آنرا شرح می‌دهیم، سودمند واقع شدند. برای جزئیات بیشتر در مورد این قسمت رجوع کنید به [۵]، [۷]، [۹]، [۱۷]، [۱۸]، [۲۰]، [۲۴]، [۲۹]، [۳۳].

۳. ظهور تجرید در نظریهٔ گروهها

دیدگاه تجریدگرایانه در نظریه گروهها بکندی نمایان شد. بیش از صد سال بعد از کار نظریه گروهی (البته بطور تلویحی) لاگرانژ در سال ۱۷۷۰، مفهوم گروه مجرد کامل شد. از یک بل مراحل متعددی را در جریان تکامل این نظریه تا حد تجرد وتدوین اصول موضوعه آن برمی‌شمارد:

گسترش کامل این نظریه حدود یک قرن به طول انجامید. ترقی

وپیشرفت آن نمونه‌ای از تکامل یک نظام ریاضی بزرگ در دورهٔ اخیر است، ابتدا کشف پدیده‌های منفرد، سپس شناخت جنبه‌های معینی که بین آنها مشترکند، سپس از آن تحقیق برای شواهد بیشتر، محاسبات مفصل ورده‌بندی آنها، وبعد پیدایش قوانین کلی جهت انجام محاسبات گسترده‌تر، که هرچند برای کاربردهای مشخصی ضروری اند، به طور کلی زائدند وسرانجام فرمولبندی اصول موضوعه که به صورتی مجرد ساختار دستگاه مورد نظر را متبلور می‌سازد. [۲]

گرچه مطالب بالا بیش از حد ساده است (همان طور که هر تعمیمی چنین است)، با وجود این قالب وچهارچوب مفیدی را بیان کرده است. حقیقتاً "در مورد نظریه گروهها ابتدا " پدیده‌های منفرد" پدیدار شدند. جایگشتها فرمهای درجه دوم دوتایی، ریشه‌های واحد. سپس " جنبه‌های برجستهٔ مشترک " شناخته شدند - مفهوم گروه متناهی شامل گروههای جایگشتی ونیز گروههای آبلی متناهی (مقالهٔ فربینیوس واستیکبرگ که در بخش (۲-پ ذکر شد). پس از آن جستجوی مثالهای بیشتر - گروههای تبدیلات (نگاه کنید به بخش ۲ - پ)) وسرانجام فرمولبندی "اصول موضوعه" - شرایط اصلی یک گروه شامل متناهی ونامتناهی. ما هم اکنون نگاهی می‌افکنیم به چگونگی به وقوع پیوستن مراحل میانی ونهایی این تجرید.

درسال ۱۸۴۵ کیلی درمقاله‌ای تحت عنوان " درباره نظریهٔ گروهها وابسته به معادلهٔ نمادی $\theta^n=1$ " اولین تعریف مجرد از یک گروه متناهی را ارائه کرد. (درسال ۱۸۵۸ ددکنید درسخنرانیش راجع به نظریه گالوا درگوتینگن تعریف دیگری عرضه کرد). در اینجا به ذکر تعریف کیلی می‌پردازیم:

به مجموعه‌ای ازنمادهای 1، α، β، ..... که دوبدو ازیکدیگر متمایزند وحاصلضرب هردو از آنها (بدون درنظرگرفتن ترتیب) ویا حاصلضرب هرعضودرخودش دردرون این مجموعه واقع شود **گروه** گویند.

این نمادها درحالت کلی تغییرپذیر[جابجایی] نیستند اما همواره شرکت پذیرهستند.

درتعریف فوق این مساله را به دنبال می‌آوردکه اگرتمام اعضای یک گروه را درعضودلخواهی ضرب کنیم، چه ازدورچه از ـ نزدیک (یعنی چه ازراست وچه ازچپ) تاثیرش تنها دوباره به دست آوردن همان گروه است.

کیلی سپس چندین نمونه ازگروهها را معرفی می‌کند. مانندگروه کواترنیونها (تحت عمل جمع)، ماتریسهای معکوس پذیر (تحت ضرب) جایگشتها، فرمهای درجه دوم گاوس، وگروههایی که درنظریهٔ توابع بیضوی مطرح می‌شوند. آنگاه نشان می‌دهدکه هرگروه مجرد (دراصطلاح ما) یکریخت باگروهی ازجایگشتهاست، قضیه‌ای که هم‌اکنون به‌عنوان "قضیه‌کیلی" معروف است. ظاهرا "وی ازمفهوم گروههای یکریخت بخوبی آگاه بوده است، اگرچه هیچ تعریف صریحی از آن ارائه نداده است. با وجوداین وی جدول ضرب را برای هرگروه (متناهی) معرفی کرده ومی‌گویدکه هرگروه مجردتوسط جدول ضربش کاملا" مشخص می‌شود. سپس به تعیین تمام گروههای مرتبهٔ چهار روشن

می‌پردازدوبا ارائه‌جداول ضرب آنها نشان می‌دهدکه ازهریک دونوع وجوددارد وحتی بیشترا وبه این نکته نیزتوجه می‌کندکه هرگروه دوری ازمرتبه n " ازهرنظرقابل مقایسه با دستگاه ریشه‌های معادلهٔ معمولی $x^n-1=0$ است" . وتنها یک گروه ازمرتبهٔ یک عدداول معین وجود دارد.

جهت گیری کیلی به سمت نگرش تجریدی به گروهها ـ دستاوردی برجسته درآن مرحله ازتکامل نظریه گروهها ـ لااقل تا اندازه‌ای به خاطرآشنایی باکارهای مجردبول بوده است. علاقه به پایه‌های مجردریاضیات مشخصه محافل گرداگردبول، کیلی، سیلوستردردههٔ ۱۸۴۰ بودبا این وجودکار کیلی تنها یک پیروزی وموفقیت شخصی به حساب می‌آمد. با اینکه کیلی درآن زمان تقریبا "خوب شناخته شده بود"، اما تعریف تجریدی او ازگروه هیچ توجهی را به خودجلب نکرد. ظاهرا " جامعهٔ ریاضی آمادگی مواجهه با چنین کارهایی را نداشت. گروههای جایگشتی تنها گروههایی بودند که بطورجدی موردمطالعه قرار می‌گرفتند. وبطورکلی برخوردصوری با ریاضیات هنوزدراوائل دوران خودبه سرمی‌برد. کلاین این وضعیت را به سبک بی نظیرخودچنین توصیف می‌کند [۲۱] : " تجریدزودرس باگوشهای کر مواجه می‌شود، چه این گوشها ازآن ریاضیدانان باشدچه دانشجویان " برای تفصیل بیشتربه [۲۲]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۹]، [۴۳]، مراجعه کنید.

تنها یک ربع قرن بعدبکارگیری مفهوم گروه مجردآغازشد. ومجددا " این کیلی بودکه درچهارمقالهٔ کوتاه خوددرزمینهٔ نظریه‌گروهها که درسال ۱۸۷۸ آنها را به رشتهٔ تحریردرآورد، مجددا "به نقطه نظرتجریدی که درسال ۱۸۵۴ اتخاذکرده بود، بازگشت. دراینجا وی مسالهٔ کلی پیداکردن همه گروههای هم‌مرتبه را بیان کردونشان دادکه هرگروه (متناهی) باگروهی

از جایگشتها یکریخت است. اما همچنانکه خودش نیز اظهار می‌دارد، این "به هیچ وجه نشان دهندهٔ این نیست که بهترین و یا راحت‌ترین روش برخورد با این مساله توجه به آن در حالت خاص جایگشتهاست و به نظر می‌رسد که روش بهتر، بررسی خود این موضوع در حالت کلی و از آنجا نتیجه‌گیری در حالت خاص نظریه گروههای جایگشتی می‌باشد". [۲۲ صفحهٔ ۱۴۱] . این دسته از مقالات کیلی برخلاف مقاله‌های سال ۱۸۵۴ وی، الهام‌بخش کارهایی اساسی در نظریهٔ گروهها شد. یکی دیگر از ریاضیدانان که دیدگاه تجریدی نظریه گروهها را پیشرفت داد (بیشتر در قسمت جبر) وبر بود. جالب خواهد بود که نگاهی بیفکنیم به تعریف " مدرن "او از یک گروه مجرد (متناهی) که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۲ در زمینهٔ فرمهای درجه دوم بیان داشته است. [۲۳ صفحهٔ ۱۳]

دستگاه G متشکل از h عضو دلخواه θ_1، ....، θ_h یک گروه از مرتبهٔ h نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

یک. توسط قانونی که با ترکیب و یا ضرب نشان داده می‌شود به هر دو عضو این دستگاه عضو جدیدی از همان دستگاه نظیر می‌شود. به زبان صوری یعنی $\theta_r\theta_s=\theta_t$

دو. رابطهٔ زیر همواره درست است

$$(\theta_r\ \theta_s)\theta_t=\theta_r(\theta_s\theta_t)=\theta_r\theta_s\theta_t$$

سه. از $\theta\theta_r=\theta\theta_s$ و یا $\theta_r\theta=\theta_s\theta$ نتیجه می‌شود که $\theta_r=\theta_s$

تعریف وبر و یا سایر تعاریف در آن زمان، تنها گروههای متناهی را دربرداشت. بنابراین اینها فقط دو نظریهٔ گروههای جایگشتی و گروههای

آبلی (متناهی) را شامل بودند که متناظرا" از دو منشاء جبر کلاسیک (معادلات بسجمله‌ای) و نظریهٔ اعداد ریشه می‌گرفتند، و گروههای نامتناهی که از نظریه گروههای تبدیلات (ناپیوسته و پیوسته) مشتق می‌شدند تحت پوشش هیچیک از تعاریف فوق قرار نمی‌گرفتند. فن دیک در مقالهٔ مهم و پرتاثیر خود در ۱۸۸۲ تحت عنوان " مطالعات نظریهٔ گروهی "کلیهٔ منابع تاریخی نظریهٔ تجریدی گروهها را گنجاند و با یکدیگر تلفیق کرد. ریشه‌های جبری، نظریه اعدادی، هندسی و تحلیلی. به گفتهٔ خود فن دیک :

> هدف از بررسیهای ذیل ادامهٔ مطالعهٔ خواص یک گروه از دیدگاه تجریدی آن است. بویژه این شیوهٔ بررسی این سوال را مطرح می‌کند که تا چه حد این ویژگیها سرشت وجودی ثابتی در همهٔ ادراکات مختلف از یک گروه دارند. و نیز این سوال را که چه چیزی منجر به تعیین دقیق محتوای نظریهٔ گروهی آنها می‌شود.

تعریف فن دیک از یک گروه مجرد که هم حالت متناهی و هم حالت نامتناهی را دربرداشت بر اساس مولدها (که او آنها را " عمل" می‌نامید) و تعریف روابط بین آنها، واقع بود. (این تعریف قدری طولانی است) نگاه کنید به [۷ صفحات ۵ و ۶] . وی اظهار می‌دارد که " بهاین طریق همهٔ گروههای ایزومورف در تنها یک گروه جای می‌گیرند". و "ذات یک گروه با نمایش خاص عملهای آن بیان نمی‌شود بلکه در روابط متقابل آنها نموده می‌شود." وی سپس به ساختن گروه آزاد با n مولد می‌پردازد و نشان می‌دهد (البته بدون استفاده از این نامگذاریها) که هرگروهی که متناهیا" تولید شده باشد گروه خارج قسمتی یک گروه آزاد با رتبهٔ متناهی است. آنچه که از لحاظ

اصول موضوع نظریهٔ گروهها مهم است. توجه به این نکته است که فن دیک اولین کسی بود که در تعریف خود برای گروه وجود وارون هر عضو را ضروری دانست " ما به ملاحظاتی نیاز به این داریم که اگر گروهی شامل عملگر T_k بود باید وارون آن یعنی T_k^{-1} را نیز دربرداشته باشد". فن دیک در دومین مقالهٔ خود (در سال ۱۸۸۳) این فرایافت مجرد خود از گروهها را در گروههای جایگشتی، گروههای دوران متناهی (تقارنهای یک چندوجهی)، گروههای نظریه اعدادی، و گروه تبدیلات به کار گرفت.

گرچه در طی ۲۰ سال بعد اصول موضوع متعددی برای گروهها در نوشتارهای ریاضی پیدا شد، اما دیدگاه مجرد در نظریه گروهها بطور عام مورد استفاده واقع نمی‌شد. خصوصاً "کلاین، یکی از بزرگترین افرادی که در گسترش نظریهٔ گروهها سهیم بود، چنین می‌اندیشید که " فرمولبندی مجرد برای به دست آوردن اثباتها بسیار عالی است اما هیچ کمکی جهت به دست آوردن ایده‌ها و متدهای جدید به انسان نمی‌کند". و اضافه می‌کند" بطورکلی، زیان این روش (مجرد)، عاجز بودن آن از پروراندن فکر است" [۳۳، صفحهٔ ۲۲۸].

علی‌رغم مخالفت کلاین، جامعهٔ ریاضی آن زمان (اوائل دههٔ ۱۸۸۰) پذیرای این روش بود (مقایسه کنید با برخوردی که با تعریف ۱۸۵۴ کیلی شد). دلایل اصلی این پذیرش چنین بود:

(یک) وجود تعداد متعددی نظریهٔ "ملموس" مهم گروهها مانند گروههای جایگشتی، گروههای آبلی، گروههای تبدیلات ناپیوسته (به صورت متناهی و نامتناهی)، گروههای تبدیلات پیوسته، و این مجوزی است برای تجرید ماهیت ذاتی آنها.

(دو) گروهها جهت ایفای نقشی مرکزی در زمینه‌های گوناگون ریاضیات مانند بخشهای متفاوتی در جبر، هندسه، نظریه اعداد و حوزه‌های متعددی از

آنالیز به کار گرفته می‌شدند و دیدگاه مجرد گروهها جهت روشن شدن آنچه که برای چنان کاربردهایی ضروری به نظر می‌رسید و برای عرضهٔ امکاناتی جهت کاربردهای بیشتر، مناسب تشخیص داده شد.

(سه) این رهیافت صوری، که نفوذ ریاضیات نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی به آن کمک می‌کرد، در سایر زمینه‌های ریاضیات مانند بخشهای گوناگونی از هندسه و آنالیز نیز متداول گشته بود.

در بخش آینده ما تکامل این نوع نگرش به نظریه گروهها را با اختصار دنبال خواهیم کرد.

۴- تحکیم مفهوم گروه مجرد، طلوع نظریه مجرد گروهها

مفهوم گروه مجرد در طی سالهای ۱۸۸۰ و ۱۸۹۰ به سرعت انتشار یافت، اگرچه هنوز مقدار زیادی مقاله در مورد گروههای جایگشتی و تبدیلات منتشر می‌شدند. این دیدگاه تجریدی از دو طریق خود را متجلی ساخت:

(الف) مفاهیم و قضایایی پدید آمده و اثبات شده در گروههای " ملموس" به صورتی مجرد دوباره فرمولبندی و اثبات می‌شدند.

(ب) پژوهشهایی نشات گرفته از، و بر اساس، روش تجریدی ظاهر شدند.

مثال جالبی از مورد اخیر، اثبات دوبارهٔ قضیهٔ سیلو توسط فروبنیوس، به صورتی مجرد بود، سیلو قضیهٔ خود را در ۱۸۷۲ برای گروههای جایگشتی اثبات کرده بود. این کار در سال ۱۸۸۷ در مقاله‌ای تحت عنوان "Neuer Beweis Sylowschen Satzes" انجام گرفت. گرچه فروبنیوس با توجه به این حقیقت که هر گروه متناهی می‌تواند توسط گروهی از جایگشتها نمایانده شود، پذیرفت که قضیهٔ سیلو باید برای هر گروه متناهی درست باشد، اما وی می‌خواست اثبات این قضیه

را درحالت کلی به‌دست دهد: "ازآنجائی‌که گروه متقارن که در تمام این اثباتها معرفی می‌شود کاملاً با زمینهٔ قضیهٔ سیلو بیگانه است، من برای یافتن استنتاج جدیدی از آن تلاش کرده‌ام" (برای مطالعه راجع به نحوهٔ گسترش تجرد در نظریه گروهها در زمینهٔ قضیهٔ سیلو مراجعه کنید به [۲۸] و [۳۲].

هولدر از افرادی بود که نقش مهمی در نظریهٔ گروههای مجرد ایفا کرده است و عهده‌دار معرفی تعدادی از مفاهیم نظریه گروهی بطور محض بود. مثلاً، در سال ۱۸۸۹ وی مفهوم مجرد گروه خارج‌قسمتی را معرفی کرد. ("گروه خارج قسمتی" اولین بار در گروه گالوای "معادلهٔ کمکی" مشاهده شده و بعداً از آن به عنوان تصویر همریخت و تنها در زمان هولدر به عنوان گروهی از هم‌مجموعه‌ها در نظر گرفته می‌شد) و نیز اثبات قضیهٔ ژردان ـ هولدر را که می‌گوید گروههای خارج قسمتی یک سری ترکیبی، تحت ایزومرفیسم ثابتند را کامل نمود (برای نقش ژردان در این زمینه به قسمت (۲ ـ الف) مراجعه کنید). در سال ۱۸۹۳ در مقاله‌ای راجع به گروههای مرتبهٔ p^3، pq^2، pqr و p^4 وی مفهوم خودریختی یک گروه را بطور مجرد معرفی کرد.

هولدر همچنین اولین کسی بود که گروههای ساده را به طور مجرد مورد مطالعه قرار داد. (قبلاً اینها در حالتهای مشخص همچون گروههای جایگشتی و گروه تبدیلات و مانند آن در نظر گرفته می‌شدند). آنچنانکه او می‌گوید [۲۹ صفحه ۳۳۸]: " این بزرگترین فایده را خواهد داشت اگر بررسی جامعی از تمام گروههای ساده با تعداد متناهی عملگر می‌توانست انجام شود." (منظور هولدر از "عملگر" همان عضو است) وی سپس به تعیین گروههای ساده تا ۲۰۰ عضو می‌پردازد.

نمونه‌های واقعی دیگری از مطالعات در این زمینه مقالات ددکیند و گ. میلر در ۱۸۹۸/۱۸۹۷ در مورد گروههای هامیلتونی بود، یعنی گروههای

غیرآبلی که تمام زیرگروههای آنها بهنجارند. آنها (جدای از یکدیگر) این گروهها را بطور مجرد مشخص کرده و در انجام این کار مفهوم جابجاگرد و عضو و زیرگروه جابجاگر را معرفی کردند. (قبلاً ژردان جابجاگرد و جایگشت را معرفی کرده بود).

نظریهٔ گروه کاراکترها و نظریهٔ نمایش گروههای متناهی نیز (که به ترتیب توسط فروبینیوس و برنساید فروبینیوس، مولین در اواخر قرن نوزدهم ابداع شده‌اند) به قلمروی نظریهٔ گروههای مجرد تعلق دارند، چنانچه آنها برای اثبات نتایج مهمی در زمینهٔ گروههای مجرد مورد استفاده واقع می‌شوند. برای تفصیل بیشتر نگاه کنید به [۱۷].

گرچه مفهوم گروه مجرد تا اواخر قرن نوزدهم بخوبی تثبیت شد، اما "آنچنانکه از شیوهٔ ارائه گروهها در مقالات، کتابها و جزوات درسی تک نگاریها برمی‌آید، با پذیرش عمومی همراه نبود. تک نگاریهای مربوط به نظریه گروهها بر اساس دیدگاه تجریدی آن تا اوائل قرن بیستم ظاهر نشدند. اما پیدایش آنها در این دوره نشانگر تولد نظریهٔ گروههای مجرد بود. (وسینگ، [۳۳]).

اولین رساله‌ای که تماماً به نظریهٔ گروههای مجرد اختصاص داشت کتاب "Elements of the theory of Abstract Groups" به قلم ج.ا. دسیر در سال ۱۹۰۴ بود [۲۷]. در ابتدای این کتاب یک مقدمهٔ نظریه مجموعه‌ای بر اساس کار کانتور وجود دارد." احتمالاً دسیر اولین جبردانی است که به کشف کاردینالهای ناشمارا توسط کانتور توجه کرده است. (چندلر و ماگنوس، [۷]). سپس مقدمه‌ای دارد راجع به مفهوم یک نیم‌گروه با قانون حذف دوطرفه و اثبات اینکه هر نیم‌گروه متناهی یک گروه است. همچنین حاوی اثباتی برای استقلال اصول موضوع یک گروه از طریق ارائه مثالهای

ناقص است. کتاب دسیر مباحثی راجع به یکریختی، همریختی، خودریختی، ترکیب گروهها از طریق حاصلضرب مستقیم، قضیهٔ ژردان ـ هولدر، اولین قضیهٔ یکریختی، گروههای آبلی و قضیهٔ اساسی آنها، گروههای هامیلتونی وسرانجام نظریهٔ p-گروهها را شامل است. تمام این مباحث براساس نگرشی مجرد ارائه شده و گروههای "ملموس" به ضمیمه ارجاع داده شده‌اند. "شیوهٔ دسیر تفاوت بسیار مشخصی با کاردیک دارد. در اینجا هیچگونه ملاحظات شهودی وجود ندارد و... تمایل به تجرید و تعمیم تا حد امکان موجود است ..." (چندلر و ماگنوس، [۷]).

کتاب دسیر به مقدار زیادی به گروههای متناهی اختصاص دارد. اولین رسالهٔ مجرد که از گروهها بطور تمام سخن می‌گوید و حالت خاص گروههای متناهی را به فصول مشخصی ارجاع می‌دهد، رسالهٔ اشمیت تحت عنوان Abstract Theory of Groups درسال ۱۹۱۶ است[۲۶]. اشمیت، موسس مکتب روسی نظریهٔ گروهها، چهار فصل اول کتابش را به خواص مشترک گروههای متناهی و نامتناهی اختصاص داده است و بحث راجع به گروههای متناهی را به فصل پنجم موکول کرده است. این کتاب مجموعا" شامل ۱۰ فصل است. نگاه کنید به [۷]، [۱۰]، [۳۳].

۵. انشعاب در بسط و توسعهٔ نظریهٔ گروهها

نظریهٔ گروهها از منابع گوناگونی نشات گرفته و منجر به نظریه‌های ملموس متعددی شده است. این نظریه‌ها گاهی بیش از صد سال (شروع در ۱۷۷۰) قبل از آنکه (در اوائل دههٔ ۱۸۸۰) در مفهوم گروه مجرد همگرا شوند هر یک بطور مستقل رشد و تکامل پیدا کرده‌اند. سپس، نظریهٔ گروههای مجرد ظهور پیدا کرد و در طی ۳۰ الی ۴۰ سال بعد پایه‌های آن محکم گشت. در پایان آن دوره

(حدود سال ۱۹۲۰) می‌توان انشعاب در نظریهٔ گروهها را به چندین "نظریه" مجزا مشاهده کرد. آنچه که متعاقبا" ذکر می‌شود گویای **حداقلی** از این پیشرفتها و پیدایش شاخه‌های جدید است که از دههٔ ۱۹۲۰ آغاز گشته است (همراه با نام محققین مربوط و تاریخ تقریبی آنها):

(الف) **نظریهٔ گروههای متناهی**. موضوع اصلی این نظریه که قبلا" توسط کیلی (در دههٔ ۱۸۷۰) فرمولبندی و توسط ژردان و هولدر مورد مطالعه قرار گرفت، یافتن تمام گروههای متناهی از یک مرتبهٔ معین است. معلوم شد که مساله‌ای است بسیار دشوار و ریاضیدانان توجه خود را به حالتهای خاصی (که خصوصا" توسط نظریهٔ گالوا القاء می‌شد) معطوف کردند: پیدا کردن تمام گروههای ساده یا حل پذیر (قضیهٔ تامپسون در ۱۹۶۳ و رده بندی تمام گروههای ساده متناهی در ۱۹۸۱) نگاه کنید به [۱۴]، [۱۵]، [۳۰].

(ب) **تعمیم نتایج معینی از نظریه گروههای متناهی به گروههای نامتناهی با شرایط متناهی کننده**. مثلا"، اثبات اشمیت در ۱۹۲۸ برای قضیهٔ رماک ـ کرول ـ اشمیت [۵].

(پ) **نمایش گروهها (نظریه گروههای ترکیبی)** که درسال ۱۸۸۲ توسط فن دیک شروع و در قرن بیستم توسط م. دن، هـ. تیتزه، ن. نیکسون، ا. آرتین، ا. شریر ادامه یافت [۷].

(ت) **نظریه گروههای آبلی نامتناهی** (هـ. پروفر، ر. بئر، هـ. اولم و دیگران ـ دههٔ ۱۹۲۰ تا دههٔ ۱۹۳۰). [۳۰]

(ث) **نظریهٔ شریر دربارهٔ گروههای توسیعی** (۱۹۲۶) که بعدا" به کوهمولوژی گروهها منجر شد.

(ج) گروههای جبری(ا .بورل ،ک . شوالیه‌ودیگران ــ دههٔ ۱۹۴۰).

(چ) گروههای توپولوژیکی شامل توسیع نظریهٔ نمایش گروهها به‌گروههای پیوسته (شریر ،ا .کارتان،ل . پونتریاگین ،ی .گلفاند،ج .فــــون نویمان ودیگران ــ دهه‌های ۱۹۲۰ و۱۹۳۰).[۴]

Israel Kleiner, " the Evolution of Group theory: A Brief Survey", *Mathematics Magazine*, vol.59.No.4,october 1986.

مراجع :

We give references here to *secondary* sources. Extensive references to *primary* sources, including works referred to in this article, may be found in [25] and [33].

[1] R. G. Ayoub, Paolo Ruffini's contributions to the quintic, Arch. Hist. Ex. Sc., 23 (1980) 253–277.
[2] E. T. Bell, The Development of Mathematics, McGraw Hill, 1945.
[3] G. Birkhoff, Current trends in algebra, Amer. Math. Monthly, 80 (1973) 760–782 and 81 (1974) 746.
[4] ______, The rise of modern algebra to 1936, in Men and Institutions in American Mathematics, eds. D. Tarwater, J. T. White and J. D. Miller, Texas Tech. Press, 1976, pp. 41–63.
[5] N. Bourbaki, Eléments d'Histoire des Mathématiques, Hermann, 1969.
[6] J. E. Burns, The foundation period in the history of group theory, Amer. Math. Monthly, 20 (1913) 141–148.
[7] B. Chandler and W. Magnus, The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas, Springer-Verlag, 1982.
[8] A. Dahan, Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Etude de son approche du concept de groupe, Arch. Hist. Ex. Sc., 23 (1980) 279–319.
[9] J. Dieudonné (ed.), Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1700–1900, 2 vols., Hermann, 1978.
[10] P. Dubreil, L'algèbre, en France, de 1900 à 1935, Cahiers du seminaire d'histoire des mathématiques, 3 (1981) 69–81.
[11] C. H. Edwards, The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, 1979.
[12] H. M. Edwards, Galois Theory, Springer-Verlag, 1984.
[13] J. A. Gallian, The search for finite simple groups, this *Magazine*, 49 (1976) 163–179.
[14] D. Gorenstein, Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification, Plenum Press, 1982.
[15] ______, The Classification of Finite Simple Groups, Plenum Press, 1983.
[16] R. R. Hamburg, The theory of equations in the 18th century: The work of Joseph Lagrange, Arch. Hist. Ex. Sc., 16 (1976/77) 17–36.
[17] T. Hawkins, Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory, Arch. Hist. Ex. Sc., 8 (1971/72) 243–287.
[18] ______, The *Erlanger Programme* of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematics, Hist. Math., 11 (1984) 442–470.
[19] B. M. Kiernan, The development of Galois theory from Lagrange to Artin, Arch. Hist. Ex. Sc., 8 (1971/72) 40–154.
[20] F. Klein, Development of Mathematics in the 19th Century (transl. from the 1928 German ed. by M. Ackerman), in Lie Groups: History, Frontiers and Applications, vol. IX, ed. R. Hermann, Math. Sci. Press, 1979, pp. 1–361.
[21] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press, 1972.
[22] D. R. Lichtenberg, The Emergence of Structure in Algebra, Doctoral Dissertation, Univ. of Wisconsin, 1966.
[23] U. Merzbach, Development of Modern Algebraic Concepts from Leibniz to Dedekind, Doctoral Dissertation, Harvard Univ., 1964.
[24] G. A. Miller, History of the theory of groups, Collected Works, 3 vols., pp. 427–467, pp. 1–18, and pp. 1–15, Univ. of Illinois Press, 1935, 1938, and 1946.
[25] L. Novy, Origins of Modern Algebra, Noordhoff, 1973.
[26] O. J. Schmidt, Abstract Theory of Groups, W. H. Freeman & Co., 1966. (Translation by F. Holling and J. B. Roberts of the 1916 Russian edition.)
[27] J.-A. de Séguier, Théorie des Groupes Finis. Eléments de la Théorie des Groupes Abstraits, Gauthier Villars, Paris, 1904.
[28] L. A. Shemetkov, Two directions in the development of the theory of non-simple finite groups, Russ. Math. Surv., 30 (1975) 185–206.
[29] R. Silvestri, Simple groups of finite order in the nineteenth century, Arch. Hist. Ex. Sc., 20 (1979) 313–356.
[30] J. Tarwater, J. T. White, C. Hall, and M. E. Moore (eds.), American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics, Texas Tech. Press, 1981. Has articles by Feit, Fuchs, and MacLane on the history of finite groups, abelian groups, and abstract algebra, respectively.
[31] B. L. Van der Waerden, Die Algebra seit Galois, Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver., 68 (1966) 155–165.
[32] W. C. Waterhouse, The early proofs of Sylow's theorem, Arch. Hist. Ex. Sc., 21 (1979/80) 279–290.
[33] H. Wussing, The Genesis of the Abstract Group Concept, M.I.T. Press, 1984. (Translation by A. Shenitzer of the 1969 German edition.)