رده بندی گروههای ساده

ترجمه واقتباس : احمد حقانی

بدون تردید یکی از بزرگترین موفقیتهای ریاضیدانان دردهه‌های اخیر بیان واثبات قضیه‌ای است که گروههای متناهی ساده را رده‌بندی می‌کند. براساس این قضیه می‌توان گفت که هرگروه ساده دلخواه با کدام گروه شناخته شده یکریخت (ایزومورف) است. گروههای ساده از همان اوان مطالعهٔ گروهها توسط نابغهٔ ریاضیدان فرانسوی اواریست گالوا دردههٔ ۱۸۳۰ مورد توجه بوده‌اند. گالوا با استفاده از خواص گروهها پرسشی را که در آن زمان دویست ساله بود پاسخ منفی داد: آیا جوابهای معادلات بسجمله‌ای از درجهٔ پنج یا بالاتر را می‌توان با فرمولهایی نظیر دستورهای آشنای حل معادلات درجهٔ اول ودوم (وقواعد کمتر آشنای حل معادلات درجهٔ سوم ودرجهٔ چهارم) به‌دست آورد؟ یکی از سنگهای زیربنایی کار گالوا توجه به این واقعیت بود که گروه جایگشتهای زوج بر n حرف ، A_n ، موسوم به گروه متناوب ، گروهی ساده است درصورتی که $n \geqslant 5$. یادآور شویم که گروه ساده آن است که تنها دو تصویر همریخت (هومومورف) داشته باشد ، یکی گروه بیمایه ودیگری خودگروه. شرط ساده بودن معادل با نداشتن زیرگروه نرمال نابدیهی است .

این گروههای A_n تشکیل یک خانوادهٔ نامتناهی ازگروههای متناهی ساده می‌دهند. یک چنین خانواده دیگر (وکاملا" متمایزازخانوادهٔ پیش) متشکل ازگروههای دوری (سیکلیک) ازمرتبهٔ عدداول p است، زیرا برطبق یک حکم مقدماتی مرتبهٔ هرتصویرهمریخت این گروه باید p را بشمارد. ازآنجاکه گروههای ساده نقش "بلوکهای ساختمانی" را درساختار گروهها دارند، مطالعه وشناخت گروههای ساده ازجمله جاذبه‌های اصلی درنظریهٔ گروهها گردید. اما جالب آنکه درردهبندی گروههای ساده، بررسی گروههای متناهی بطورعام موردنیاز واقع شد.

با استفاده ازنتایج بیش از ۵۰۰ مقاله که درمجلات تکنیکی ریاضی بین سالهای ۱۹۴۰ تا اوایل دههٔ ۱۹۸۰ منتشرشدوجمعا "حدود ۱۵۰۰۰ صفحه ازاین مجلات را اشغال نموده اندقضیه‌ای به‌دست آمدکه گروههای متناهی ساده را رده‌بندی می‌کند. این قضیه مبتنی برکارهای نظریه‌پردازان برجسته‌ای چون براور، فیشر، تامپسون، گرنشتاین ودیگران است ونتیجهٔ کوششهای مشترک بیش ازیکصدریاضیدان عمدتا "آمریکایی، انگلیسی وآلمانی ونیز استرالیایی، کانادایی وژاپنی است.

خبررسمی قریب الوقوع بودن این موفقیت بزرگ اولین بار درجلد یکم، شماره یکم بولتن انجمن ریاضی آمریکا درژانویهٔ ۱۹۷۹ توسط دانیل گرنشتاین اعلام شد. وی تنها برای بیان روشها وتکنیکهای مربوط به اثبات وتوصیف کلی مطالب بدون آنکه به‌جزئیات بپردازد ۱۵۶ صفحه ازبولتن را به‌خوداختصاص داد. تامدتی برخی ازدست اندرکاران امکان تکمیل اثبات قضیهٔ رده‌بندی را با ناباوری تلقی می‌کردند، خاصه آنکه محاسبات مربوط به‌دوگروه ساده هنوزانجام نشده بودولذا وجودآنها مسلم نبود. وانگهی چه‌کسی می‌تواندیک اثبات ۱۵۰۰۰ صفحه‌ای را مطالعه وبراعتبار آن به‌قضاوت بنشیند؟ گرنشتاین متعاقبا "در ۱۹۸۲ کتابی باعنوان

گروههای متناهی ساده وسپس کتاب دیگری درموردرده بندی گروههای متناهی ساده در ۱۹۸۳ منتشرساخت .تا این زمان دیگرا ثبات قضیهٔ رده بندی کامل شده بود ،قضیه ای که درتاریخ ریاضیات بیمانند است واین نه تنها به علت اثبات بسیار طولانی وطبیعت فریبندهٔ آن ،بلکه همچنین به خاطر برانگیختن علاقه های بسیار دردیگرشاخه های ریاضیات است .ذیلا"گوشه هایی ازاین قضیهٔ باعظمت راازخامهٔ گرنشتاین بازمی‌گوییم .

به موازات پیشرفت پژوهش بر مساله ،نظریه پردازان گروه نه تنها خانواده های نامتناهی ازگروههای ساده کشف کردند- وسرانجام ۱۸ خانواده ازاین نوع ساخته شدند- بلکه به کشف تعدادی گروههای بسیار نامنظم که عضوهیچیک ازاین خانواده های منظم نیستند توفیق یافتند .اولین ۵ گروه سادهٔ پراکنده (واین نامی است که بعدها برآنها نهاده شد)پیش ازاین در ۱۸۶۰ توسط امیل ماتیو یافته شده بودند .کوچکترین گروه ماتیو دقیقا"

$$8\times9\times10\times11=7920$$

عضودارد .درست یک قرن بعدازکارماتیوششمین گروه پراکنده که ازمرتبهٔ ۱۷۵۵۶۰ است توسط یانکو ،که درآن زمان دردانشگاه موناش دراسترالیا بود ،کشف شد .ازاین پس گروههای پراکندهٔ دیگر ،تقریبا"یکی درهرسال پا به عرصهٔ وجودنهادندواین به موازات تحولات نظری وسیع دهه های ۱۹۶۰و ۱۹۷۰ بود .هیجانات ناشی ازاین اکتشافات به جوامع بزرگتر ریاضی‌کاران رسوخ کردونقطهٔ اوج آن در ۱۹۸۲ رخ داد ،هنگامی که رابرت گریس ،آن زمان درانستیتوی مطالعات عالی ،گروهی ساخت که بعدا"هیولا نام گرفت . علت نامگذاری این گروه ساده مرتبهٔ آن است :

$$2^{46}\times3^{20}\times5^{9}\times7^{6}\times11^{2}\times13^{3}\times17\times19\times23\times29\times31\times41\times47\times59\times71$$

= ۸۰۸،۰۱۷،۴۲۴،۷۹۴،۵۱۲،۸۷۵،۸۸۶،۴۵۹،۹۰۴،۹۶۱،۷۱۰،۷۵۷،

۰۰۵،۷۵۴،۳۶۸،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ $\simeq ۸ \times ۱۰^{۵۳}$

سرانجام ۲۶ گروه سادهٔ پراکنده یافته شدند. برحسب مرتبه، هیولا بزرگترین آنهاست، اما به علت آنکه ساختار این گروه تقارنهای درونی زیادی را نشان می‌دهد، کاشف آن گریس آن را به "غول مهربان" تغییر نام داد.

کشف یک گروه ساده یک چیز است و خود کشف ثمره و پاداش کار، اما اثبات این گزاره که همهٔ گروههای متناهی ساده در دست هستند چیز دیگری است و آن:

قضیهٔ رده‌بندی هرگروه متناهی ساده یکریخت با یکی از گروههای زیر است:

۱. یک گروه دوری از مرتبهٔ اول؛

۲. یک گروه متناوب؛

۳. عضوی از یکی از ۱۶ خانوادهٔ نامتناهی از گروههای نوع لی؛ یا

۴. یکی از ۲۶ گروه پراکنده که با هیچیک از گروههای فوق الذکر یکریخت نیست.

درجریان عادی امور، اثبات یک حکم که به صورت حدسی صریح بیان می‌شود ممکن است مدتها به طول کشد. حدس بدون دلیل متقن صورت نمی‌پذیرد زیرا یا به وسیلهٔ تحقیقاتی که پیش از این انجام شده به ذهن می‌رسد، یا مثالهای پرمایه‌ای که حدس دربارهٔ آنان معتبر است وجود دارند. در بیشتر زمانی که مسالهٔ گروههای متناهی ساده مورد مطالعه و تحقیق قرار داشت نظریه‌پردازان گروه حتی نمی‌توانستند با قطعیت دربارهٔ تعداد گروههای

ساده‌ٔ پراکنده اظهار نظر کنند. درنتیجه باید سالها پس از آنکه کار در مورد قضیه‌ٔ رده‌بندی شروع شده بود سپری می‌شد تا این ریاضیدانان تازه بتوانند صورت قضیه‌ای را که امیدوار بودند سرانجام به اثبات خواهند رساند بیان کنند. این واقعیت سبب شد که مطالعات بر تنها انواعی محدود از گروههای ساده متمرکز گردد و در نتیجه بتدریج قضایای رده‌بندی محدود (یا مشروط) که بنیاد کوچکترین گروههای پراکنده‌ٔ بازمانده را آشکار نمودند به اثبات رسیدند.

این طرز عمل با کشف ششمین گروه پراکنده توسط یانکو در ارتباط با هفدهمین خانواده‌ٔ منظم گروههای ساده که در ۱۹۶۰ توسط ری یافته شده بودند بخوبی نشان داده می‌شود. هر گروه ساده زیر گروههایی موسوم به مرکز سازهای پیچش دارد که در شناخت ساختار گروه ساده اهمیت دارند (پیچش عضوی از مرتبه‌ٔ ۲ است، مرکزساز عضو a برابر مجموعه‌ٔ اعضای x از گروه است که ax=xa). برای گروههای ری مرکزسازهای پیچش را می‌توان به توسط ماتریسهای مربع ۲×۲ نمایش داد که چهار درایه‌ٔ آنها متعلق به یک میدان متناهی با مرتبه‌ٔ توان فردی از ۳ هستند. مثلاً، اگر این توان فرد عدد ۳ برابر ۱ باشد، آن میدان سه‌عضوی چیزی نیست جز Z_3. برای اثبات یکی از اولین قضایای رده‌بندی محدود لازم بود نشان داده شود که گروههای ری تنها گروههای ساده با خاصیت زیر هستند: مرکزسازهای پیچشهای این گروهها با ماتریسهای ۲×۲ نمایش داده می‌شوند که درایه‌هایشان از میدانی که مرتبه‌اش توان فردی از یک عدد اول p است گرفته شده‌اند. طبعاً به‌عنوان اولین گام به‌سوی آن هدف اقدام به اثبات حدس زیر بود: اگر گروه ساده‌ٔ دلخواهی دارای خاصیت فوق الذکر باشد، مرتبه‌ٔ میدانی که درایه‌های ماتریسهای ۲×۲ از آن گرفته می‌شوند برابر توانی فرد از عدد اول ۳ است.

با گذشت زمان ، این حدس تنها در یک حالت که p برابر ۵ و توان فرد برابر یک است محقق گشت . یانکو شروع به مطالعهٔ حالت استثنایی کرد در حالی که انتظار داشت گروههای ساده‌ای از نوع مفروض که میدان مربوطه از مرتبهٔ $5^1=5$ است علی الاصول وجود نداشته باشند . ولی علی رغم تمام کوششهایش نتوانست این امکان را حذف و در نتیجه اثبات حدس را کامل کند . برعکس ، پس از تلاشهای قابل ملاحظه موفق شد نشان دهد که اگر چنین گروه ساده‌ای وجود داشته باشد باید دقیقا "

$$2^3\times3\times5\times7\times11\times19=175560$$

عضو داشته باشد . یانکو با ناباوری به این دستاورد دقیق خود می‌نگریست ، مگر آنکه واقعا "یک چنین گروهی در پس پرده وجود میداشت . وی سپس استدلال کرد که اگر چنین گروهی وجود داشته باشد ، باید توسط دو ماتریس ۷×۷ بر میدان Z_{11} تولید گردد . به عبارت دیگر ، هرگاه این دو ماتریس مولد A و B نامیده شوند ، این گروه می‌باید متشکل از تمام حاصلضربهای ماتریسی ممکن از A و B باشد . تنها پرسش باقیمانده این بود که آیا گروه چنین ماتریسهایی دقیقا " ۱۷۵۵۶۰ عضو دارد ؟ اگر نه ، تحلیل یانکو تناقضی را که وی از ابتدا در پی آن بود به دست می‌داد . یانکو بدون استفاده از کامپیوتر ، و با انجام محاسبات نشان داد که مرتبهٔ گروه تولید شده توسط A و B برابر ۱۷۵۵۶۰ است . بدین ترتیب ، وجود ششمین گروه پراکنده که اکنون به افتخار یانکو با J_1 نشان داده می‌شود محرز گردید . ماتریسهای مولد A و B برای J_1 چنین اند :

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} ۸ & ۲ & ۱۰ & ۱۰ & ۸ & ۱۰ & ۸ \\ ۹ & ۱ & ۱ & ۳ & ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱۰ & ۱۰ & ۸ & ۱۰ & ۸ & ۸ & ۲ \\ ۱۰ & ۸ & ۱۰ & ۸ & ۸ & ۲ & ۱۰ \\ ۸ & ۱۰ & ۸ & ۸ & ۲ & ۱۰ & ۱۰ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۹ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۹ & ۱ & ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

ساختن J_1 توسط یانکو به لحاظ شبیه فیزیک ذرات بنیادی است، زیرا ابتدا تحلیل نظری شواهدی دال بر وجود یک گروه سادهٔ جدید به دست داد، سپس محاسبات صریح، نظیر تایید تجربی، ثابت کرد که بواقع چنین گروهی وجود دارد.

این فرآیند دو مرحله‌ای با دومین موفقیت یانکو بهتر توضیح داده می‌شود. اگر J_1 از اختلاط خاصیتهای مرکزسازهای پیچشهای گروههای ری کشف شد، چرا روشی مشابه در مورد سایر گروههای سادهٔ معلوم به کار نرود؟ یانکو از تنها یک مرکزساز پیچش شواهدی بر امکان وجود دو گروه سادهٔ جدید به دست آورد، یکی با ۶۰۴۸۰۰ عضو و دیگری از مرتبهٔ ۵۰۲۳۲۹۶۰. ولی این بار یانکو نتوانست به تایید تجربی بپردازد. با استفاده از اطلاعات به دست آمده توسط یانکو، مارشال هال و دیوید ویلز از انستیتوی تکنولوژی کالیفرنیا، توانستند گروه کوچکتر J_2 را و گراهام هیگمن، از دانشگاه آکسفورد، و جان مک کی، از دانشگاه کنکوردیای کانادا، موفق شدند گروه بزرگتر J_3 را بسازند. در مورد J_3 محاسبات پیچیده‌تر و مشکل‌تر از آن بودند که با دست انجام شوند

ولذا از کامپیوتر مدد گرفته شد.

صحنه در اینجا تغییر می‌کند، زیرا هال و ویلز توانسته بودند J_2 را به عنوان گروهی آشنا از جایگشتها بسازند. نظریه‌پردازان گروه بر عرصهٔ جدید هجوم آوردند و بزودی چهار گروه پراکندهٔ دیگر کشف شدند. سرعتی که با آن این کشفیات اولیه انجام گرفت تنها این نظر را تقویت کرد که تعداد گروههای پراکنده‌ای که هنوز معلوم نشده‌اند بسیار زیاد است، و حتی ممکن است نامتناهی باشد. امروز با درک و یادآوری اموری که واقع شده است به نظر ریاضیدانان کشف J_2 و J_3 توسط یانکو تقریبا "معجزه‌آور" تلقی می‌شود. زیرا از هزاران متغیرهای بالقوه که می‌شد از میان آنها انتخاب کرد، وی یکی از معدود متغیرهایی را که امکان ثمردهی داشتند برگزیده بود.

پیش از این به دو خانوادهٔ نامتناهی از گروههای متناهی ساده اشاره شد. اما دیگر خانواده‌های گروههای متناهی ساده را نمی‌توان آنچنان راحت وصف کرد. جملگی دارای نمایشهایی به عنوان گروههای ماتریسهای مربع با اندازه‌های مناسب هستند. در برخی از حالتها، گروهها مقدمتا "با چنین ماتریسهایی تعریف می‌شوند، در حالیکه در دیگر حالتها کار زیادی لازم است تا بتوان نمایش ماتریسی آنها را به دست آورد. چنین وضعی در مورد گروههای پراکنده تیز برقرار است، اما وضع در این موارد پیچیده‌تر است. گاهی توصیف ماتریسی بر محاسبات کامپیوتری مبتنی است. قابل توجه آنکه گرچه هیولا بزرگترین گروههای پراکنده است، گریس توانست یک نمایش ماتریسی برای آن کلا" با محاسبات دستی و بدون کامپیوتر به دست آورد. در این کار، وی ماتریسهای مربع با اندازهٔ ۱۹۶۸۸۳ با درایه‌های مختلط به کار برد.

درصورت قضیهٔ رده‌بندی گروههای نوع‌لی ذکر شدند. اینها مشابه‌های متناهی از گروههای (مختلط) لی هستند که به سه دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند: گروههای شوالی، گروههای استاینبرگ و گروههای سوزوکی و ری. در اینجا

تنها به گروههای شوالی اشاره می‌کنیم چه توصیف دیگر گروهها بسیار تکنیکی وخارج از حوصلهٔ نوشتهٔ حاضر است. چهار خانوادهٔ نامتناهی از گروههای مختلط لی ساده وجود دارند: $A_n(\mathbb{C})$, $B_n(\mathbb{C})$, $C_n(\mathbb{C})$, $D_n(\mathbb{C})$ که بترتیب متناظرند با: گروههای خطی $SL(n+1, \mathbb{C})$، گروههای متعامد $SO(2n+1,\mathbb{C})$، گروههای سمپلکتیک $S_p(2n, \mathbb{C})$ وگروههای متعامد $SO(2n, \mathbb{C})$. یادآور می‌شویم که GL_m، **گروه خطی عام** بر یک میدان، همان گروه همهٔ ماتریسهای وارون پذیر $m \times m$ با درایه‌های در آن میدان است. ماتریسهایی که دترمینانشان برابر یک باشد تشکیل زیرگروهی نرمال موسوم به **گروه خطی خاص** در گروه خطی عام می‌دهند. خارج قسمت گروه خطی خاص به گروه ماتریسهای اسکالر برابر گروه PSL_m، موسوم به **گروه خطی خاص تصویری**، است. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند تعریف وخواص ابتدایی این گروهها وگروههای سمپلکتیک ومتعامد را در کتاب

N.Jacobson " Basic Algobra,I"

ملاحظه کند. علاوه بر گروههای فوق، پنج گروه لی استثنایی به نامهای:

$$G_2(\mathbb{C}), \quad F_4(\mathbb{C}), \quad E_6(\mathbb{C}), \quad E_7(\mathbb{C}), \quad E_8(\mathbb{C})$$

وجود دارند. الی کارتان درقرن گذشته نشان داد که اینها به عنوان گروه خودریختیهای جبرهای لی ساده متناظر با خود ظاهر می‌شوند. مشابه‌های متناهی بسیاری از این گروهها، خیلی پیشتر از شوالی شناخته شده بودند، مع هذا وی اولین فردی است که بطور منظم آنها را مطالعه کرد. شوالی ثابت کرد که هر جبر مختلط لی L دارای یک پایهٔ صحیح است، یعنی پایه‌ای که نسبت به آن همهٔ ضرایب حاصلضرب لی هر دو عضو L اعداد صحیح هستند. به ازای هر میدان K، یک همریختی حلقه‌ای طبیعی از اعداد صحیح Z بر میدان اول K وجود دارد. لذا شوالی به کمک این پایهٔ صحیح توانست، به ازای هر انتخاب

L و K ،گروهی مشخص با مجموعهٔ مناسبی از مولدها را تعریف کند. خاصه آنکه این گروهها متناهی هستند، درصورتی که K چنین باشد. لذا به ازای هر انتخاب میدان متناهی K با مرتبهٔ q (= توانی از یکعدد اول)، ۹ گروه متناهی $A_n(q)$، $B_n(q)$، $C_n(q)$، $D_n(q)$، $G_2(q)$، $F_4(q)$، $E_6(q)$، $E_7(q)$، $E_8(q)$ موسوم به گروههای (متناهی) شوالی وجود دارند. برای مثال، $PSL_m(q)$ مشابه متناهی از برای گروه لی $A_n(\mathbb{C})$، به ازای $n = m-1$، است. این گروه به ازای هر $m \geq 2$ ساده است مگر برای $m=2$ و $q \leq 3$ (که در این حالتها حل پذیر است).

بسیاری از خانواده‌های گروههای سادهٔ ناآبلی تا ابتدای قرن حاضر کشف شده بودند و هریک از این گروهها، و نیز پنج گروه پراکندهٔ ماتیو، دارای مرتبهٔ زوج هستند. این امر بزودی به طرح این حدس منجر شد که "مرتبه هر گروه متناهی سادهٔ ناآبلی زوج است". اما اثبات این حدس تا سال ۱۹۶۲ که والتر فایت و جان تامپسون آن را به انجام رساندند به طول کشید. پیچیدگی اثبات این گزارهٔ سهل البیان، وسعت زیاد اثبات کامل رده‌بندی گروههای متناهی ساده را نوید داد. چه اثبات قضیهٔ فایت ـ تامپسون یک شمارهٔ کامل مجلهٔ ریاضی پاسیفیک، یعنی ۲۵۵ صفحه، را اشغال کرد. در ۱۹۶۵ فایت و تامپسون به خاطر کارشان به دریافت جایزه کُل در جبر نایل گشتند. قضیهٔ فایت ـ تامپسون را می‌توان به عنوان مثالی از یک قضیهٔ رده‌بندی محدود در نظر گرفت. در این شکل، قضیه مبین آن است که تنها گروههای ساده از مرتبهٔ فرد گروههای دوری Z_p هستند که p عدد اول فرد است. به طریق مشابه، هدف قضیهٔ رده‌بندی کامل یافتن فهرستی از تمام گروههای متناهی ساده است، گروههای ساده بدون محدودیتی بر مرتبه‌شان. همان طور که پیش از این گفته شد، برطبق قضیهٔ رده‌بندی کامل،

این فهرست از ۱۸ خانوادهٔ نامتناهی و ۲۶ گروه پراکنده تشکیل یافته است.

از آنجا که اثبات قضیهٔ فایت ـ تامپسون بیش از ۲۵۰ صفحه را اشغال کرده است، جای تعجب نیست که اثبات حکم بسیار غامض تر قضیهٔ رده بندی کامل هزاران صفحه به طول کشد. در ازای اثبات را نمی توان به محاسبات مطول کامپیوتری و یا مشکل بودن توصیف گروههای سادهٔ معلوم مربوط دانست. چنانچه گروههای دوری را می توان در یک خط وصف کرد، لیکن برای فایت و تامپسون صدها صفحه لازم بود تا نشان دهند که گروههای سادهٔ دیگری با مرتبه فرد وجود ندارد. در واقع وسعت اثبات قضیهٔ رده بندی را باید مربوط به منبع دیگری دانست. این منبع در بغرنجی ساختار زیرگروهی گروههای متناهی در مقایسه با آن گروههای ساده است. برای درک بهتر ماهیت مسالهٔ رده بندی تصور کنید گروههای ساده در ناحیه ای از صفحه پخش شده باشند. نظریه پردازان گروه نمیتوانستند اثبات خود را با این فرض شروع کنند که هر گروه ساده دارای ساختار زیرگروهی تقریبا "مشابه با ساختار زیرگروهی یک گروه سادهٔ معلوم است. زیرا ماهیتا "این همان چیزی است که قضیه می خواهد آن را اثبات کند. بنابراین تصویر دقیقتری از آنچه می بایست اثبات شود به دست می آید هرگاه فرض شود ساختار زیرگروهی گروههای ساده دارای همان بغرنجی است که ساختار تمام گروههای متناهی. نقاط واقع بر مرز ناحیه گروههای سادهٔ معلوم را نمایش می دهند و نقاط نزدیک به مرز معرف گروههایی هستند که ساختار زیرگروهی آنها مشابهت زیادی دارند با ساختار گروههای متناظر با نزدیکترین نقاط بر مرز. نقاطی که در اندرون ناحیه واقع هستند مظهر گروههایی هستند که ساختارشان به طور فزاینده ای مشابهت کمتری با ساختار گروههای سادهٔ معلوم دارند.

در ابتدای اثبات، گروه ساده کاملا "ناشناخته ای در نظر گرفته می شود که

ساختار داخلی آن به بغرنجی ساختار هرگروه ناساده‌ای باشد. این گروه را با نقطه‌ای در وسط ناحیه نشان دهیم. برای اثبات قضیه باید گروه مفروض را با استدلالهای ریاضی وادار به انطباق بریکی از نقاط واقع برمرز کنیم. هر حرکت کوچک از این نقطه به سوی مرز به عنوان نتیجهٔ تظریفی در ساختار زیرگروهی فعلاً مجهول گروه مفروض تلقی می‌شود. همچنانکه نقطه به مرز نزدیکتر می‌شود ساختار داخلی گروه مفروض بیشتر شکل ساختار گروههای سادهٔ معلوم را به خود می‌گیرد. از آنجا که هر نقطه مرزی می‌تواند یک مقصد باشد، تحلیل بناچار کاوش راههای بسیاری برای مسیر نقطهٔ مرکزی به سوی مرز را ایجاب می‌کند. راههای متمایزی بر سر چنگالهای مسیر ظاهر می‌شوند. این چنگالها متناظر با مراحلی هستند که در آنها ساختار درونی گروه مفروض می‌تواند اشکال متعددی به خود گیرد. سرانجام حدود یکصد راه مختلف را می‌بایست پیمود تا اثبات کامل گردد. بدین لحاظ قضیهٔ رده‌بندی در واقع حاصل تقریباً "یکصد قضیهٔ جداگانه است که به اتفاق نتیجه مطلوب را به دست می‌دهند.

کار پیشگامانهٔ ریچارد براور در دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ بر مرکز سازهای پیچشها یکی از مهمترین مراحل برجستهٔ حرکت به سوی مرز را پایه‌گذاری کرد. وی ارتباطات کیفی و کمی عمیقی را بنیاد نهاد. به عنوان مثالی از ارتباطات کمی، براور با استدلالهای ابتدایی نشان داد که حداکثر تعدادی متناهی گروه ساده هست که دارای مرکز سازپیچش معینی باشند؛ و به عنوان نمونه‌ای از ارتباطات کیفی ثابت کرد: اگر مرکز سازپیچشی در یک گروه ساده G با $GL(2,q)$، یعنی گروه خطی عام بر میدانی متناهی از مرتبهٔ فرد q یکریخت باشد آنگاه یا G یکریخت با گروه خطی خاص تصویری از بعد ۳ (یعنی تصویر حاصل از گروه ماتریسهای ۳×۳ با دترمینان یک و درایه‌ها در میدان

مزبور بوسیله ماتریسهای اسکالر) است با آنکه $q=3$ و G با کوچکترین گروههای ماتیوا زمرتبهٔ ۷۹۲۰ یکریخت است. این قضیه، که براور در کنگره بین المللی ریاضیدانان در آمستردام در سال ۱۹۵۴ اعلام کرد، نقطهٔ شروع رده بندی گروههای ساده برحسب ساختار مرکز سازهای پیچشهای آنها است.

هرگروه از مرتبهٔ زوج بوضوح دارای پیچش است لذا بنا بر قضیهٔ فایت تامپسون هرگروه سادهٔ ناآبلی حاوی پیچشهایی است. براور با محاسبهٔ مرکز سازهای پیچشها در چندین خانوادهٔ از ۱۸ خانوادهٔ منظم مشاهده کرد که آنها همان ساختار کلی گروههای والد را، منتهی به صورتی ابتدایی، دارند. او سپس در شگفت شد که آیا ممکن است کل گروه والد را تنها با اطلاع از این مرکز سازها بازسازی کرد؟ بعداً این پرسش را در برخی حالتهای مهم پاسخ مثبت داد. کار براور نه تنها زمینهٔ کشف بسیاری از گروههای پراکنده را فراهم کرد بلکه همچنین روشی عملی برای تقسیم سفر به مرز ناحیه گروههای ساده به دو قسمت را به دست داد. نخست ثابت می‌شود که مرکز سازیک پیچش در گروه سادهٔ نامشخص شباهت زیادی به مرکز سازیک پیچش در یکی از گروههای سادهٔ معلوم دارد. اطلاع براینکه مرکز سازیک پیچش در گروهی نامعلوم همان مرکز سازیک پیچش در گروهی معلوم است به هیچ وجه معادل این اطلاع نیست که گروه نامعلوم همان گروه معلوم است. مرکز سازیک پیچش تنها بخش کوچکی از کل گروه است. هدف مرحلهٔ دوم اثبات، توسیع این اطلاع موضعی دربارهٔ مرکز سازپیچش است به یک هم ارزی فراگیر و در نتیجه نشان دادن همسانی گروه سادهٔ نامعلوم با گروه سادهٔ معلوم.

از میان ریاضیدانان بسیاری که در ده سال آخر در کار اثبات قضیهٔ رده بندی شرکت داشته اند باید از مایکل اشباشر نام برد. گرنشتاین در ۱۹۷۲ طی یک رشته سخنرانی در دانشگاه شیکاگو یک برنامهٔ ۱۶ مرحله‌ای برای

تعیین کلیهٔ گروههای متناهی ساده ارائه کرد. وی پیش بینی کرد که نتیجهٔ موفقیت آمیز برنامه اش در اواخر قرن میلادی حاضر به دست خواهد آمد، ولی این برنامهٔ عظیم و خوشبینی همراه آن با تردیدهای فراوان روبرو شد. اشباشر، که تازه از تحصیل فراغت یافته و به نظریه گروهها علاقه مند شده بود، کسی بود که نه حضار و نه گرنشتاین روی او حساب می کردند. اما از همان لحظه وی نیروی محرکهٔ برنامه گرنشتاین گردید و قضایای حیرت انگیزی یکی از پس دیگری اثبات کرد. اگرچه ریاضیدانان بسیار دیگری در این حملهٔ نهایی به مساله شرکت داشته اند، لیکن اشباشر بتنهایی مسوول کوتاه کردن زمان ۳۰ ساله برنامهٔ گرنشتاین به تنها ۱۰ سال است.

اثبات قضیهٔ رده بندی مبتنی بر بسیاری از مقالات قدیمی انجام گرفت که مدتها پیش از آنکه یک استراتژی کلی برای تکمیل اثبات طرح گردد نوشته شده بودند. بنابراین توسعه و تحول اولین اثبات به ناگزیر حاوی برخی شروعهای غلط، عدم کارآیی ها و دوباره کاریها است. بدین خاطر گرنشتاین و همکارانش درصدد برآمدند یک اثبات "نسل دوم" برای قضیهٔ رده بندی بیابند. خبر توفیق آنان در این امر مهم در جلد چهاردهم، شمارهٔ اول بولتن انجمن ریاضی آمریکا در ژانویهٔ ۱۹۸۶ طی یک مقالهٔ یکصد صفحه ای توسط گرنشتاین داده شده است. این بار طول اثبات قضیهٔ رده بندی به ۳۰۰۰ صفحه کاهش داده شده است که با معیارهای ریاضی باز هم بسیار طولانی است. حتی عده ای برآنند که اثبات قضیهٔ رده بندی بطور قطع اثباتی نابجا است، زیرا به نظر آنان هیچ قضیهٔ ریاضی نمی تواند چنین اثبات بس طولانی و پیچیده ای داشته باشد. با توجه به این ایراد، تامپسون گفته است "ما نظریه پردازان گروههای متناهی یا بطور باورنکردنی احمق یا بسیار باهوش هستیم".

از طرفی شاید اثباتی برای این قضیه که معقول و موجه تلقی شود هرگز وجود

نداشته باشد، واگرهم وجودداشته باشدنیازمندافقهای جدیدباشد، افقهایی که ظاهرا "خارج ازتوانائیهای نسل حاضراست. اما قدرمسلم آنکه نظریه پردازان گروه توانسته اندیکی ازمهمترین مسائل رشتهٔ ۱۵۰ ساله خود راکه ازلحظهٔ ابداع گروه بوسیلهٔ گالوا بطورضمنی وجودداشته است حل کنند. واین نتیجه ای است که کاربردهای ریاضی وسیعی یافته است ولذا به هیچ روی نمی‌توان آن را مساله ای منفرددرنظریهٔ گروهها پنداشت. برخی ازکاربردهای قضیهٔ رده بندی درزمینه های دورازهم، مانندهندسه های متناهی، نظریهٔ الگوها، نظریه آلگوریتمها، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ کدگذاری توابع اوتومرف وهمچنین خودنظریهٔ گروهها می‌باشد. باتوصیف کوتاهی از چندنتیجهٔ جالب که به استنادقضیهٔ رده بندی به دست آمده اندسخن راکوتاه خواهیم کرد.

الف ـ نظریه گروههای متناهی

۱. حدس شرایر: گروه خودریختیهای خارجی هرگروه ساده گروهی حل پذیر است.

۲. حدس فرابنیوس: اگر n مرتبهٔ گروه متناهی G را بشماردودر G معادلهٔ $x^n=1$ دقیقا "n جواب داشته باشدآنگاه این جوابها تشکیل یک زیرگروه G را می‌دهند.

حدسهای فوق هریک قدمتی بیش از ۵۰ سال دارد. حدس شرایردرست است ومی‌توان آن رایک قضیه نامید. درمقاله ای که اشباشردرمعرفی مقالهٔ ۱۹۷۹ گرنشتاین دربولتن انجمن ریاضی آمریکا نگاشته است اظهارامیدواری کرده است چنانچه اثبات قضیهٔ رده بندی کامل شودحل حدسهای فوق دردسترس قرارخواهندگرفت. نگارنده نمی‌داندکه وضع حدس فرابنیوس چگونه است.

۳. اگر G زیرگروهی از گروه جایگشتها بر n حرف باشد و G بوسیلهٔ مجموعه‌ای چون L از جایگشتها تولید شده باشد، خواصی از G موردنظر هستند که بتوان آنها را از L در زمان بسجمله برحسب n به دست آورد، یعنی تعداد مراحل محاسبهٔ آنها بسجمله‌هایی برحسب n باشند. از جمله نتایج به دست آمده در این زمینه یک آلگوریتم بنیادی از سیمز (مستقل از قضیهٔ رده‌بندی) است و مبین آنکه مرتبهٔ G را می‌توان در زمان بسجمله به دست آورد. با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی ثابت کرده‌اند:

قضیه. می‌توان یک سری تالیفی برای G و عضوی با مرتبهٔ عدد اول p که مرتبهٔ گروه G را بشمارد در زمان بسجمله تعیین کرد.

برای درک اهمیت این قضیه یادآور می‌شویم که اثباتهای استانده قضیهٔ کوشی زمان نمایی برای تعیین عضوی با مرتبهٔ p، هنگامی که p بزرگ باشد لازم دارند.

ب ـ نظریهٔ اعداد.

امی نوتر اولین ریاضیدانی بود که یک شرط کافی مهم به دست داد برای آنکه گروهی متناهی را بتوان به عنوان گروه گالوای یک توسیع متناهی جبری از میدان اعداد گویا $\mathbb{Q}$ تشخیص داد. اغلب از این سوال اساسی که آیا هر گروه متناهی را می‌توان بدین گونه تشخیص داد با نام "مسالهٔ نوتر" یاد کرده‌اند. شافاروویچ در مقاله‌ای طولانی و مشکل نتیجهٔ مطلوب را برای گروههای حل پذیر تحقیق کرده است. اما در مورد تشخیص گروههای سادهٔ ناآبلی اطلاع مثبت چندانی وجود نداشت. بغیر از گروههای متناوب، حتی

تا ۱۹۸۳ تنها خانواده وتنها گروه شناخته شده که گروههای گالوا بر $\mathbb{Q}$ هستند عبارت بودند از خانوادهٔ $PSL_2(q)$ (تازه آن هم برای بعضی کنگروانسها بر q) وگروه $SP_6(2)$. تامپسون با استفاده از قضیه رده بندی ثابت کرده است که "هیولا" یک گروه گالوا بر $\mathbb{Q}$ است با به کار بستن این نتیجه او و دیگران ثابت کردند:

قضیه گروههای $PSL_3(p)$، که p عددی است اول و $p \equiv 1 \pmod 4$ وگروه $G_2(p)$ که p عددی اول است، گروههای گالوا بر $\mathbb{Q}$ هستند.

اضافه می‌شود که با اطلاع از گروههای سادهٔ تعیین شده در جریان اثبات قضیهٔ رده بندی اینک ثابت شده است که دست کم ۱۸ تا از گروههای پراکنده در واقع گروههای گالوا بر $\mathbb{Q}$ هستند. با توجه به تحولات دیگر احتمال می‌رود که مسالهٔ نوتر سرانجام با استفاده از قضیهٔ رده بندی در مرحله‌ای حساس حل خواهد شد.

علی‌رغم این واقعیت که نظریهٔ توابع بیضوی در ۱۵۰ سال گذشته عمیقا" مورد بررسی قرار گرفته است به نظر نمی‌رسد که کسی حدس زده باشد ضرایب بسط تابع بیضوی پیمانه‌ای (مدولار) هیچ اهمیت خاصی داشته باشند. ابتدا چند کلمه در معرفی این تابع: گروه پیمانه‌ای $\Gamma=PSL_2(z)$ متشکل از همهٔ تبدیلات زیر است

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

که ضرایب a، b، c و d اعداد صحیح اند و $ad-bc=1$. چون در اینجا طبیعی است که متغیر را عدد مختلط بگیریم تا اینکه یک متغیر مجرد، ما آن را بجای t با z نشان دادیم و در واقع این گروه بطور طبیعی بر نیم صفحهٔ بالایی

$Im(z) \geqslant 0$ عمل می‌کنند. یک تابع پیمانه‌ای برای Γ یک تابع تحلیلی خوش رفتار است که مقدارش هنگامی که z تحت تاثیر هر تبدیل از Γ واقع شود تغییر نمی‌کند. نظریهٔ این توابع موضوعی است غنی، قدیمی و رازگونه که ارتباطات بسیاری با نظریهٔ اعداد، آنالیز و چند شاخه دیگر ریاضیات، منجمله نظریهٔ گروههای متناهی از طریق معادلهٔ درجهٔ پنجم دارد. ثابت شده است که همهٔ توابع پیمانه‌ای برای Γ را می‌توان بطور گویا برحسب یک تابع خاص از آنها نوشت و این مولد کلاسیک موسوم است به تابع بیضوی پیمانه‌ای :

$$j(z) = q^{-1}+۷۴۴+۱۹۶۸۸۴q+۲۱۴۹۳۷۶۰q^{۲}+۸۶۴۲۹۹۹۷۰q^{۳} +\cdots$$

که $q=e^{۲\pi iz}$.

کمی بعد از کشف هیولا، جان مک کی متوجه شد

$$۱۹۶۸۸۴=۱+۱۹۶۸۳۳$$

در واقع حاصلجمع درجه نمایش بیمایه و درجه کوچکترین نمایش وفادار تحویل ناپذیر گروه هیولا است. سپس تامپسون چند ضریب بعدی را مورد بررسی قرار داد و متوجه شد که آنها هم حاصلجمع درجات نمایشهای تحویل ناپذیر هیولا هستند :

$$۲۱۴۹۳۷۶۰=۱+۱۹۶۸۳۳+۲۱۲۹۶۸۷۶$$

$$۸۶۴۲۹۹۹۷۰=۲۰۱+۲۰۱۹۶۸۸۳+۲۱۲۹۶۸۷۶+۸۴۲۶۰۹۳۲۶$$

و پر واضح است که در اینجا جزء، بیش از تصادف صرف باید در کار باشد. البته معنای نهایی این روابط هنوز آشکار نشده است.

ج - نظریهٔ الگوها

یک نظریه را تماما "جازم گویند هرگاه هر دو الگوی آن نظریه که عدد کاردینالشان یکی باشد، لزوما یکریخت (ایزومورف) باشد. با استفاده از قضیهٔ رده بندی ثابت شده است:

قضیه. یک نظریهٔ تماما "جازم بدون الگوی متناهی را نمی‌توان متناهیا" اصل موضوعی کرد.

احکام و نتایجی که فوقا "ذکر شدند بیش از پیش اهمیت قضیهٔ رده بندی و تاثیرات عمیق این قضیه و اثبات آن را در برخی از شاخه‌های ریاضیات جلوه گر می‌سازند. شاید در آینده قدرت و تاثیر این قضیه بیشتر آشکار گردد. فعلا" سوال آزاردهنده آن است که آیا در اثبات بس طولانی این قضیه ممکن است خللها و اشتباهاتی هم وجود داشته باشد، که در آن صورت به اعتبار قضیه خدشه وارد خواهد شد؟ در این مورد اشباشر نوشته است: احتمال وجود اشتباهی در اثبات قضیهٔ رده بندی بطور بالقوه یک است. از طرف دیگر احتمال آنکه هر تک خطا را نتوان تصحیح کرد نیز واقعا "صفر است، و از آنجا که اثبات متناهی است احتمال آنکه قضیه ناصحیح باشد نزدیک به صفر است!

* * * * *

این نوشته عمدتا "بر اساس دو مقاله گرنشتاین مندرج در بولتن و نیز مقالهٔ دیگری از او مندرج در ساینتیفیک آمریکن سپتامبر ۱۹۸۵ تهیه شده است. فهرست کامل گروههای متناهی ساده و صدها نکته و اطلاع دیگر در مورد این گروهها در این مقالات وجود دارد. قرار است در شمارهٔ آیندهٔ فرهنگ

و اندیشهٔ ریاضی مقاله‌ای به ترجمهٔ آقای دکتر درفشه درباره‌ٔ گروههای ساده و تاریخچهٔ آنها به چاپ رسد که توجه علاقه‌مندان را به آن جلب می‌کنیم. همچنین مقالات نسبتاً کوتاه زیر نیز توصیه می‌شوند:

1. J.H.Conway, "Monsters and Moonshine", *The Mathematical Intelligencer*, Vol.2, No.1, 1980, PP.165-171.

2. Michael Aschbacher, "The classification of the Finite Simple Groups", *The Mathematical Intelligencer*, Vol.3, No.2, 1981, PP. 59-65.

3. Mork Cartwright, " Ten thousand pages to prove simplicity", *New Scientist*, 30 May 1985, PP.26-30.