پیک ریاضی

جلد دوم، شمارهٔ سوم پائیز ۱۳۶۶

گروههای سادهٔ متناهی

نوشتهٔ : محمدرضا درفشه

خلاصه :

رده‌بندی گروههای ساده متناهی در سال ۱۹۸۱ به‌پایان رسید و سرانجام ثابت شد که هرگروه ساده متناهی با یکی از گروههایی که در فهرست ضمیمه این مقاله آمده است ایزومرف است. اثبات این قضیه حدود ۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ صفحه است که در بیش از صد مجلهٔ ریاضی در اثنا ۳۰ سال اخیر به‌چاپ رسیده است. این مقاله مرور مختصری است بر رهیافتهایی که منجر به‌یافتن گروههای ساده متناهی شد. در نوشتن این مقاله از مراجع [۱] و [۱۲] استفاده شده است.

۱. مقدمه

یکی از رهیافتهای مهم در علوم جدید و ریاضیات این است که موضوعی از دیدگاه گروه تقارنهای آن بررسی‌شود. برای اولین بار گالوا، برای اثبات حل ناپذیری‌معادلات با رادیکالها متوسل به‌این رهیافت شد. در آنجا گالوا به‌هر معادله گروه معینی را نسبت داد (گروه گالوای معادله) وسپس

حل پذیری معادلهٔ داده‌شده را به‌حل پذیری گروه‌گالوای آن تحویل کرد . نقطهٔ شروع‌نظریه‌گروهها ازهمین زمان بودوگالواگروهی را ساده‌نامیدکه تنها زیرگروههای نرمال آن عبارت باشندازریرگروه‌همانی وخودگروه . گروههای سادهٔ آبلی عبارتندازگروه‌همانی وگروههای دوری مرتبه‌اول . گروههای سادهٔ ناآبلی عموما "دارای ساختارپیچیده‌ای هستند .دراین مقاله‌هرگاه‌گفته‌شودگروه‌ساده منظورمان گروه‌سادهٔ ناآبلی‌متناهی‌است . مسالهٔ رده‌بندی ،به‌ساده‌ترین بیان آن ،خواستاریافتن تمام‌گروههای ساده‌باتقریب ایزومرفیسم‌است .

۲. گروههای ساده‌نوع‌لی

همانطورکه‌گفته‌شدتعریف گروه‌ساده‌توسط گالواارائه‌گردید. گالوا ثابت کردکه‌گروه‌متناوب روی پنج حرف ساده‌می‌باشد .ولی اولین نتیجهٔ مهم‌درنظریه‌گروهها منسوب به‌ژردان است‌که‌درکتاب خود [۱۴] وجود پنج خانوادهٔ نامتناهی ازگروههای ساده‌راثابت کرد .یکی ازاین خانوادهها که‌با A_n نشان داده‌می‌شودعبارتست ازگروه‌متناوب روی $n>4$ حرف . ژردان چهارخانواده‌دیگررا بااستفاده‌ازماتریسها بادرایه‌های واقع در میدانهای اول متناهی به‌دست‌آوردکه‌بعدا "دیکسون این نتایج رابه میدانهای کلیتری تعمیم‌داد [۷و۸] .

گروههای فوق‌الذکر ،بجز A_n ،مشابه‌متناهی بعضی ازگروههای نوع لی می‌باشند .چهارخانواده‌گروه‌لی ساده‌روی میدان اعدادمختلط C وجود داردکه‌عبارتنداز $A_n(C)$ ، $B_n(C)$ ، $C_n(C)$ ،و $D_n(C)$ که‌به ترتیب متناظرندباگروههای خطی $SL_{n+1}(C)$ ، $So_{2n+1}(C)$ ، $SP_{2n}(C)$ و $SO_{2n}(C)$ ، بعلاوه‌پنج گروه‌لی استثنائی ،یعنی $G_2(C)$ ، $F_4(C)$ ، $E_6(C)$

و $E_7(C)$ و $E_8(C)$ وجود دارد. کارتان نشان داد که اگر جبرهای لی ساده متناظر با هریک از گروههای فوق الذکر را درنظر بگیریم آنگاه این گروهها با گروه اتومرفیسمهای جبرهای لی متناظرند.

مشابه متناهی این گروهها خیلی قبل از شواله شناخته شده بودند. دیکسون علاوه بر ساختن مشابه متناهی گروههای $A_n(C)$ ، $B_n(C)$، $C_n(C)$ و $D_n(C)$ ، مشابه متناهی گروههای $G_2(C)$ و $E_6(C)$ را نیز ساخته بود [۹و۱۰]. اما شواله اولین شرح سیستماتیک از مشابه متناهی گروههای نوع لی را ارائه داد [۱۴]. او نشان داد که اگر زوج (X_n, F) متشکل از جبر ساده لی X_n و میدان F داده شده باشد آنگاه گروه شواله $X_n(F)$ که یک گروه ماتریسی است وجود دارد. مثلا" شواله نشان داد که اگر F به طور جبری بسته باشد آنگاه $X_n(F)$ یک گروه جبری نیم ساده می باشد و اگر F یک میدان متناهی با q عضو باشد آنگاه $X_n(F)=X_n(q)$ یک گروه متناهی است که، بجز چند مورد، ساده است.

به فاصله کوتاهی پس از شواله، استاینبرگ [۲۰] و ری [۱۸و۱۹] نشان دادند که نقاط ثابت اتومرفیسمهای خارجی معینی از گروههای شواله خود تشکیل گروههای ساده می دهند که گروههای تابیده شواله نامیده می شوند. گروههای ساده متناهی شواله از نوع معمولی و تابیده رویهمرفته گروههای ساده نوع لی می باشند این گروهها در جدول ضمیمه فهرست شده اند.

۳ـ مرکزساز اعضای مرتبه دو

درسال ۱۹۵۴ در کنگره بین المللی ریاضیدانان در آمستردام، براور اعلام کرد که گروههای ساده مرتبه زوج ممکن است برحسب ساخت مرکزساز اعضای مرتبه ۲ رده بندی شوند. او ثابت کرد [۲] که اگر G، گروهی ساده

ومرکزسازعضوی مرتبه ۲ از G ایزومرف با $GL_2(q)$ ،به‌ازای q یفـــرد باشدآنگاه $G\cong PSL_3(q)$ ،یا $G\cong M_{11}$ ،واین ،نقطهٔ آغاز رده‌بندی گروههای ساده‌برحسب مرکزسازاعضای مرتبه ۲بود.

دراینجا M_{11} یکی ازگروههای سادهٔ ماتیواست .درواقع‌هنگامیکه ماتیو درسال ۱۸۶۱ درجستجوی گروههای انتقالی ازردهٔ بالابودموفق شدپنـــج گروه‌جایگشتی کشف‌کندکه‌بعداً "نشان دادهرپنج تای این گروهها ساده‌اند، این گروهها امروزه‌با M_{24} ، M_{23} ، M_{22} ، M_{12} ،و M_{11} نمایش داده می‌شوندوبجز توصیف اولیه‌آنها به‌عنوان گروههای جایگشتی ،به‌صورت‌گروههای تبدیلات خطوط تصویری وهمچنین گروه‌اتومرفیسمهای دستگاههای اشتاینرنیــــز مطالعه‌شده‌اند [۶،۲۱و۲۲].

بین تمام‌گروههای ساده‌ای که‌تاسال ۱۹۰۵ شناخته‌شده‌بودگروههای ماتیواین ویژگی تازه‌راداشتندکه‌قسمتی ازیک خانواده‌نامتناهـــــی گروههای ساده‌شناخته‌شده‌نبودند (مانند A_n ، $n>4$).به‌گروه‌ساده‌ای کـــه قسمتی ازیک خانواده‌نامتناهی گروههای ساده‌شناخته‌شده‌نباشدگروه‌ساده **پراکنده** می‌گویند.به‌این ترتیب پنج گروه‌ماتیواولین مثالهای گروههای ساده‌پراکنده‌بودند.درواقع ،پس ازاثبات قضیهٔ رده‌بندی گروههای ســاده درسال ۱۹۸۱ ثابت‌شدکه‌این پنج گروه‌همراه‌با ۲۱ تای دیگرگروههــــای ساده‌پراکنده‌اند.

درزمینهٔ مقالهٔ براور [۲] ،براوروفولر [۳] همچنین ثابت‌کردنــد حداکثرتعدادی متناهی گروههای ساده‌مرتبه‌زوج وجودداردبه‌طوری کــه مرکزسازعضوی مرتبه ۲ ازآنها ایزومرف باگروه‌داده‌شده‌ای باشد.ازآنجـا که‌یکی ازنتایج [۱۱] این است که‌مرتبهٔ هرگروه‌ساده‌عددی زوج است،لذاهر گروه‌ساده‌دارای اعضای مرتبه ۲ است،به‌این ترتیب رده‌بندی‌گروههــــای ساده‌ازطریق مرکزسازاعضای مرتبه ۲ توجیه می‌شود.

با استفاده از این رهیافت ۱۱ گروه ساده‌ٔ جدید که قبلاً شناخته نشده بودند توسط افراد مختلف پیدا شد که به نام این اشخاص نامگذاری شده‌اند. بین این گروهها سه گروه یانکو و لین گروههای ساده‌ٔ پراکنده‌ای بودند که بعد از گروههای ماتیو، پس از ۱۰۰ سال کشف شدند.

۴. گروههای جایگشتی رتبه ۳

فرض کنیم G یک گروه جایگشتی انتقالی روی مجموعه‌ٔ Ω باشد، یعنی G گروهی از جایگشتهای روی Ω باشد به طوری که به ازای اعضای دلخواه a و b در Ω جایگشتی مانند g در G باشد که $g(a)=b$ (معمولاً $g(a)$ را با a^g نیز نمایش می‌دهند)، در این صورت به ازای هر $a \varepsilon \Omega$ مجموعه‌ٔ اعضای G که a را ثابت نگه می‌دارند شابت کننده‌ٔ a نامیده می‌شود و با G_a نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم $\Delta (a)$ مداری از G_a روی نقاط باقیمانده‌ٔ $\Omega-\{a\}$ باشد به طوری که به ازای هر a و b در Ω اگر $b=a^g$ آنگاه $\Delta(b)=(\Delta(a))^g$. حال گراف جهت دار Γ را چنین تعریف می‌نمائیم: رئوس Γ عبارتند از نقاط Ω، دو راس a و b مجاورند اگر و تنها اگر $b \varepsilon \Delta (a)$. واضح است که عمل G روی Ω یک عمل انتقالی روی مجموعه‌ٔ رئوس Γ ایجاد می‌کند به طوری که اضلاع را به اضلاع تبدیل می‌نماید. در این حالت می‌گوئیم که G یک گروه انتقالی جایگشتی از اتومرفیسمهای Γ است و گروه تمام اتومرفیسمهای Γ را با $Aut(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

حال این مساله را درنظر می‌گیریم: گروه انتقالی G روی گراف جهت دار Γ را چنان بسازید که شابت کننده‌ٔ نقطه‌ٔ a از Ω گروه داده شده‌ٔ H با عمل داده شده‌ای روی $\Omega-\{a\}$ باشد. در این حالت G را یک توسیع انتقالی H می‌نامیم.

یکی دیگر از رهیافتهای نظریهٔ گروهها ساختن توسیعهای انتقالی ممکن است. این مساله در حالت کلی خیلی مشکل است اما اگر مساله به طریقی به ساختن گرافی با گروه اتومرفیسمهای انتقالی برگردانده شود ساده‌تر می‌گردد و این در حالتی که گروه G رتبه ۳ باشد اتفاق می‌افتد. اما یک گروه رتبه ۳ عبارت است از گروه انتقالی G روی Γ به طوری که G_a دارای ۳ مدار روی Γ باشد. واضح است که یکی از مدارهای G_a عبارت است از $\{a\}$. اگر دو مدار دیگر را با $\Delta(a)$ و $\Gamma(a)$ نمایش دهیم آنگاه $|\Delta(a)|$ و $|\Gamma(a)|$ را زیردرجه‌های G می‌نامیم. در این حالت با داشتن اطلاعات داخلی می‌توان دید که کدامیک از نقاط $\Delta(a)$ و $\Gamma(a)$ باید مجاور باشند یا اینکه کدامیک از زوج نقاط $\Delta(a)$ یا $\Gamma(a)$ باید مجاور باشند به طوری که گراف حاصل دارای اتومرفیسمی باشد که a را به حرکت درآورد.

نقطهٔ شروع این رهیافت در [۱۳] بود که بعداً با استفاده از این رهیافت هفت گروه سادهٔ پراکنده دیگر کشف شدند.

۵. گروههایی که از هندسه کشف شدند

کانوی [۵] گروههای سادهٔ خود را با استفاده از گروه اتومرفیسمهای یک شبکه ۲۴ بعدی به اسم شبکهٔ لیچ کشف کرد. این شبکه قبلاً در [۱۵ و ۱۶] مطالعه شده بود. یک شبکهٔ Λ در فضای اقلیدسی R^n مجموعه‌ای است از تمام ترکیبات خطی صحیح n بردار مستقل خطی v_1، v_2، ....، v_n به طوری که ضرب داخلی (v_i, v_j) به ازای هر i و j عددی صحیح باشد. اگر u_iها، به ازای $1\leqslant i\leqslant n$، یک پایهٔ متعامد برای R^n فرض شود آنگاه Λ یک شبکهٔ صحیح نامیده می‌شود چنانچه اگر مختصات هریک از u_iها برحسب ترکیبات خطی v_iها همگی صحیح باشند. به‌علاوه، Λ یکهنگ نامیده می‌شود

چنانچه اگر ماتریس تعویض پایه از v_i ها به u_i ها دارای دترمینان واحد باشد و Λ را زوج مینامیم چنانچه اگر (v_i , v_j) به ازای هر i و j عددی زوج باشد. بنا به تعریف گروه اتومرفیسمهای Λ که با $Aut(\Lambda)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از زیرگروه دورانهای R^n به طوری که Λ را ثابت نگه دارد.

ثابت شده بود که در بعد ۲۴ تنها ۲۴ شبکه صحیح یکهنگ زوج وجود دارد که یکی از آنها همان شبکهٔ لیچ است که در [۱۵و۱۶] معرفی شده بود. کانوی با استفاده از خواص این شبکه ثابت کرد که $Aut(\Lambda)$ گروهی کامل با مرکز Z مرتبه ۲ میباشد و سپس ثابت نمود $\frac{Aut(\Lambda)}{Z}$ گروهی ساده است. اما چون $Aut(\Lambda)$ به صورت هندسی به عنوان گروه اتومرفیسمهای شبکهٔ Λ تعریف شده است لذا می‌توان زیرگروههایی از $Aut(\Lambda)$ را به عنوان ثابت کنندهٔ بردارهای بخصوصی مطالعه کرد. به این ترتیب کانوی توانست دو گروه سادهٔ دیگر که تا آن موقع شناخته نشده بودند کشف کند. او همچنین توانست نشان دهد که بسیاری از گروههای سادهٔ پراکنده که تا آن موقع کشف شده بودند زیرگروههای $Aut(\Lambda)$ هستند. به این ترتیب سه گروه پراکندهٔ دیگر به لیست گروههای پراکنده اضافه می‌شود که تعداد این گروهها را به ۲۶ عدد رساند.

۶. بیان قضیهٔ رده‌بندی و برخی نتایج آن

قضیهٔ رده بندی گروههای ساده چنین می‌گوید: اگر G یک گروه ساده باشد آنگاه G با یکی از گروههای فهرست ضمیمه ایزومرف است.

حدسهایی در نظریهٔ گروهها که منجر به خواصی از گروههای ساده بشود

با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی فوق قابل حل است، به این نحو که خاصیت گروههای فهرست ضمیمه بررسی شود. معروفترین این حدسها، حدس شرایر است که چنین بیان می‌دارد: گروه اتومرفیسمهای خارجی یک گروه ساده حل پذیر است. یکی دیگر قضیهٔ زیر است:

یک گروه متناهی با اتومرفیسمی که فقط عضو خنثای گروه را ثابت نگه دارد الزاماً "حل پذیر است.

شاید مهمترین این حدسها قضیهٔ زیر در مورد گروههای انتقالی ردهٔ بالا باشد.

گروههای متناوب و گروههای ماتیو (بجز M_{22}) تنها گروههای ساده ۵- انتقالی هستند. بجز قضیهٔ فوق در مورد گروههای ۵- انتقالی، گروههای ۲- انتقالی نیز کاملا" شناخته می‌شوند: اگر G یک گروه جایگشتی ۲- انتقالی حل ناپذیر درجهٔ n و دارای چرخه‌ای به طول n باشد، آنگاه یکی از حالات زیر را داریم:

(الف) $G=A_n$ یا S_n

(ب) $n=11$ و $G=PSL_2(11)$ یا M_{11}

(ج) $n=23$ و $G\cong M_{23}$

(د) $n=\dfrac{q^k-1}{q-1}$ ، q توانی از یک عدد اول، و

G ایزومرف با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(PSL_k(q))$ شامل $PSL_k(q)$ است.

قضیهٔ زیر در مورد گروه گالوای معادلات روی Q نتیجه‌ای از قضیهٔ رده‌بندی است.

فرض کنیم p عددی اول و $f(x)$ بسجملهٔ تجزیه ناپذیری روی Q به صورت زیر باشد $f(x)=x^p+ax^k+b$ ، $1\leqslant k\leqslant p-1$. آنگاه گروه

گالوای $f(x)$ روی Q که با G نشان داده می‌شود یکی از گروههای زیر است :

(الف) G گروهی حل پذیر است .

(ب) $G \cong A_p$ یا S_p ؛

(ج) $p=7$ و $G \cong PSL_2(7)$

(د) $p=11$ و $G=PSL_2(11)$ یا M_{11}

(هـ) $p=1+2^n$ عدد اول فرما بزرگتر از ۵ و G ایزومرف با زیرگروهی از $Aut(PSL_2(2^n))$ شامل $PSL_2(2^n)$ است .

فهرست گروههای ساده

الف . گروههای نوع لی

نماد کلاسیک	نماد لی
$pSL_{n+1}(q)$	$A_n(q)$, $n\geqslant 1$
$p\Omega_{2n+1}(q)$	$B_n(q)$, $n\geqslant 3$
$pSp_{2n}(q)$	$C_n(q)$, $n\geqslant 2$
$P\Omega_{2n}^{+}(q)$	$D_n(q)$, $n\geqslant 4$
	$E_n(q)$, $6\leqslant n\leqslant 8$
	$F_4(q)$
	$G_2(q)$
$pSU_{n+1}(q)$	${}^2A_n(q)$, $n\geqslant 2$
$p\Omega_{2n}^{-}(q)$	${}^2D_n(q)$, $n\geqslant 4$

نماد لی	نماد کلاسیک
$^3D_4(q)$	
$^2E_6(q)$	
$^2B_2(2^{2m+1})\ ,\ m\geq 1$	
$^2F_4(2^{2m+1})\ ,\ m\geq 0$	
$^2G_2(2^{2m+1})\ ,\ m\geq 1$	

ب . گروههای متناوب

$A_n\ ,\ n\geq 5$

پ . گروههای پراکنده

نماد	نام	مرتبه
M_{11}	Mathieu	$2^4.3^2.5.11$
M_{12}	"	$2^6.3^3.5.11$
M_{22}	"	$2^7.3^2.5.7.11$
M_{23}	"	$2^7.3^2.5.7.11.23$
M_{24}	"	$2^{10}.3^2.5.7.11.23$
J_1	Janko	$2^3.3.5.7.11.19$
$J_2=HJ$	Hall-Janko	$2^7.3^3.5^2.7$
$J_3=HJM$	Higman-Janko-Mckay	$2^7.3^5.5.17.19$
J_4	Janko	$2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.$ $31.37.43$

نماد	نام	مرتبه
HS	Higman-Sims	$2^9.3^2.5^3.7.11$
MC	Mclaughlin	$2^7.3^6.5^3.7.11$
Sz	Suzuki	$2^{13}.3^7.5^2.7.11.13$
Ly=Lys	Lyons-Sims	$2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67$
He=HHM	Held-Higman-Mckay	$2^{10}.3^3.5^2.7^3.17$
Ru	Rudvalis	$2^{14}.3^3.5^3.7.13.29$
ON=ONS	ONan-Sims	$2^9.3^4.5.7^3.11.19.31$
Co_3	Conway	$2^{10}.3^7.5^3.7.11.23$
Co_2	"	$2^{18}.3^6.5^3.7.11.23$
Co_1	"	$2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23$
$M(22)=F_{22}$	Fischer	$2^{17}.3^9.5^2.7.11.13$
$M(23)=F_{23}$	"	$2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23$
$M(24)=F_{24}$	"	$2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29$
$F_3=E$	Thompson	$2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31$
$F_5=D$	Harada	$2^{14}.3^6.5^6.7.11.19$
$F_2=B$	Baby Monster	$2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.$ $19.23.31.47$
$F_1=M$	Monster	$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.$ $17.19.23.29.31.41.47.59.71$

References

1- M. Aschbacher, The classification of the finite simple groups, Math. Intelligencer 3, No.2, 59-65 (1980-1981)

2- R. Brauer, On the structure of groups of finite order, proc. Internat. Congr. Math. Amsterdam (1954), vol. 1, PP.209-217, Noordhoff, Groningen, North-Holland, Amsterdam.

3- R. Brauer, K.Fowler, On groups of even order, Ann. of Math. 62(1955), 565-583.

4- C. Chevalley, Sur certains groupes simplès, Tôhoku Math. J. 7(1955), 14-66.

5- J.H. Conway, A group of order 8315553613086720000, Bull.London Math. Soc.1(1969), 79-88.

6- J.H. Conway, Three lectures on exceptional groups, Higman-powel ed., 215-247.

7- L.E. Dickson, The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group, Ann. Math. 11(1987), 161-183.

8- L.E. Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois field theory, Dover, New York, 1958.

9- L.E. Dickson, Theory of linear groups in an arbitrary field, Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), 363-394.

10- L.E. Dickson, A new system of simple groups, Math. Ann.60 (1905)137-150.

11- W. Feit, J.G. Thompson, Solvability of groups of odd order, pacific J. Math-13 (1963) 775-1029.

12- D. Gorenstein, Finite pimple groups, plenum press, 1982

13- D. Higman, C. Sims, A simple group of order 44352000, Math. Z. 105 (1968) 110-113.

14- C. Jordan, Traité des substitutions, Gauthier-villars, paris, 1870.

15- J.Leech,Some sphere packings in higher space, canad.J.Math. 16 (1964) 657-682.

16- J. Leech, Notes on sphere packings, canad. J.Math.19(1967) 251-267.

17- H.V. Niemeyer, Definite quadratische formen der dimension 24 und diskriminante 1 (Thése), Göttingen (1968)

18- R. Ree, A family of simple groups associated with the simple Lie algebra F_4, American J. Math. 83(1961)401-420.

19- R. Ree, A family of simple groups associated with the simple Lie algebra G_2, American J.Math. 83(1961) 432-462.

20- R. Steinberg, Varieties on a theme of chevalley, pac. J. Math. 9(1959) 875-891.

21- E. witt, Die 5-fach transitiven gruppen von Mathieu, Abh. Math. sem. Univ. Hamburg, 12(1938) 256-264.

22- E. witt, "Über steinersche system, Abh. Math. Math. sem. Univ. Hamburg, 12 (1938) 265-274.