به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان ـ دانشکده علوم ریاضی

آزمون میان‌ترم درس محاسبات عددی فروردین ماه ۹۲ مدت ۷۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی .... شماره‌ی دانشجویی .... مدرس ....

توجه: پاسخ مناسب (نزدیک‌ترین گزینه به جواب درست) پرسش‌ها را فقط با علامت × در پاسخ‌نامه مشخص کنید.
پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد. از انتخاب دو گزینه برای یک پرسش و خط زدن خودداری کنید.

پاسخ نامه

ـ	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
الف														
ب														
ج														
د														

۱) کدام یک از گزینه‌های زیر در حساب ممیز شناور درست است؟

الف) عضو خنثای عمل جمع یکتا است. ب) عمل جمع دارای خاصیت شرکت پذیری است.

ج) جمع دو عدد مثبت نزدیک به هم دارای خطای زیادی است. د) عمل جمع خاصیت جابجایی دارد.

۲) برای محاسبه‌ی نقطه‌ی ثابت تابع $g(x) = \pi - \cos(\frac{x}{۳})$ با $x_۰ = \pi$ بعد از شانزده گام به روش تکرار ساده، خطای جواب (بر اساس فرمول خطا) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

الف) $۱۰^{-۴}$ ب) $۱/۷ \times ۱۰^{-۸}$ ج) $۲/۳ \times ۱۰^{-۱۴}$ د) $۱۰^{-۶}$

۳) اگر بخواهیم به کمک چندجمله‌ای تیلور $T_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{f^{(k)}(۰)}{k!}x^k$ برای تابع $f(x) = \cos(۴x)$ مقدار $\cos(۱)$ با دقت $5D$ مشخص شود، حداقل n موردنیاز کدام گزینه است؟

الف) ۱۰ ب) ۴ ج) ۲ د) ۸

۴) اگر $x = ۰/۰۰۰۰۲۲۳$، $y = ۰/۰۰۰۰۱۲۳$، $a = ۱۰۰۰۰۰\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$ و $b = \dfrac{۱}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ آنگاه در سیستم $۳S$، حاصل $|a - b|$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۰/۱ د) ۳

---

۵) فرض کنید $U = \dfrac{x^۲}{y}$ و $V = xy^۳$. درصد خطای x و y به ترتیب چه مقادیری باشد تا خطای نسبی U و V حداکثر $۱۰^{-۲}$ شود؟

الف) ٪۰/۲۵ و ٪۰/۳ ب) ٪۰/۲ و ٪۰/۳۵ ج) ٪۰/۳۵ و ٪۰/۲ د) ٪۰/۳ و ٪۰/۲۵

---

۶) در تجزیه‌ی ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & -۴ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۳ & ۱ \end{pmatrix}$ به حاصل‌ضرب ماتریس پایین‌مثلثی L و ماتریس بالامثلثی U، ماتریس L کدام گزینه است؟

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ د) L را نمی‌توان یافت.

---

۷) اگر معادله‌ی $\sin(x) - \cos(x) = ۰/۱$ را با $x_۰ = ۰/۸$ و $x_۱ = ۱$، به روش وتری (سکانت) حل کنیم $x_۳$ کدام گزینه است؟

الف) ۰/۸۵۶۲۳۶۹۹۰ ب) ۰/۸۵۶۱۶۶۱۱۲ ج) ۰/۸۵۶۶۲۹۴۵۶ د) ۰/۸۵۶۱۶۴۳۹۹۹

۸) اگر $A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۲/۱ \end{pmatrix}$ چگونه می‌توان از همگرایی روش ژاکوبی با هر بردار اولیه برای حل دستگاه $Ax = b$ مطمئن بود؟

الف) جابه‌جایی سطر اول و سوم و سپس جایگزینی سطر اول با حاصل‌جمع سطر اول و سوم. ب) نیاز به تغییر A نیست.

ج) جابه‌جایی سطر دوم و سوم و سپس جایگزینی سطر دوم با حاصل‌جمع سطر دوم و سوم. د) جابه‌جایی سطر اول و سوم.

---

۹) برای محاسبه‌ي جواب معادله‌ی $\frac{\sin(t)}{۱ + e^{۲t}} = ۰$ در بازه‌ي $[-۳/۵, -۳/۱]$ بعد از دو گام بازه‌ی شامل جواب کدام گزینه است؟

الف) $[-۳/۲, -۳/۱]$ ب) $[-۳/۵, -۳/۳]$ ج) $[-۳/۲۵, -۳/۲]$

د) $[-۳/۱۵, -۳/۱]$

---

۱۰) برای $۰ < M < ۱$، اگر بخواهیم $x = arcsech(M)$ را به کمک روش نیوتن-رفسون تقریب بزنیم کدام دنبالهی بازگشتی به‌دست می‌آید؟ (یادآوری: $\frac{۱}{cosh(x)} = M \iff sech(x) = M \iff x = arcsech(M)$.)

الف) $x_{n+۱} = x_n - \frac{tanh(x_n) - Mcosh(x_n)}{sinh(x_n)}$ ب) $x_{n+۱} = x_n + \frac{cosh(x_n) - M\ cosh^۲(x_n)}{sinh(x_n)}$

ج) $x_{n+۱} = x_n - \frac{sinh(x_n)}{Msech(x_n)}$

د) $x_{n+۱} = \frac{x_n + Msinh(x_n)}{tanh(x_n)}$

---

۱۱) اگر به روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی از ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -۶ & ۰ & -۶ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$ ماتریس بالامثلثی $U = (u_{ij})$ به‌دست آید، $u_{۳۳}$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{۳۷}{۷}$ ب) $-\frac{۱۳}{۷}$ ج) -۴ د) ۳

۱۲) کدام‌یک از دنباله‌های زیر برای یافتن صفر مرتبه‌ی ۲ تابع $f(x) = ۱ - e^{x^۲}$ دارای مرتبه همگرایی ۲ است؟

الف) $x_{n+۱} = x_n - \frac{(۱ - e^{x_n^۲})(x_n - x_{n+۱})}{e^{x_{n-۱}^۲} - e^{x_n^۲}}$

ب) $x_{n+۱} = x_n + \frac{۱ - e^{x_n^۲}}{۲x_n e^{x_n^۲}}$

ج) $x_{n+۱} = x_n + \frac{۱ - e^{x_n^۲}}{x_n e^{x_n^۲}}$

د) $x_{n+۱} = x_n + ۱ - e^{x_n^۲}$

---

۱۳) برای $a > ۲$، اگر دستگاه

$$\begin{cases} a^۲x + y + az &= ۱ \\ ax + a^۳y + z &= -۱ \\ x + ay + a^۴z &= ۰ \end{cases}$$

را با $x^{(۰)} = y^{(۰)} = z^{(۰)} = ۰$ به روش ژاکوبی حل کنیم، آنگاه

الف) دستگاه واگرا است.

ب) دستگاه همگرا است و $y^{(۲)} = \frac{-(a+۱)}{a^۴}$.

ج) دستگاه همگرا است و $y^{(۲)} = \frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{a^۳}$.

د) دستگاه همگرا است و $y^{(۲)} = ۱ + \frac{۱}{a}$.

---

۱۴) برای $a > ۲$، اگر دستگاه

$$\begin{cases} a^۲x + y + az &= ۱ \\ ax + a^۲y + z &= -۱ \\ x + ay + a^۲z &= ۰ \end{cases}$$

را با $x^{(۰)} = y^{(۰)} = z^{(۰)} = ۰$ به روش گاوس-سایدل حل کنیم، آنگاه

الف) دستگاه واگرا است.

ب) دستگاه همگرا است و $x^{(۲)} = \frac{a^۲+۱}{a^۳}$.

ج) دستگاه همگرا است و $x^{(۲)} = \frac{a^۳+۱}{a^۵}$.

د) دستگاه همگرا است و $x^{(۲)} = ۱ + \frac{۱}{a^۴}$.

موفق باشید

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{(x - x_۰)^k}{k!} f^{(k)}(x_۰) + \frac{(x - x_۰)^{n+۱}}{(n+۱)!} f^{(n+۱)}(\xi),$$

$z = z(x_۱, \ldots, x_n), \quad \Delta z \simeq |\frac{\partial z}{\partial x_۱}\Delta x_۱ + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\Delta x_n|,$

$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{۲^n}, \qquad x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-۱})}{f(x_n) - f(x_{n-۱})},$

$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{۱-q}|x_۱ - x_۰|, \quad \mathrm{Max}|g'(x)| < q$ و α نقطه ثابت g است