

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی I دانشکده علوم ریاضی

مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

۱۳۸۸/۸/۲۸

توجه: ارزش پرسش های ۱، ۲، ۳ و ۴ هرکدام ۱۰ نمره و پرسش ۵ دارای ارزش ۲۰ نمره است.

۱. فرض کنید $\lim a_n = a > 1$. به ازای $b_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^n$ نشان دهید $\lim b_n = 0$.

۲. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت است به قسمی که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}$ نیز همگرا است.

۳. الف) نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $-1 < \tanh x < 1$.
ب) نشان دهید عدد $c \in (0, \infty)$ وجود دارد که $\ln c = \tanh c$.

۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی غیر صفر باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ در شرط $f(xy) = f(x)f(y)$ صدق کند. ثابت کنید اگر f در $x = 1$ پیوسته باشد، آنگاه در سرتا سر $\mathbb{R} - \{0\}$ پیوسته است.

۵. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x \tanh(x^2) & x \geq 0 \\ (2 + e^{-x}) \sin^2 x & x < 0 \end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در $x = 0$ مشتق پذیر است.
ب) ضابطه‌ی تابع مشتق f را روی \mathbb{R} تعیین کنید.

«موفق باشید»