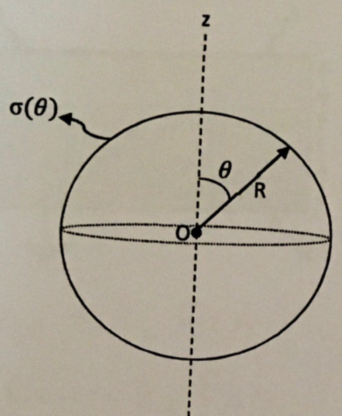
۲. مطابق شکل زیر، یک پوسته کروی به شعاع R دارای توزیع بار سطحی غیریکنواخت $\sigma(\theta)$ (θ زاویه قطبی می‌باشد) است.
اگر پتانسیل داخل این پوسته $\varphi(r,\theta) = \frac{r\cos\theta}{12\pi\varepsilon_0}$ (که r فاصله شعاعی از مرکز پوسته یعنی نقطه O است) باشد؛ مطلوب است:

(الف) چگالی انرژی داخل پوسته کروی.

(ب) انرژی الکترواستاتیکی ذخیره شده داخل پوسته کروی. (۱۰ نمره)



$$\varphi(r,\theta) = \frac{z}{12\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\varphi\,\hat{k}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\hat{k}$$

(الف) $u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{1}{(12)^2\pi^2\varepsilon_0^2}$

$$u = \frac{1}{2(12)^2\pi^2\varepsilon_0}\ \frac{J}{m^3}$$

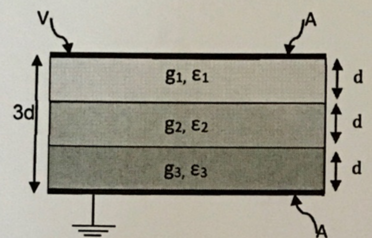
(ب) $U = \int u\,dv = \int_0^R \frac{1}{2(12)^2\pi^2\varepsilon_0}4\pi r^2\,dr$

$$U = \frac{1}{6\times 12\,\pi\varepsilon_0}\frac{R^3}{3}\ J$$

۳. در شکل زیر، دو صفحه رسانای موازی به مساحت A، در فاصله ۳d از یکدیگر در اختلاف پتانسیل V قرار گرفته‌اند. فضای میان این دو صفحه به سه قسمت مساوی با رسانندگی g_1، g_2 و g_3 و گذردهی ε_1، ε_2 و ε_3 تقسیم شده است. اگر $g_1=۲g_2=۳g_3$ و ضخامت هر قسمت d باشد، مطلوب است،

(الف) میدان الکتریکی در هر یک از سه قسمت.

(ب) مقاومت الکتریکی این دستگاه. (۸ نمره)



$$\begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ J_{2n} = J_{3n} \end{cases} , \quad \vec{J} = g\vec{E}$$

$$\begin{cases} g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n} \\ g_2 E_{2n} = g_3 E_{3n} \end{cases}$$

$$\int_{+} \vec{E}\cdot\vec{dl} = V$$

$$E_{1n}d + E_{2n}d + E_{3n}d = V$$

$$\left(E_{1n} + \frac{g_1}{g_2}E_{1n} + \frac{g_1}{g_3}E_{1n}\right)d = V$$

الف)

$$E_{1n} = \frac{V}{d\left(1+\frac{g_1}{g_2}+\frac{g_1}{g_3}\right)} = \frac{V}{d(1+2+3)} = \frac{V}{6d}$$

$$E_{2n} = \frac{g_1}{g_2}E_{1n} = 2E_{1n} = \frac{V}{3d}$$

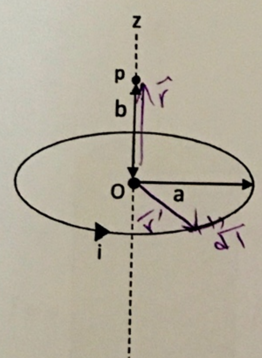
$$E_{3n} = \frac{g_1}{g_3}E_{1n} = 3E_{1n} = \frac{V}{2d}$$

ب)

$$\begin{cases} V = RI \\ J = \frac{I}{A} \rightarrow I = JA \end{cases} \Rightarrow \quad R = \frac{V}{J_n A} = \frac{V}{g_1 E_{1n} A}$$

$$R = \frac{\cancel{V}}{g_1 \frac{\cancel{V}}{6d} A} = \frac{6d}{g_1 A}$$

٤. در شکل زیر، یک حلقه سیم دایره‌ای شکل به شعاع a حامل جریان i است. با استفاده از قانون بیو-ساوار، بزرگی و جهت میدان مغناطیسی این حلقه جریان را در نقطه p (نقطه p در فاصله b روی محور حلقه (محور zها) قرار دارد) به دست آورید. (۱۰ نمره)



$\hat{k}\ \hat{\rho}\ \hat{\varphi}$

$$\bar{r} = z\hat{k} = b\hat{k}$$

$$\bar{r}' = a\hat{\rho}$$

$$\bar{r} - \bar{r}' = b\hat{k} - a\hat{\rho}$$

$$|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = (b^2 + a^2)^{3/2}$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\bar{l} \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

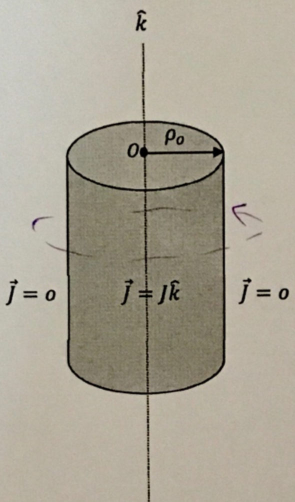
$$\bar{B} = \int d\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{a\,d\varphi\,\hat{\varphi} \times (b\hat{k} - a\hat{\rho})}{(b^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{b a\,d\varphi\,\hat{\rho}}{(b^2+a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 i \hat{k}}{4\pi} \int^{2\pi} \frac{a^2\,d\varphi}{(b^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \cancel{\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{a b\,d\varphi(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j})}{(b^2+a^2)^{3/2}}} + \frac{\mu_0 i\, a^2}{2(b^2+a^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0 i\, a^2}{2(a^2+b^2)^{3/2}} \hat{k}$$

۵. مطابق شکل زیر، یک استوانه طویل به شعاع ρ_0 در امتداد محورش حامل جریانی با چگالی جریان یکنواخت $\vec{J} = J\hat{k}$ می‌باشد. با حل معادلات لاپلاس و یا پوآسون برای پتانسیل برداری $\vec{A}$ ($\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$) و درنظرگرفتن شرایط مرزی و تقارن مساله، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را خارج و داخل استوانه به دست آورید. (۱۵ نمره)



$\rho > \rho_0 \qquad \nabla^2\vec{A} =$ صفر

$\rho < \rho_0 \qquad \nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$

$\nabla^2\vec{A}_1 = -\mu_0 J_z\hat{k} \quad , \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\,dv}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}A_{z_1}\right) = -\mu_0 J_z$

ج عمومی

$A_{z_1}(\rho<\rho_0) = \underbrace{\frac{-\mu_0 J_z\rho^2}{4}}_{\text{ج خصوصی}} + \alpha\ln\rho + \beta$

$\nabla^2\vec{A}_2 = 0 \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}A_{z_2}\right) =$ صفر

$A_{z_2}(\rho>\rho_0) = \alpha'\ln\rho + \beta'$

1/ if $\rho = 0 \longrightarrow A_{z_1} \longrightarrow$ [illegible] $\longrightarrow \alpha =$ صفر

2/ if $\rho = \rho_0 \longrightarrow A_{z_1} = A_{z_2} \longrightarrow -\frac{\mu_0 J_z}{4}\rho_0^2 + \beta = \alpha'\ln\rho_0 + \beta'$

3/ تقارن $\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$; $J_z = \frac{I}{\pi\rho_0^2}$

$\rho>\rho_0 \qquad B(2\pi\rho) = \mu_0 I$

$\vec{B}_{\rho>\rho_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

$\vec{B}_{\rho>\rho_0} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{\rho>\rho_0} = -\frac{\alpha'}{\rho}\hat{\varphi}$

$\alpha' = \frac{-\mu_0 I}{2\pi}$

موفق باشید

$A_{z_1}(\rho<\rho_0) = -\frac{\mu_0 J_z}{4}\rho^2 + \beta$

$A_{z_2}(\rho>\rho_0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho + \beta' \longrightarrow$

$\vec{B}(\rho<\rho_0) = \frac{\mu_0 J_z}{2}\rho\,\hat{\varphi}$

$\vec{B}(\rho>\rho_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}, \quad I = J_z\pi\rho_0^2$