دانشگاه صنعتی اصفهان — **دانشکده علوم ریاضی**

کلید آزمون پایان ترم ریاضی عمومی یک — **دی ماه ۱۳۹۴**

تذکر: کلیه راه حل های درست در چارچوب مراجع پذیرفته میشود و راه حل ارائه شده یکی از راه های ممکن است.

---

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $f(0)=0$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$. نشان دهید برای هر $x>0$، $0<f(x)<x$. (بارم ۱۵ نمره)

حل: (روش اول) با توجه به این که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^6}>0$ نتیجه می گیریم f اکیدا صعودی است. پس برای $x>0$ داریم $f(x)>f(0)=0$.

به شکل مشابه برای تابع $g(x)=x-f(x)$ و به ازای $x>0$ داریم $g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x^6}=\dfrac{x^6}{1+x^6}>0$.

نتیجه می گیریم g نیز اکیدا صعودی است. پس برای $x>0$ داریم $g(x)>g(0)=0$ که معادل است با $f(x)<x$.

حل: (روش دوم) از مشتق‌پذیری f بر $\mathbb{R}$ و در نتیجه پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ نتیجه میشود شرایط قضیه مقدار میانگین برای $x>0$ روی $[0,x]$ برقرار است. پس برای $x>0$ یک $0<c<x$ داریم که:

$$f(x)=f(x)-f(0)=(x-0)f'(c)=\frac{x}{c^2+1}$$

اکنون از $1>\dfrac{1}{c^2+1}>0$ نتیجه می شود $x>\dfrac{x}{c^2+1}>0$، یعنی $0<f(x)<x$.

۲. نشان دهید

$$\int_{0}^{\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}\, dx \leq \sqrt{2}\pi$$

(بارم ۱۵ نمره)

حل: فرض کنیم $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}$. ابتدا ماکزیمم مطلق f را روی $[0,\pi]$ به دست می آوریم. داریم $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}} = e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}}$. بنابر این:

$$f'(x) = \Big[\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}\Big]' e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}}$$

به این ترتیب از مثبت بودن تابع نمایی نتیجه می شود:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \Big[\frac{\ln(1+\sin x)}{1+\sin x}\Big]' = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}(1+\sin x) - \cos x\ (\ln(1+\sin x))}{(1+\sin x)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x[1-\ln(1+\sin x)] = 0$$

از $e > 2 \geq 1+\sin x \geq 0$ نتیجه می شود $\ln(1+\sin x) < 1$ و در نتیجه در بازه $[0,\pi]$ تنها جواب معادله $f'(x) = 0$ جواب $\cos(x) = 0$ در این بازه یعنی $x = \frac{\pi}{2}$ است. برای $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ داریم $f'(x) > 0$ و برای $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ داریم $f'(x) < 0$. به این ترتیب f روی $(0,1)$ فقط در $x = \frac{\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی برابر $f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ دارد و از $f(0) = 1$ و $f(\pi) = 1$ نتیجه می شود ماکزیمم مطلق f روی $[0,\pi]$ برابر $\sqrt{2}$ است. بنابر این:

$$\int_{0}^{\pi} (1+\sin x)^{\frac{1}{1+\sin x}}\, dx \leq \int_{0}^{\pi} \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\pi$$

۳. حدهای زیر را محاسبه کنید. (بارم ۲۰ نمره)

الف) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\int_{(x^2-1)^2}^{(x-1)^2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}}{x-1}$ ب) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x-x\cos(\pi x))}{x^3}$

حل الف) تابع $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ برای $x\geq 0$ پیوسته و در نتیجه برای $x>a>0$ ، تابع $h(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مشتق پذیر است و داریم $h'(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$. طبق قاعده زنجیره ای، از مشتق پذیری $(x-1)^2$ و $(x^2-1)^2$ نتیجه می شود تابع $\displaystyle\int_{(x^2-1)^2}^{(x-1)^2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ مشتق پذیر است و:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{(x^2-1)^2}^{(x-1)^2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}\Big)'=\Big(\int_a^{(x-1)^2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}\Big)'-\Big(\int_a^{(x^2-1)^2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}\Big)' &= \Big(\frac{2(x-1)}{1+\sqrt{(x-1)^2}}\Big)-\Big(\frac{2x(x^2-1)}{1+\sqrt{(x^2-1)^2}}\Big)\\ &= \frac{2(x-1)}{1+|x-1|}-\frac{2x(x^2-1)}{1+|x^2-1|}\end{aligned}$$

از سوی دیگر $g(x)=x-1$ مشتق پذیر است و در همسایگی $x=1$، $g'(x)=1\neq 0$. پس بنابر قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_{(x^2-1)^2}^{(x-1)^2}\frac{dt}{1+\sqrt{t}}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\Big(\frac{2(x-1)}{1+|x-1|}-\frac{2x(x^2-1)}{1+|x^2-1|}\Big)=0$$

حل ب)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x-x\cos(\pi x))}{x^3} &\overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\Big(1-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)\Big)\cosh(x-x\cos(\pi x))}{3x^2}\\ &\overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)}{3x^2}\quad \lim_{x\to 0}\cosh(x-x\cos(\pi x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)}{3x^2} &\overset{(3)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin(\pi x)+\pi\sin(\pi x)+\pi^2x\cos(\pi x))}{6x}\\ &\overset{(4)}{=} \frac{\pi^2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}+\frac{\pi^2}{6}\lim_{x\to 0}\cos(\pi x))=\frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

پس $\dfrac{\pi^2}{2}=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x-x\cos(\pi x))}{x^3}$.

(4): چون $\lim_{x\to 0}\cos(\pi x))=1$ و $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}=1$.

(3): چون توابع $1-\cos(\pi x)+\pi x\sin(\pi x)$ و $3x^2$ در همسایگی محذوف $x=0$ مشتق پذیرند و در همسایگی محذوف $x=0$ داریم $(3x^2)'=6x\neq 0$، از (4) و قاعده ی هوپیتال نتیجه می شود.

(2): از پیوستگی $\cosh$ در $x=0$ و $\lim_{x\to 0}(x-x\cos(\pi x))=0$ نتیجه می شود $\lim_{x\to 0}\cosh(x-x\cos(\pi x))=\cosh(0)=1$.

(1): چون توابع $\sinh(x-x\cos(\pi x))$ و x^3 در همسایگی محذوف $x=0$ مشتق پذیرند و در همسایگی محذوف $x=0$ داریم $(x^3)'=3x^2\neq 0$، از (3) و قاعده ی هوپیتال نتیجه می شود.

۴. انتگرال های زیر را محاسبه کنید. (بارم ۳۰ نمره)

الف) $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$ ب) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$ ج) $\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

حل الف) برای $u = (\ln x)^2$ و $dv = dx$ ؛ $du = \frac{2}{x}\ln x$ و $v = x$ به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$\int (\ln x)^2\, dx = \int u dv = uv - \int v du = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$$

مجددا برای $u = \ln x$ و $dv = dx$ ؛ $du = \frac{1}{x}$ و $v = x$ به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$\int \ln x\, dx = \int u dv = uv - \int v du = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

پس

$$\int_1^e (\ln x)^2\, dx = \Big[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\Big]_1^e = e - 2$$

حل ب) با تغییر متغیر $x = t^2$ (برای $x \geq 0$) داریم $dx = 2tdt$ و

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx = 2\int t\sin t\, dt$$

اکنون برای $u = t$ و $dv = \sin t\ dt$ ؛ $du = dt$ و $v = -\cos t$ به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$\int t\sin t\, dt = \int u dv = uv - \int v du = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t + c$$

پس

$$\int \sin\sqrt{x}\, dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$$

حل ج) با تغییر متغیر $e^x = t$ داریم $e^x\, dx = dt$، یعنی $dx = e^{-x}dt = \dfrac{dt}{t}$ و

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{1+t}{t(1+t^2)}\, dt$$

اکنون به کمک روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1+t}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B+Ct}{1+t^2} = \frac{(A+C)t^2 + Bt + A}{t(1+t^2)}$$

پس $A = 1$، $B = 1$ و $C = -1$. بنابر این

$$\int \frac{1+t}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{1-t}{1+t^2}dt = \ln t + \int \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2}d = \ln t + \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c$$

به این ترتیب:

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\, dx = x + \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c$$

۵. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید. (بارم ۲۰ نمره)
$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx$$

حل:
$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx$$

ابتدا نشان می دهیم انتگرال ناسره نوع اول $I_2 = \displaystyle\int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx$ همگرا است.

روش اول: برای $x \geq 1$ داریم $x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \leq 1$ و در نتیجه $0 \leq x^{-\frac{1}{4}} 2^{-x} \leq 2^{-x}$.

توابع $x^{-\frac{1}{4}} 2^{-x}$ و 2^{-x} برای $c > 1$ روی $[1, c]$ مثبت و پیوسته و در نتیجه روی $[1, c]$ انتگرال پذیرند.

با توجه به این که
$$\int_1^\infty 2^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c 2^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln 2} 2^{-x}\right]_1^c = \frac{1}{2\ln 2}$$

از همگرایی $\displaystyle\int_1^\infty 2^{-x}\, dx$ و بنا بر آزمون مقایسه ، همگرایی I_2 نتیجه می شود.

روش دوم: توابع $x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}$ و x^2 برای $c > 1$ روی $[1, c]$ مثبت و پیوسته و در نتیجه روی $[1, c]$ انتگرال پذیرند.

از سوی دیگر
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{2^x} = 0$$

بنابر این از همگرایی $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ و بنا بر آزمون مقایسه حدی، همگرایی I_2 نتیجه می شود.

از این که $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-\frac{1}{4}} = \infty$ و $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2^{-x} = 1$ نتیجه می شود $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2^{-x} x^{-\frac{1}{4}} = \infty$ و در نتیجه $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx$ یک انتگرال ناسره نوع دوم است.

اکنون نشان می دهیم I_1 نیز همگرا است.

توابع $x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}$ و 2^{-x} هر دو روی $(0, 1]$ مثبت و برای $c > 0$ روی $[c, 1]$ پیوسته و در نتیجه روی $[c, 1]$ انتگرال پذیرند.

از سوی دیگر
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}}{x^{-\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^x} = 1$$

بنابر این از همگرایی $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ و بنا بر آزمون مقایسه حدی، همگرایی I_1 نتیجه می شود.

از همگرایی I_1 و I_2 همگرایی $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\frac{1}{4}}\, 2^{-x}\, dx$ نتیجه می شود.

۶. فرض کنید $f(x) = \dfrac{x}{۸ + x^{۳}}$.

الف) سری توان نظیر تابع f حول $x = ۰$ (بسط مک لوران) و بازه همگرایی آن را به دست آورید.

ب) تابع $\int f(x)\,dx$ را به صورت یک سری توانی بنویسید.

(بارم ۲۰ نمره)

حل الف) سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} x^{n}$ در بازه $(-۱,۱)$ به $\dfrac{۱}{۱-x}$ همگرا است. پس:

$$\frac{x}{۸+x^{۳}} = \frac{x}{۸}\ \frac{۱}{۱-(-\frac{x}{۲})^{۳}} = \frac{x}{۸}\sum_{n=۰}^{\infty}\Big((-\frac{x}{۲})^{۳}\Big)^{n} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲^{۳n+۳}}\ x^{۳n+۱}$$

بازه همگرایی این سری توان از رابطه $|(-\dfrac{x}{۲})^{۳}| < ۱$ به دست می آید و عبارت است از $(-\sqrt[۳]{۲}, \sqrt[۳]{۲})$.

حل ب)

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x\ dx}{۸+x^{۳}} = \int \Big(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲^{۳n+۳}}\ x^{۳n+۱}\Big)\,dx = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۲^{۳n+۳}}\ \int x^{۳n+۱}\,dx = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{(۳n+۲)۲^{۳n+۳}}\ x^{۳n+۲}$$