به نام پروردگار یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان   دانشکده‌ی علوم ریاضی

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II   فروردین ۱۳۹۰

پرسش اول (۱۲ نمره) خم C را با معادله‌ی برداری زیر در نظر بگیرید.

$$\mathbf{r}(t) = (e^t - t)\ \mathbf{i} + (e^t + t)\ \mathbf{j} + \Big(۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲)\Big)\ \mathbf{k}$$

الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان را در نقطه‌ی $P_۰ = (۱, ۱, ۳)$ به‌دست آورید.

ب) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحه‌ی به معادله‌ی $y - z = ۲$ مشخص کنید.

ج) نشان دهید که خم C بر یک رویه‌ی درجه‌ی دو قرار دارد.

حل.

الف) (بارم ۵ نمره)

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t - ۱)\ \mathbf{i} + (e^t + ۱)\ \mathbf{j} + ۴\Big(e^{۲t} + t\Big)\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = e^t\ \mathbf{i} + e^t\ \mathbf{j} + ۴\Big(۲e^{۲t} + ۱\Big)\ \mathbf{k}$$

با توجه به $P_۰ = \mathbf{r}(۰)$، بردار نرمال صفحه‌ی بوسان در $P_۰$ را می‌توان بردار زیر در نظر گرفت.

$$\mathbf{r}'(۰) \times \mathbf{r}''(۰) = (۲\ \mathbf{j} + ۴\ \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} +\ \mathbf{j} + ۱۲\ \mathbf{k}) = ۲۰\mathbf{i} + ۴\ \mathbf{j} - ۲\ \mathbf{k}$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در $P_۰$ عبارت است از $۲۰(x - ۱) + ۴(y - ۱) - ۲(z - ۳) = ۰$ یا به طور معادل $۱۰x + ۲y - z = ۹$.

ب) (بارم ۵ نمره) **روش اول:** اگر L_P خط گذرنده از $P = (e^t - t, e^t + t, ۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲)) \in C$ با بردار هادی $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (بردار نرمال صفحه‌ی $y - z = ۲$) باشد. معادله‌ی L_P به شکل زیر است:

$$L_P : \begin{cases} x = e^t - t \\ y = \lambda + e^t + t & \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda + ۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲) \end{cases}$$

بنابر این نقطه‌ی دلخواه روی C'، تصویر خم C بر صفحه‌ی $\pi :\ y - z = ۲$ محل تلاقی خط L_P با صفحه‌ی π است. پس مختصات این نقطه جواب دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} x = e^t - t \\ y = \lambda + e^t + t & \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda + ۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲) \\ y - z = ۲ \end{cases}$$

از معادله‌ی چهارم یعنی ۲ $= y - z$ نتیجه می‌شود $\lambda + e^t + t + \lambda - ۱ - ۲(e^{۲t} + t^۲) = ۲$. پس $\lambda = \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) - e^t - t)$. به این ترتیب خم C' را می‌توان نظیر تابع زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\mathbf{j} + \frac{۱}{۲}(-۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\ \mathbf{k}$$

روش دوم: نقطه‌ی دلخواهی مانند $Q = (۰, ۲, ۰)$ را در صفحه‌ی π در نظر می‌گیریم. فرض کنیم نقطه‌ی P' تصویر قائم نقطه‌ی $P \in C$ بر صفحه‌ی π و $\mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ بردار نرمال π باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{PQ} = (t - e^t)\ \mathbf{i} + (۲ - t - e^t)\ \mathbf{j} + (-۱ - ۲(e^{۲t} + t^۲))\ \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^۲} = \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

به این ترتیب خم C' را می‌توان نظیر تابع زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\mathbf{j} + \frac{۱}{۲}(-۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲) + e^t + t)\ \mathbf{k}$$

ج) (بارم ۲ نمره) برای $P = (x, y, z) \in C$ داریم:

$$x = x(t) = e^t - t, \quad y = y(t) = e^t + t, \quad z = z(t) = ۱ + ۲(e^{۲t} + t^۲)$$

با توجه به این که $z = ۱ + x^۲ + y^۲$، نتیجه می‌گیریم C بر یک رویه‌ی درجه دو (سهمی‌گون دوار) قرار دارد.

دانشگاه صنعتی اصفهان   دانشکده‌ی علوم ریاضی

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II   فروردین ۱۳۹۰

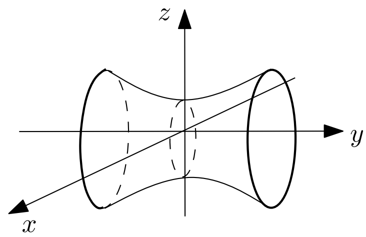
پرسش دوم (۱۰ نمره) رویه‌ی S به معادله‌ی $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ مفروض است.

الف) این رویه را توصیف و نمودار آن را رسم کنید.

ب) نشان دهید دقیقاً دو خط راست از نقطه‌ی $(1, 1, 1)$ می گذرند که تماماً بر رویه‌ی فوق قرار دارند.

ج) معادلات پارامتری خم حاصل از تلاقی S را با صفحه‌ی $x = 2y$ به دست آورید.

حل. الف) (بارم ۳ نمره) مقطع S با صفحات $y = k$ برای هر k یک دایره و با صفحات $x = k$ و $z = k$ هذلولی است. سطح S یک هذلولی‌گون یک‌پارچه‌ی دوار در امتداد محور y است.



ب) (بارم ۴ نمره) فرض کنیم $L_0 \subseteq S$ خط با بردار هادی $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ و گذرنده از $P_0 = (1, 1, 1)$ باشد. معادله‌ی L_0 به شکل زیر است:

$$L_0 : \begin{cases} x = at + 1 \\ y = bt + 1 \\ z = ct + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} L_0 \subseteq S \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \;\; (at+1)^2 - (bt+1)^2 + (ct+1)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \;\; (a^2 - b^2 + c^2)t^2 + 2(a - b + c)t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 + c^2 = 0 \\ 2(a - b + c) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 \\ a + c = b \end{cases} \end{aligned}$$

از معادله‌ی دوم داریم $a^2 + c^2 + 2ac = b^2$ و در نتیجه بنابر معادله‌ی اول $ac = 0$. پس این دستگاه دو جواب $a = 0, b = c$ و $c = 0, a = b$ دارد. به این ترتیب $\mathbf{v}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ بردارهای هادی دو خط مورد نظر هستند.

ج)(بارم۳ نمره) مختصات نقطه‌ی تلاقی S با صفحه‌ی $\pi\ :\ x=۲y$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} x^{۲}-y^{۲}+z^{۲}=۱ \\ x=۲y \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه می‌شود $۳y^{۲}+z^{۲}=۱$. معادله‌ی پارامتری خم حاصل به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x=\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}\cos t \\ y=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\cos t \\ z=\sin t \end{cases}$$

پرسش سوم (۸ نمره) تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲\sin x}{x^۲+|y|} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$
مفروض است.

الف) نشان دهید که تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در $(۰,۰)$ محاسبه کنید.

حل. الف) (بارم ۴ نمره) باید نشان دهیم:

$$\forall\,\varepsilon>۰\ \exists\,\delta>۰\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^۲\,(\sqrt{x^۲+y^۲}<\delta\Rightarrow|\frac{x^۲\sin x}{x^۲+|y|}-۰|<\varepsilon)$$

با توجه به نامساوی‌های $\dfrac{x^۲}{x^۲+|y|}\leq ۱$ و $|\sin x|\leq|x|$ داریم:

$$|\frac{x^۲\sin x}{x^۲+|y|}|\leq|x|\frac{x^۲}{x^۲+|y|}\leq|x|\leq\sqrt{x^۲+y^۲}$$

پس برای $\varepsilon>۰$ کافی است قرار دهیم $\delta\leq\varepsilon$.

ب) (بارم هرقسمت ۲ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h^۲\sin h}{h^۲+۰}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰-۰}{h}=۰$$