Geometriae Dedicata **83:** 31–37, 2000.

Kegelschnittbüschel und Inversion

Helmut R. Salzmann zum 70. Geburtstag gewidmet

GÜNTER PICKERT
Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Universität, Arndtstr. 2, D-35392 Gießen, Germany

(Received: 26 April 1999)

Communicated by K. Strambach

Abstract. The conjugacy mapping rel. to a complete quadrangle in a Pappian projective plane of characteristic $\neq 2$ is constructed by using a bijection of the line set onto the bundle of conics through the diagonal points of the quadrangle. The inversion with center O of the inversion circle going through the point P in the Euclidean plane proves to be the product of the reflection at OP and the affine restriction of the conjugacy mapping rel. to the quadrangle having P as one of its vertices and O together with the circular points at infinity as diagonal points.

Mathematics Subject Classification (2000): 51A30.

Key words: Vollständiges Viereck, Kegelschnittbüschel, Konjugiertheitsabbildung, Inversion.

1. In der projektiven Ebene $\mathcal{P}$ über einem Körper mit Charakteristik $\neq 2$ seien $V_j (j = 1, 2, 3, 4)$ die Ecken und D_0, D_1, D_2 die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks (s. Fig. 1). Wie in [2] (S. 375) wird ein homogenes Koordinatensystem so gewählt, daß D_0, D_1, D_2, V_1 die Koordinatentripel

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (1, 1, 1)$$

haben. Für V_2, V_3, V_4 ergeben sich dann Koordinatentripel

$$(-1, 1, 1), \quad (1, 1, -1), \quad (1, -1, 1).$$

Die Kegelschnitte durch die Ecken V_j werden als $\mathcal{C}(t)$ mit der Gleichung

$$\sum_{j=0}^{2} t_j x_j^2 = 0 \tag{1}$$

für die Koordinatentripel (x_0, x_1, x_2) ihrer Punkte X bezeichnet, wobei

$$t = (t_0, t_1, t_2) \neq (0, 0, 0), \quad \sum_{j=0}^{2} t_j = 0 \tag{1'}$$

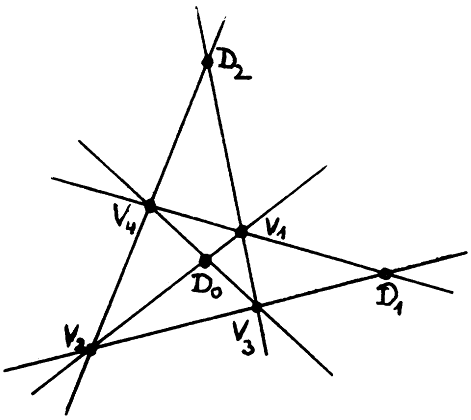

Figure 1.

gilt. Für eine Gerade u mit Koeffiziententripel (abgekürzt: KT) (u_0, u_1, u_2), d.h.

$$X \in u \Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{2} u_j x_j = 0$$

wird die Menge $\mathcal{P}_u$ der Punkte X mit der folgenden Eigenschaft eingeführt: Es gibt t mit (1′) derart, daß X der Pol von u bez. $\mathcal{C}(t)$ ist, also

$$u_j = t_j x_j \quad (j = 0, 1, 2) \tag{2}$$

gilt. Aus (2, 1′) folgt

$$u_0 x_1 x_2 + u_1 x_2 x_0 + u_2 x_0 x_1 = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kegelschnitt $\mathcal{C}_u$ im Bündel $\mathcal{B}$ aller Kegelschnitte durch D_0, D_1, D_2, und $u \mapsto \mathcal{C}_u$ ist eine Abbildung der Geradenmenge von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{B}$.

Daß diese injektiv, also eine Bijektion ist, erkennt man folgendermaßen: Falls $\mathcal{C}_u$ ein Geradenpaar ist, ermittelt sich u aus einer der beiden Geraden (s. (4) in **2**). Andernfalls ist $u_0 u_1 u_2 \neq 0$, und bei einem Koordinatenkörper mit mehr als drei Elementen erkennt man aus (3), daß $\mathcal{C}_u$ zwei Punkte mit Koordinatentripeln $(1, x, y), (1, x', y')$ und $|\{0, x, x'\}| = 3$ enthält; dann wird (u_0, u_1, u_2) bis auf einen Faktor $\neq 0$ aus den beiden Gleichungen

$$u_0 xy + u_1 y + u_2 x = 0, \qquad u_0 x'y' + u_1 y' + u_2 x' = 0$$

bestimmt. Hat der Koordinatenkörper aber nur die drei Elemente $0, 1, -1$ und ist $\{u_0, u_1, u_2\} \subseteq \{1, -1\}$, so besitzt $\mathcal{C}_u$ genau einen Punkt X mit $x_0 x_1 x_2 \neq 0$, und aus (3) folgt dann $u_j = x_j (j = 0, 1, 2)$ oder $u_j = -x_j (j = 0, 1, 2)$.

Wegen $(1', 2, 3)$ hat man

$$\mathcal{C}_u \setminus \{D_0, D_1, D_2\} \subseteq \mathcal{P}_u \subseteq \mathcal{C}_u$$

und

$$D_j \in \mathcal{P}_u \Longleftrightarrow u = D_k D_l \qquad \text{für } \{j, k, l\} = \{0, 1, 2\}.$$

Daher gilt

$$\mathcal{P}_u = \mathcal{C}_u \setminus \{D_0, D_1, D_2\},$$

wenn u höchstens einen der Diagonalpunkte enthält, und (für $k \neq l$)

$$u = D_k D_l \Rightarrow \mathcal{P}_u = \mathcal{C}_u \setminus \{D_k, D_l\}.$$

Da (3) in den u_j linear ist, wird durch $u \longmapsto \mathcal{C}_u$ das Büschel der Geraden durch einen Punkt Y auf ein Kegelschnittbüschel $\mathcal{B}_Y (\subseteq \mathcal{B})$ abgebildet, und $Y \longmapsto \mathcal{B}_Y$ ist eine Bijektion der Punktmenge von $\mathcal{P}$ (im folgenden ebenfalls mit $\mathcal{P}$ bezeichnet) auf die Menge aller im Bündel $\mathcal{B}$ enthaltenen Kegelschnittbüschel. Somit stellen die Abbildungen $Y \longmapsto \mathcal{B}_Y, u \longmapsto \mathcal{C}_u$ die projektive Ebene $\mathcal{P}$ dar durch $\mathcal{B}$ und die Menge aller in $\mathcal{B}$ enthaltenen Büschel, wobei die Inzidenz in die zu $\in$ inverse Relation übergeht:

$$Y \in u \Longleftrightarrow \mathcal{C}_u \in \mathcal{B}_Y.$$

2. Zur Untersuchung der $\mathcal{B}_Y$ kann man o.B.d.A. $Y \notin D_1 D_2$ annehmen. Mit $u = D_1 Y, v = D_2 Y$ sind dann die $\mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v$ verschieden und erzeugen daher $\mathcal{B}_Y$. Im Fall $Y = D_0$ (und daher $u_0 = u_1 = 0 = v_0 = v_2$) ergibt (3)

$$\mathcal{C}_u = D_1 D_2 \cup D_2 D_0, \quad \mathcal{C}_v = D_1 D_2 \cup D_0 D_1 :$$

$\mathcal{B}_Y$ besteht aus allen Geradenpaaren $D_1 D_2 \cup w$ mit $D_0 \in w$. Ist $Y \neq D_0$, hat also Y ein Koordinatentripel (y_0, y_1, y_2) mit $y_0 \neq 0$ und nicht $y_1 = 0 = y_2$, so erhält man aus (3) (mit $u_1 = 0$)

$$\mathcal{C}_u = D_0 D_2 \cup u' \tag{4}$$

mit $(u_2, 0, u_0)$ als KT von u'. Schreibt man die KT von u, u' als Linearkombinationen der KT $(1, 0, 1), (1, 0, -1)$ von $V_2 V_3$, $V_4 V_1$, so ergeben sich die u, u' als harmonisch zu den Vierecksgeraden, die durch D_1 gehen (s. Fig. 2).

In derselben Weise erhält man

$$\mathcal{C}_v = D_0 D_1 \cup v' \tag{5}$$

mit $(v_1, v_0, 0)$ als KT von v'. Wegen $Y \in u, v$ haben u', v' KT $(y_0, 0, -y_2), (y_0, -y_1, 0)$. Da diese linear unabhängig sind, folgt $u' \neq v'$, und der Schnittpunkt Y' von u', v' hat ein Koordinatentripel (y'_0, y'_1, y'_2) mit

$$y'_0 = y_1 y_2, \quad y'_1 = y_2 y_0, \quad y'_2 = y_0 y_1. \tag{6}$$

Es ergibt sich also eine quadratische birationale Transformation $Y \longmapsto Y'$ von $\mathcal{P}$,

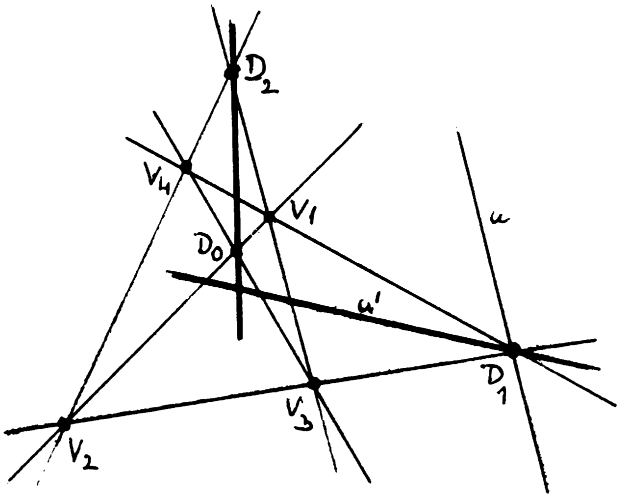

Figure 2.

wobei die D_j nicht zum Definitionsbereich gehören. Mit

$$\mathcal{D} = D_0D_1 \cup D_1D_2 \cup D_2D_0$$

hat man

$$Y \notin \mathcal{D} \Longleftrightarrow Y' \notin \mathcal{D}. \tag{7}$$

Falls $Y \notin \mathcal{D}$, haben die Geradenpaare (4,5) die 4 Punkte D_0, D_1, D_2, Y' gemeinsam, und von diesen sind keine 3 kollinear. Daher hat man

SATZ 1. *Im Fall $Y \notin \mathcal{D}$ besteht $\mathcal{B}_Y$ aus allen Kegelschnitten durch D_0, D_1, D_2 und den gemäß (6) bestimmten Punkt Y'.*

Das dritte Geradenpaar in $\mathcal{B}_Y$ ist $\mathcal{C}_w = D_1D_2 \cup w'$ mit $w = D_0Y$ und $w' = D_0Y$ als vierter harmonischer Geraden zu w und den zwei Vierecksgeraden durch D_0. Damit ergibt sich der

SATZ 2. *Ist in $\mathcal{P}$ der Punkt P mit keinem Diagonalpunktepaar eines gegebenen vollständigen Vierecks kollinear, so haben die 3 Geraden, von denen jede durch einen Diagonalpunkt D geht und harmonisch zu PD und den zwei Vierecksgeraden durch D ist, einen Punkt gemeinsam.*

Es bleibt noch, $\mathcal{B}_Y$ im Fall $Y \in D_0D_1 \setminus \{D_0, D_1\}$ zu bestimmen. Hier hat man $Y' = D_2$, $\quad \mathcal{C}_u = D_1D_2 \cup D_2D_0$ (mit $u = D_0D_1$), und $\mathcal{B}_Y$ besteht aus $\mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v$ und allen nichtausgearteten Kegelschnitten durch die D_j mit v' – wie in (5) bestimmt – als Tangente in D_2.

3. Für $Y \notin \mathcal{D}$ (d.h. $y_0y_1y_2 \neq 0$) ist (6) (bis auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$ der y'_j) äquivalent mit

$$y_0y'_0 = y_1y'_1 = y_2y'_2. \tag{6'}$$

Wegen (2, 1′) folgt aus (6′) (mit Y' statt X), daß Y auf der Polaren von Y' bez. jedes Kegelschnittes $\mathcal{C}(t)$ liegt. Umgekehrt folgt daraus wieder (6′); denn wäre etwa $y_0y'_0 \neq y_1y'_1$, hätte man $\sum_{j=0}^{2} y_jt_jy'_j \neq 0$ für $t = (1, -1, 0)$. Für $Y \notin \mathcal{D}$ ist daher Y' gekennzeichnet dadurch, daß (Y, Y') ein Paar konjugierter Punkte bez. aller Kegelschnitte durch V_j ist. In der Terminologie von Baker [1] heißt das: Y, Y' sind konjugiert bez. des Vierecks $V_1V_2V_3V_4$. Daher sei die Abbildung $Y \mapsto Y'$ als *Konjugiertheitsabbildung* κ bez. des Vierecks $V_1V_2V_3V_4$ bezeichnet; ihr Definitionsbereich ist $\mathcal{P} \setminus \{D_0, D_1, D_2,\}$. Die Symmetrie der Konjugiertheit zeigt, daß die Einschränkung von κ auf $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ eine involutorische Permutation ist. Da nach (7) für $\{j, k, l\} = \{0, 1, 2\}$

$$Y \in D_jD_k \setminus \{D_j, D_k\} \Rightarrow Y' = D_l \tag{8}$$

gilt, hat man für die Bildmenge von κ

$$\mathcal{P}^\kappa = (\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}) \cup \{D_0, D_1, D_2\}.$$

Aus (3) mit $x_j = y'_j$ und (6) folgt

$$Y' \in \mathcal{C}_u \Longleftrightarrow y_0y_1y_2 \sum_{j=0}^{2} u_jy_j = 0$$

und daher wegen (7)

$$\mathcal{C}_u \setminus \mathcal{D} \subseteq u^\kappa \subseteq \mathcal{C}_u. \tag{9}$$

Enthält u keinen Diagonalpunkt (d.h. $u_0u_1u_2 \neq 0$), dann gilt wegen (3, 8)

$$\mathcal{C}_u \cap \mathcal{D} = \{D_0, D_1, D_2\} = (u \cap \mathcal{D})^\kappa$$

und wegen $\mathcal{C}_u = (\mathcal{C}_u \setminus \mathcal{D}) \cup (\mathcal{C}_u \cap \mathcal{D})$ sowie (9) daher $u^\kappa = \mathcal{C}_u$.

4. Daß κ die durch keinen Diagonalpunkt gehenden Geraden in die nichtausgearteten Kegelschnitte durch diese drei Punkte überführt, erinnert daran, daß in einer euklidischen Ebene bei einer Inversion die nicht durch das Inversionszentrum gehenden Geraden in die Kreise durch dieses übergehen. In der Tat hat man für eine euklidische Ebene $\mathcal{E}$ (allgemeiner: eine metrische Ebene über einem euklidischen Körper) mit I, J als den absoluten Kreispunkten in der projektiven Erweiterung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{E}$ den

SATZ 3. *Ist P ein Punkt des Inversionskreises mit Zentrum O, so ergibt sich die Inversion, eine Permutation von $\mathcal{E} \setminus \{O\}$, als Produkt der Spiegelung an OP mit der Einschränkung auf $\mathcal{E} \setminus \{O\}$ der Konjugiertheitsabbildung bez. des Vierecks mit O, I, J als Diagonalpunkten und P als einer Ecke.*

Zum Beweis wählt man in $\mathcal{E}$ ein cartesisches Koordinatensystem, in dem O, P die Koordinatenpaare $(0, 0), (1, 0)$ haben. Ein homogenes Koordinatensystem in der projektiven Erweiterung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{E}$ wird durch die Verbindung

$$x = x_1/x_0, \quad y = x_2/x_0 \quad (x_0 \neq 0) \tag{10}$$

zwischen dem Koordinatentripel (x_0, x_1, x_2) und dem cartesischen Koordinatenpaar (x, y) eines Punktes bestimmt. I, J haben dann die Koordinatentripel $(0, 1, i), (0, 1, -i)$. Das Produkt der Spiegelung an OP mit der Inversion wird beschrieben durch die Gleichungen

$$x' = x(x^2 + y^2)^{-1}, y' = -y(x^2 + y^2)^{-1} \quad ((x, y) \neq (0, 0)), \tag{11}$$

gleichbedeutend mit $x' + iy' = (x + iy)^{-1}$.

Man hat also zu beweisen, daß diese Abbildung die Einschränkung der genannten Konjugiertheitsabbildung ist. Mit (10) und den entsprechenden Gleichungen für x', y', x'_j läßt sich (11) als

$$x'_0 = x_1^2 + x_2^2, \quad x'_1 = x_0 x_1, \quad x'_2 = -x_0 x_2 \tag{12}$$

schreiben. Um (6) anwenden zu können, wird ein neues Koordinatensystem eingeführt mit $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ als Koordinatentripel von O, I, J, P. Die neuen homogenen Koordinaten y_j eines Punktes mit den alten Koordinaten x_j sind dann durch

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = x_1 - ix_2, \quad y_2 = x_1 + ix_2 \tag{13}$$

gegeben; diese Gleichungen sind äquivalent mit

$$x_0 = y_0, \quad x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{i}{2}(y_1 - y_2). \tag{13'}$$

Mit (13, 13′) und den entsprechenden Gleichungen für die x'_j, y'_j geht nun (12) tatsächlich über in (6).

Bemerkung. Mit $D_0 = O,\ D_1 = I,\ D_2 = J,\ V_1 = P$ ergeben sich für die anderen Ecken V_2, V_3, V_4 die cartesischen Koordinatenpaare $(-1, 0), (0, i), (0, -i)$. Die Kegelschnitte $\mathcal{C}(t)$ durch die V_j lassen sich daher durch Gleichungen

$$sxy + s'(x^2 - y^2 - 1) = 0 \qquad \text{mit } (s, s') \neq (0, 0)$$

darstellen. Sie sind in $\mathcal{E}$ die gleichseitigen Hyperbeln durch P mit Zentrum O, einschließlich des Paares der Koordinatenachsen.

Literatur

1. Baker, H. F.: *An introduction to Plane Geometry*, Cambridge University Press, 1943.
2. Coxeter, H. S. M.: Some applications of trilinear coordinates, *Linear Algebra Appl.* **226–228** (1995), 375–388.