مصطفی عین اله زاده
دانش‌جوی دکتری
ریاضی
دانش‌گاه صنعتی شریف

اتحادهای شگفت‌انگیز ۲!

در شمارهٔ قبلی مجلهٔ پرگار، ترجمهٔ مقاله‌ای از دیمیتری فوخس را با عنوان «اتحادهای شگفت‌انگیز» منتشر کردیم. در ابتدای آن مقاله، یک سری نامتناهی با نام «تابع اویلر» به صورت زیر تعریف شده بود:

$$\phi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots .$$

همچنین جملات ابتدایی بسط این تابع نیز محاسبه شده بود:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} \\ &\quad + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + x^{92} + x^{100} + \cdots .\end{aligned}$$

این بسط نشان می‌داد که ضرایب تابع اویلر فقط برای توان‌های $0, 1, 2, 5, 7, 12, \ldots$ ناصفر است و همهٔ ضرایب ناصفر هم برابر مثبت و یا منفی یک هستند. همان‌طور که در مقالهٔ فوخس دیدیم، اویلر با بررسی توان‌های ظاهر شده در تابع ϕ، حدس زد که این توان‌ها دقیقاً همان اعداد «مخمسی (تعمیم‌یافته)» هستند و ضرایب هم بعد از ضریب اول، به صورت دو تا منفی، دو تا مثبت، دو تا منفی و ... ظاهر می‌شوند. او نهایتاً توانست این اتحاد را ثابت کند:

$$\phi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}} \right).$$

این اتحاد یک کاربرد جالب ترکیبیاتی داشت و آن اینکه برای سری نامتناهی زیر

$$\pi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$$

($p(n)$ تعداد افرازهای عدد n و $p(0)=1$) داشتیم:

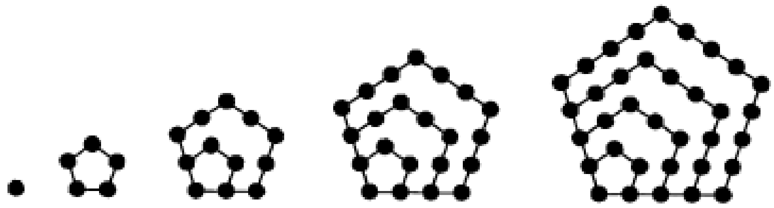
$$\pi(x)\phi(x) = 1.$$

در نتیجه با توجه به اتحاد اویلر و برابر قرار دادن ضرایب دو طرف، رابطهٔ بازگشتی زیر برای تابع افراز به دست می‌آمد ($n \geq ۱$):

$$p(n) = p(n-۱) + p(n-۲) - p(n-۵) - p(n-۷) + p(n-۱۲) + p(n-۱۵) - \cdots .$$

اعداد مخمسی

ساختاری از تعدادی پنج‌ضلعی منتظم درون هم مانند شکل‌های زیر در نظر بگیرید، که روی هر یک از اضلاع k امین پنج‌ضلعی درونی، $k+۱$ نقطه علامت زده شده است. به تعداد نقاط در ساختار شامل $n-۱$ پنج‌ضلعی، عدد مخمسی n ام می‌گویند. این اعداد با فرم صریح $\frac{۳n^۲-n}{۲}$ ($n \geq ۱$) داده می‌شوند.



1 5 12 22 35

اگر در این تعریف همهٔ اعداد صحیح n را اجازه دهیم، به اعداد به دست‌آمده معمولاً «اعداد مخمسی تعمیم‌یافته» می‌گویند. (مثل: $۰, ۱, ۲, ۵, ۷, ۱۲, ۱۵, ۲۲, ۲۶, \ldots$) اما ما در این مقاله برای راحتی، برای این اعداد هم از اصطلاح اعداد مخمسی استفاده می‌کنیم.

مدتی بعد از ترجمهٔ مقالهٔ فوخس، به قضیهٔ بسیار جالب دیگری از اویلر برخورد کردم که می‌گوید تابع جمع مقسوم‌علیه‌ها (σ) هم در یک رابطهٔ بازگشتی کاملاً مشابه رابطهٔ بالا برای تابع افراز صدق می‌کند:

$$\sigma(n) = \sigma(n-۱) + \sigma(n-۲) - \sigma(n-۵) - \sigma(n-۷) + \sigma(n-۱۲) + \sigma(n-۱۵) - \cdots .$$

(البته یک تفاوت کوچک وجود دارد و آن اینکه در اینجا مقادیر σ را در اعداد منفی برابر صفر می‌گیریم و اگر در عبارت بالا $\sigma(۰)$ ظاهر شود آن را برابر با n می‌گیریم.) این رابطهٔ بازگشتی هم معادل با یک اتحاد در سری‌های نامتناهی است. خوشبختانه توانستم یک مرجع خوب برای اثبات مقدماتی این اتحاد پیدا کنم (مرجع [۱]) و همین باعث شد تا خلاصه‌ای از آنچه یاد گرفتم را در مقاله‌ای دیگر به خوانندگان مجلهٔ پرگار تقدیم کنم. ضمناً خوب است که یادآور شوم، یک فصل از مرجع [۲]، مقاله‌ای است که نسخه‌ای کاملتر از مقالهٔ قبلی دیمیتری فوخس است و در آن برای بعضی از اتحادهایی که در مقالهٔ قبل بدون اثبات بودند، اثبات‌های مقدماتی ارائه شده و همچنین تعدادی تمرین اضافه شده است. مطالعهٔ این مقاله را هم به خوانندگان علاقه‌مند پیشنهاد می‌کنم.

تابع مجموع مقسوم‌علیه‌ها

همان‌طور که در مقدمه آمد، جمع مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n را معمولاً با $\sigma(n)$ نشان می‌دهند. با استفاده از قضایای مقدماتی نظریه‌اعداد می‌توان نشان داد که برای هر دو عدد نسبت به هم اول m و n:

$$\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n).$$

به این خاصیت، «ضربی» بودن تابع σ می‌گویند. یک تابع ضربی با مقادیرش در توان‌های اعداد اول به صورت یکتا تعیین می‌شود. در مورد تابع σ هم می‌توان به سادگی دید که برای هر عدد اول p:

$$\sigma(p^k)=۱+p+\cdots+p^k=\frac{p^{k+۱}-۱}{p-۱}.$$

در نتیجه برای یک عدد طبیعی n که تجزیهٔ آن به عوامل اول به صورت $p_۱^{\alpha_۱}\cdots p_k^{\alpha_k}$ (p_i ها اول و متمایز) است، داریم:

$$\sigma(n)=\frac{p_۱^{\alpha_۱+۱}-۱}{p_۱-۱}\cdot\frac{p_۲^{\alpha_۲+۱}-۱}{p_۲-۱}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+۱}-۱}{p_k-۱}.$$

بنابراین مقدار $\sigma(n)$ رابطهٔ نزدیکی با تجزیهٔ n دارد، مثلاً $\sigma(n)=n+۱$ اگر و فقط اگر n اول باشد. نگاه کردن به دنبالهٔ مقادیر σ هم در اعداد طبیعی، تا حدودی پیچیدگی آن را نشان می‌دهد:

$$۱,۳,۴,۷,۶,۱۲,۸,۱۵,۱۳,۱۸,۱۲,۲۸,۱۴,۲۴,۲۴,۳۱,۱۸,۳۹,۲۰,۴۲,۳۲,۳۶,\ldots$$

اما آیا می‌توان مقادیر تابع σ را به وسیلهٔ یک رابطهٔ بازگشتی جمعی (یعنی بر حسب جمع و تفریق مقادیرش در اعداد کوچکتر) به دست آورد؟ جواب مثبت این سؤال یکی از کشفیات قابل توجه ریاضیدان معروف قرن هجدهم، لئونارد اویلر است. خود او در مقاله‌ای که در این رابطه نوشته است، می‌گوید:

> «به همین علت، به نظرم می‌آید که پیدا کردن قانون مشخصی که پیشرفت جملات دنبالهٔ $۱,۳,۴,۷,۶,\ldots$ را نشان می‌دهد و به وسیلهٔ آن هر جمله از دنباله به وسیلهٔ جملات پیشین قابل محاسبه است، را نباید ترقی کمی برای علم اعداد به شمار آورد؛ زیرا آنچه من یافتم، بسیار شگفت‌انگیز است و نشان می‌دهد که این دنباله به گونهٔ مشخصی از دنباله‌ها متعلق است که معمولاً بازگشتی نامیده می‌شوند و طبیعت آنها به صورتی است که هر جمله توسط جملات قبلی با قاعدهٔ مشخصی تعیین می‌شود. و چه کسی باور می‌کرد که این دنباله که بسیار آشفته است و در ظاهر هیچ وجه مشترکی با دنباله‌های بازگشتی ندارد، با این وجود در این دسته از دنباله‌ها قرار گیرد و یافتن رابطه‌ای بازگشتی برای آن ممکن باشد؟» [۱]

برای به دست آوردن این رابطهٔ بازگشتی، «تابع مولد» σ را در نظر می‌گیریم:

$$S(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\sigma(n)x^n.$$

[۱] [۳] پاراگراف ۷

به راحتی با توجه به اینکه σ از جمع مقسوم‌علیه‌ها تشکیل شده است، می‌توانیم ببینیم که:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{d=1}^{\infty} d(x^d + x^{2d} + x^{3d} + \cdots) \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{dx^d}{1 - x^d}. \end{aligned}$$

صورت عبارت $\frac{dx^d}{1-x^d}$ را می‌توان با اندکی تغییر از مشتق مخرج به دست آورد و این نکتهٔ ساده در واقع ایدهٔ اصلی اثبات اویلر است.

$$\begin{aligned} S(x) &= -x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{-dx^{d-1}}{1 - x^d} \\ &= -x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(1 - x^d)'}{1 - x^d} \end{aligned}$$

لم ۱. برای هر دو تابع مشتق‌پذیر و ناصفر f و g داریم:

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

اثبات.

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + g'f}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

(یک روش دیگر هم استفاده از رابطهٔ $(\log(f))' = \frac{f'}{f}$ است.) □

با کمک استقرا، لم بالا را می‌توان به راحتی به تعداد دلخواهی از توابع گسترش داد:

$$\frac{(f_1 f_2 \cdots f_n)'}{f_1 f_2 \cdots f_n} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_n'}{f_n}.$$

و این رابطه برای سری‌های توانی صوری هم برقرار است.
حال اگر همانند مقالهٔ قبل از نمادگذاری زیر استفاده کنیم:

$$\phi_n(x) = (1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^n),$$

با استفاده از لم برای هر n خواهیم داشت:

$$\sum_{d=1}^{n} d(x^d + x^{2d} + \cdots) = -x \sum_{d=1}^{n} \frac{(1 - x^d)'}{1 - x^d} = -x \frac{\phi_n'(x)}{\phi(x)}.$$

حال توجه کنید که برای هر توان ثابت از x مانند x^m، ضریب x^m در دو طرف تساوی از جایی به بعد (یعنی برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ) ثابت است. این مقدار برای طرف چپ به وضوح برابر $\sigma(m)$ است. برای طرف راست هم با کمی زحمت می‌توان دید که این ضریب برابر ضریب x^m در $-x\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ است. (اثبات این ادعا، تمرین خوبی برای محک زدن توانایی شما

در کار کردن با سری‌های نامتناهی است!) بنابراین نهایتاً به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$S(x) = -x\frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

و در نتیجه:

$$S(x)\phi(x) = -x\phi'(x). \tag{۱}$$

بنابر اتحاد اویلر داریم:

$$\phi(x) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n \left(x^{\frac{۳n^۲-n}{۲}} + x^{\frac{۳n^۲+n}{۲}}\right).$$

پس با مشتق‌گیری از طرفین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} -x\phi'(x) &= \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\left(\frac{۳n^۲-n}{۲}x^{\frac{۳n^۲-n}{۲}} + \frac{۳n^۲+n}{۲}x^{\frac{۳n^۲+n}{۲}}\right) \\ &= x + ۲x^۲ - ۵x^۵ - ۷x^۷ + ۱۲x^{۱۲} + ۱۵x^{۱۵} - \cdots. \end{aligned}$$

(یعنی ضریب x^k در $-x\phi'(x)$ تنها در صورتی ناصفر است که k مثبت و مخمسی باشد و در این حالت‌ها برابر مثبت یا منفی k است.)

در نتیجه با محاسبهٔ ضریب x^n در اتحاد ۱، برای هر $n \geq ۱$ داریم:

$$\sigma(n) - \sigma(n-۱) - \sigma(n-۲) + \sigma(n-۵) + \sigma(n-۷) - \cdots = \begin{cases} (-۱)^{k+۱}n, & n = \frac{۳k^۲ \pm k}{۲} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

(در اینجا $\sigma(۰)$ را صفر در نظر گرفته‌ایم.) یک روش جالب دیگر برای بیان رابطهٔ بازگشتی بالا، صورت هوشمندانه‌ای است که در مقدمه ذکر شد، به این صورت که مقدار $\sigma(۰)$ را اگر در رابطهٔ بالا ظاهر شود، برابر n در نظر می‌گیریم. با این قرارداد می‌توانیم خیلی راحت بنویسیم:

$$\sigma(n) = \sigma(n-۱) + \sigma(n-۲) - \sigma(n-۵) - \sigma(n-۷) + \cdots.$$

> «از این [نتایج به دست‌آمده]، می‌توان دید که چه رابطهٔ نزدیک و شگفت‌آوری بین آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها [یعنی تئوری مشتق و انتگرال] نه تنها با آنالیز معمولی، بلکه با نظریهٔ اعداد (که به نظر فاصلهٔ زیادی با آن نوع حسابان پیشرفته دارد) وجود دارد.» [۲]

چند مسأله

با استفاده از ایده‌هایی کاملاً مشابه، می‌توان روابط دیگری بین تابع جمع مقسوم‌علیه‌ها و تابع افراز به دست آورد که به صورت یک مسألهٔ چندقسمتی در زیر آمده است. اثبات هر یک از این قسمت‌ها با استفاده از مطالبی که در این مقاله و

[۲] [۳] صفحهٔ ۳

مقالهٔ قبل خواندید، بسیار ساده و سرراست است. (در اینجا $\sigma(\circ)$ را برابر با صفر در نظر بگیرید!)

الف) نشان دهید اگر $f(x)g(x) = ۱$، آنگاه

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \circ.$$

ب) نشان دهید:

$$S(x) = -x\phi'(x)\pi(x),$$

و

$$S(x) = x\frac{\pi'(x)}{\pi(x)}.$$

ج) نشان دهید برای هر $n \geq ۱$،

$$\sigma(n) = p(n-۱) + ۲p(n-۲) - ۵p(n-۵) - ۷p(n-۷) + ۱۲p(n-۱۲) + \cdots,$$

و

$$np(n) = \sigma(n) + \sigma(n-۱)p(۱) + \sigma(n-۲)p(۲) + \sigma(n-۳)p(۳) + \cdots.$$

و یک مسألهٔ دیگر: آیا می‌توانید با استفاده از روابط بازگشتی‌ای که در این مقاله دید، نتایجی در مورد رفتار دو تابع افراز و جمع مقسوم‌علیه‌ها (از قبیل خواص حسابی مانند باقیمانده بر یک عدد خاص و یا رشد و مرتبهٔ بزرگی) به دست آورید؟

کتاب‌نامه

[1] T. Osler, A. Hassen, T. Chandrupatla, Surprising connections between partitions and divisors. College Math. J. 38 (2007), no. 4, 278–287.

[2] D. Fuchs, S. Tabachnikov, Mathematical omnibus, Thirty lectures on classic mathematics. American Mathematical Society, (2007).

[3] L. Euler, J. Bell (tr.), An observation on the sums of divisors. arXiv:math/0411587 (2009).