
بسم الله الرحمن الرحيم

روش های حل عددی در الکترومغناطیس

روش تفاضل محدود

ارائه دهندگان:
زهراالسادات طباطبایی
فاطمه کریمیان
تحت نظر:
دکتر آذر تفریحی

مقدمه

محاسبات عددی:

علمی است که به توصیف، تجزیه، تحلیل و ایجاد روش هایی می پردازد که جواب های عددی یک مسئله را به دست می آورد.

برای حل آن دسته از مسائل ریاضیات پیوسته به کار می رود که با روش های تحلیلی و دقیق قابل حل نیستند.

یکی از انواع روش های محاسبات عددی روش اختلاف محدود است.

روش اختلاف محدود (تفاضل محدود)

روش تفاضل محدود (Finite Difference Method) که به اختصار (FDM) نامیده می شود یکی از روش های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است

روش تفاضل محدود برای محاسبه مشتق های جزئی، محیط و دنیای پیوسته پیرامون ما را به محیط گسسته تبدیل می کند.

دستگاه مختصات باید با شرایط مرزی برای حل معادله لاپلاس سازگار باشد

اما تمام مرزها با یک دستگاه سازگار نیستند یا حتی اگر جور باشند صدق کردن شرایط مرزی به طور تحلیلی ممکن است دشوار باشد

دو روش عمومی حل عددی معادله لاپلاس :

روش جزء متناهی و تفاضل متناهی

معرفی نرم افزار ها

p1

بیسیک:

اولین بار توسط جان جورج کمنی و توماس یوجین کرتز برنامه نویسی شده است

از سال 1970 تا به الان از پرطرفدار ترین برنامه های باقی مانده است

یکی از زبان های برنامه نویسی سطح بالا در عین حال ساده است

5اصل در بیسیک

1- زبان برنامه نویسی همه منظوره
2-پیغام های خطای واضح
3-استفاده اسان برای مبتدیان
4-پاسخ سریع برای برنامه های کوچک
5-امکان اضافه شدن ویژگی های پیشرفته

Slide 5

p1 parniyan, 6/2/2019

- معادله

- $$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

- شرایط مرزی:

- $\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0$

- یافتن پاسخ تقریبی با روش اختلاف محدود:

- ۱– تقسیم محدوده از x=0 تا x=1 به N قسمت مساوری به طول $\frac{1}{N}$

- ۲– در نقطه iام از این تقسیمات معادله لاپلاس با رابطه زیر تفریب زده می شود:

- $$[(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})]\left(\frac{1}{N}\right)^2 = 0 \qquad ❈$$

- ۳– در نقاط انتهایی نیز داریم:

- $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$

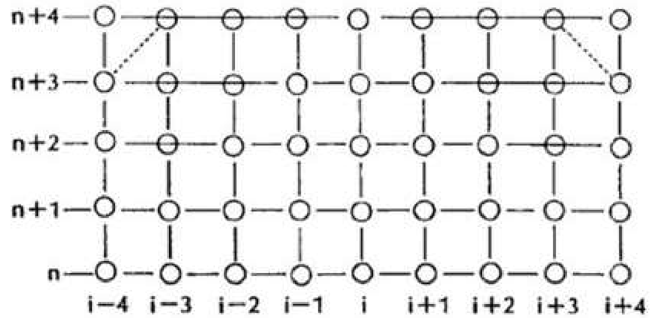
- مقدار (N-1) معادله ❈ را می توان دقیقاً حل کند (پاسخ $\varphi_i = \frac{i}{N}$ است).

اما معمول تر این است که روش تکرار را برای یافتن رشته ای از پاسخ های تقریبی که به پاسخ دقیق همگرا شوند به کار برد. پایه ای برای روش تکرار دوباره مرتب کردن معادله ❋ است:

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{i+1}+\varphi_{i-1}}{2} \qquad **$$

برای تمام نقاط داخلی $\varphi_i = 0,$

روی مرز $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 =$ ۱



Imposed boundary conditions at i−4 and i+4

$$[(\boldsymbol{\varphi}_{i+1} - \boldsymbol{\varphi}_i) - (\boldsymbol{\varphi}_i - \boldsymbol{\varphi}_{i-1})]\left(\frac{1}{N}\right)^2 = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{\boldsymbol{\varphi}_{i+1} + \boldsymbol{\varphi}_{i-1}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{\varphi}_{i+1} + \boldsymbol{\varphi}_{i-1}}{\mathbf{2}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\varphi}_i$$

- مجموعه جدیدی از φ_i ها با شروع کردن از i=۱ یا i=N-1 و به کار بردن آخرین مقدار بهبود φ_i ها در طرف راست معادله
- تفاضل بین تکرار به عنوان بیشینه مقدار مطلق تفاوت بین مقادیر پتانسیل محاسبه شده توسط و تکرار برای تمام نقاط روی شبکه است. این تکرار ادامه می یابد تا تفاضل بین تکرار آخر به مقدار معینی تقلیل یابد.

- این فرآیند دو نارسایی دارد:
- ۱_به اهستگی هم گرا می شود
- ۲_تفسیر تفاضل دو تکرار اخر ب عنوان اندازه خطا بیش از انداز است

– آهنگ همگرایی را "با فرا واهلش" می توان بهبود بخشید. برای فراواهلش معادله ** به شکل زیر بار نویسی می شود

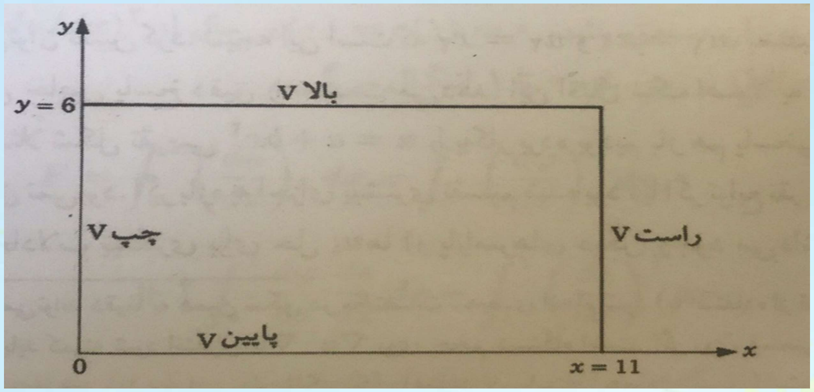
$$\varphi_i = \omega \frac{\varphi_{i+1}+\varphi_{i-1}}{2} + (1-\omega)\, \varphi_i \qquad ***$$

معادله ی *** برای مقدار پتانسیل در نقطه ی ! ام:

$$\varphi_i^{n+1} = \omega \frac{\varphi_{i+1}^{n} + \varphi_{i-1}^{n}}{2} + (1-\omega)\varphi_i^{n}$$

آهنگ همگرایی را تعیین میکند و معمولا مقدار بهینه ای برای آن وجود دارد

یافتن پتانسیل تقریبی دو بعدی در ناحیه ای مستطیل شکل



حل:

معادله تکرار برای این مسأله به شکل زیر است:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{\omega}{4}\left(\varphi_{i,j+1}^{n} + \varphi_{i+1,j}^{n} + \varphi_{i,j-1}^{n} + \varphi_{i-1,j}^{n}\right) + (1-\omega)\varphi_{i,j}^{n}$$

```
100 '******************************************************************************
110 '*                                                                            *
120 '*     LAPLAC4A: NUMERICAL SOLUTION OF LAPLACE'S EQUATION IN 2D RECTANGLE     *
130 '*                     NO ESSENTIAL LINE NUMBERS                              *
140 '*                                                                            *
150 '******************************************************************************
160 'The rectangle is 7x12 including the boundaries.  The mesh is 1x1 squares.
170 DIM V(10, 20)
180 CLS : SCREEN 0
190 '
200 'ENTER DATA
210 PRINT "Enter values between 0 and 1 for the potentials on the four sides."
220 INPUT "VTOP = ", VT: INPUT "VBOT = ", VB
230 INPUT "VLEFT = ", VL: INPUT "VRIGHT = ", VR
240 PRINT "Enter value of iteration parameter, DM.": INPUT "DM = ", DM
250 PRINT "Enter the value of the relaxation parameter, w.": INPUT "w = ", W
260 '
270 LOCATE 23, 1: PRINT "Press any key to continue"
280 C$ = INPUT$(1): CLS : IT = 0
290 '
300 'Enter starting values for the potential at the grid points and on the bdy.
310 FOR J = 2 TO 11
320   JP = 6 * J - 6
330   V(1, J) = VT: LOCATE 1, JP: PRINT VT
340   V(7, J) = VB: LOCATE 19, JP: PRINT VB
350 NEXT J
360 FOR I = 2 TO 6
370   V(I, 1) = VL: V(I, 12) = VR: IP = 3 * I - 2
380     FOR J = 2 TO 11: V(I, J) = 0: NEXT
390   LOCATE IP, 1: PRINT V(I, 1)
400     FOR J = 2 TO 12: JP = 6 * J - 6: LOCATE IP, JP: PRINT V(I, J): NEXT
410 NEXT I
420 '
430 'Iteration procedure
440 IT = 0
450 DW = 1
460 WHILE DW > DM
470    IT = IT + 1
480    DW = 0
490    LOCATE 22, 5: PRINT "Iteration no. = "; IT
500    FOR I = 2 TO 6
510       FOR J = 2 TO 11
520          IP = 3 * I - 2: JP = 6 * J - 6: IA = IP + 1
530          VIJ = W * ((V(I - 1, J) + V(I + 1, J) + V(I, J - 1) + V(I, J + 1))
             / 4) + (1 - W) * V(I, J)
540          DC = ABS(VIJ - V(I, J)): 'Residual at point I,J.
550          IF DC > DW THEN DW = DC: 'Largest residual in a given iteration.
560          V(I, J) = VIJ
570          LOCATE IP, JP: PRINT USING ".####"; V(I, J)
580          LOCATE IA, JP: PRINT USING ".####"; DC
590       NEXT J
600    NEXT I
610 WEND
620 '
630 LOCATE 22, 25: PRINT "- Value of DW achieved <="; DW
640 LOCATE 21, 1: PRINT "DM = "; DM, "w = "; W
650 END
```

فهم آماده سازی مسئله تفاضل های متناهی ساده است اما احتیاج به یک شبکه یکنواخت دارد. همچنین روش تفاضل های متناهی فقط پتانسیل را در نقاط مجزا می دهد و بنابراین درون یابی و یا تقریب های دیگری برای محاسبه میدان احتیاج دارد.

محاسبه میدان:

$$\mathcal{A}(r) = \mathcal{A}_n \hat{e}_n + \mathcal{A}_t \hat{e}_t + \mathcal{A}_z \hat{e}_z$$

با در نظر گرفتن رابطه زیر:

$$B = \nabla \times \mathcal{A}$$

بسط کرل را می نویسیم:

$$B = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial z}\right)\hat{e}_n + \left(\frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial n}\right)\hat{e}_t + \left(\frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial n} - \frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial t}\right)$$

با سپاس از توجه شما

زهرا رضایی
الهه زمانی
زهرا السادات طباطبایی
فاطمه طاهری
فاطمه کریمیان
پرنیان موسوی پناه
زهرا ابوطالبی