به نام پروردگار یکتا

آزمون پایان ترم محاسبات عددی، خردادماه ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

تذکر: در طول آزمون به هیچ پرسشی پاسخ داده نمی‌شود.
برخی از فرمول‌ها پشت ورقه قید شده‌اند.
برای تمامی پرسش‌ها محاسبات میانی به صورت گرد شده با $5D$ درج شوند. مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه

---

۱) دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

با جابجایی معادلات، دستگاه را به دستگاهی تبدیل کنید که روش گاوس—سایدل برای تعیین جواب تقریبی آن همواره همگرا باشد و سپس نتایج سه گام از این روش (یعنی $X^{(1)}$، $X^{(2)}$ و $X^{(3)}$) را با تقریب اولیه‌ی $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ به دست آورید (۳۰ نمره).

۲) جدول زیر را برای تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[0, 0/8]$ در نظر بگیرید.

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
$f(x)$	۷/۵	۳/۷۵	۲	۱/۷۵	۱/۵

الف) به روش درونیابی مناسب برای طول نقاط اتکای هم‌فاصله مقدار $f(0/05)$ را تقریب بزنید (۱۵ نمره).
ب) به روش سه نقطه‌ای مناسب مقدار $f'(0/8)$ را تقریب بزنید (۱۰ نمره).
ج) بهترین تقریب را برای $\int_0^{0/8} f(x)\, dx$ بر اساس جدول فوق به روش رامبرگ به دست آورید (۱۵ نمره).

۳) الف) حداقل تعداد تقسیمات بازه‌ی $[1, 2]$ را چنان بیابید که خطای محاسبه‌ی $\int_1^2 \ln(x)\, dx$ به روش سیمپسون کمتر از 10^{-4} باشد (۱۵ نمره).
ب) با طول نقاط اتکای $x_k = 1 + \frac{1}{3}k$، $(k = 0, 1, 2, 3)$ کران خطای تقریب $\ln(x)$ را برای $1 \le x \le 2$ به روش لاگرانژ محاسبه کنید (۱۵ نمره).

۴) معادله‌ی دیفرانسیل $y' = -1 + x + y$ را با مقدار اولیه‌ی $y(2) = 3$ در نظر بگیرید. در یک گام به روش‌های تیلور مرتبه‌ی ۴ و رانگ — کوتای چهار مرحله‌ای $y(2/1)$ را تقریب بزنید (۳۰ نمره).

موفق باشید

$$y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y_{n-2} + ... + \frac{q(q+1)...(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$ (پسرو نیوتن)

$$y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$ (پیشرو نیوتن)

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) y_k$$ (لاگرانژ)

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \qquad x_0 \le c \le x_n$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + ... + y_{N-1}) + y_N)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + ... + y_{N-2}) + 4(y_1 + ... + y_{N-1}) + y_N)$$

$E = \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(c), \quad a \le c \le b$ سیمپسون $\qquad E = \frac{b-a}{12}h^2 f''(c), \quad a \le c \le b$ ذوزنقه

$$w_{n+1} = w_n + hf(x_n, w_n) + \ ... \ + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_n, w_n) \ , \quad w_0 = y_0$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad Y_{p,k} = \frac{4^p Y_{p-1,k+1} - Y_{p-1,k}}{4^p - 1}$$

$$k_1 = hf(x_n, w_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = hf(x_n + h, w_n + k_3)$$
$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$