

به نام پروردگار بکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان  
دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی II خردادماه ۱۳۹۰  
مدت آزمون ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی .....

شماره‌ی دانشجویی .....

نام خانوادگی مدرس .....

شماره‌ی صندلی .....

محل آزمون .....

توجه:

- کارت دانشجویی خود را روی صندلی و در دسترس مراقبین جلسه بگذارید.
- پاسخ هر پرسش را فقط در برگه‌ی مشخص شده و پشت آن بنویسید.
- نام، نام خانوادگی و نام خانوادگی مدرس خود را در همه‌ی صفحه‌های پاسخ‌نامه بنویسید.  
در صورت نوشتن نام خانوادگی مدرس نمره‌ی برگه صفر منظور می‌شود.
- همراه داشتن ماشین حساب و تلفن همراه تقلب محسوب می‌شود.
- در طول آزمون به هیچ پرسشی پاسخ داده نمی‌شود و خروج از جلسه‌ی آزمون به منزله‌ی پایان وقت امتحان است.
- برگه‌های پاسخ‌نامه را به هیچ وجه از هم جدا نکنید و از برگه‌ی آخر پاسخ‌نامه به عنوان پیش‌نویس استفاده کنید.

|   |   |   |   |          |
|---|---|---|---|----------|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | جمع نمره |
|   |   |   |   |          |

نام و نام خانوادگی ..... نام خانوادگی مدرس .....  
شماره‌ی دانشجویی .....

دانشکده‌ی علوم ریاضی

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پرسش اول. تابع  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه‌ی

مفروض است.

الف) نشان دهید که  $f$  در  $(0, 0)$  مشتق‌پذیر نیست (۱۰ نمره).

ب) نشان دهید که مشتق سوئی  $f$  در  $(0, 0)$  و در سوی برداریکانی  $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  برابر با  $a^3 + b^3$  است (۱۰ نمره).

ج) با استفاده از روش تکثیرکنندگان (ضرایب) لاگرانژ مقادیر  $a$  و  $b$  را با شرط  $a^2 + b^2 = 1$  به قسمی تعیین کنید که مشتق سوئی  $f$  در  $(0, 0)$  و در سوی  $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  بیشترین مقدار را داشته باشد (۱۰ نمره).

نام و نام خانوادگی ..... نام خانوادگی مدرس .....  
شماره‌ی دانشجویی .....

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پرسش دوم. فرض کنید  $R$  ناحیه‌ی محدود به خط‌های  $x - y = 1$ ,  $x - y = 3$ ,  $x + y = 2$  و  $x + y = 4$  باشد و خم  $C$  مرز آن باشد که در جهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده شده است.

الف) مطلوب است محاسبه‌ی  $\iint_R (x^2 - y^2) dA$  (۲۰ نمره).

ب) برای  $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x^3}{3} + y^4\right)\mathbf{j}$  مطلوب است  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  (۱۰ نمره).

نام و نام خانوادگی ..... نام خانوادگی مدرس .....  
شماره‌ی دانشجویی .....

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پرسش سوم. فرض کنید  $T$  ناحیه‌ی بسته و کراندار در فضا باشد که به وسیله‌ی مخروط‌های  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ،  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  و نیم‌کره‌ی  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  محدود شده است.

الف) حجم ناحیه‌ی  $T$  را به دست آورید (۲۰ نمره).

ب) برای تابع برداری  $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + y^2 + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 2y + z^3)\mathbf{j} + (x^2 + y^3 + z)\mathbf{k}$  مطلوب است محاسبه‌ی  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  که  $\mathbf{n}$  قائم‌یکانی رویه‌ی  $S$ ، سطح محدود کننده‌ی  $T$  و رو به خارج است (۱۰ نمره).

پرسش چهارم. الف) مطلوب است محاسبه‌ی  $\int \int_D (x^2 + y^2) dA$  که در آن  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$  (۲۰ نمره).

ب) اگر خم  $C$ ، محل تلاقی صفحه‌ی  $z = 5$  و سهمی‌گون  $z = 9 - x^2 - y^2$  در جهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده شده باشد برای میدان برداری  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  مطلوب است محاسبه‌ی  $F(x, y, z) = (2z - y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - x + z)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$  (۱۰ نمره).

موفق باشید