

(بارم هر سؤال)

(۲۰ نمره) (۱) برای $x \geq 0$ ، نشان دهید که $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)$.

(۱۰ نمره) (۲) مقدار عبارت $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(3-x)} \int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ را محاسبه کنید.

(۱۰ نمره) (۳) فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید برای هر $a > 0$ ، تساوی زیر برقرار است.

$$\int_1^{a^2} \frac{f(\sqrt{t})}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

(۳۰ نمره) (۴) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int \frac{dx}{e^x(e^x - 1)}$ (ب) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$ (ج) $\int \frac{\sin^{-1} x}{x^3} dx$

(۲۰ نمره) (۵) همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+x^2}} dx$ (ب) $\int_0^1 \frac{\tan x}{x^2} dx$

(۳۰ نمره) (۶) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

(الف) مشتق‌پذیری f را در $x = 0$ بررسی کنید.

(ب) کلیه اکسترمم‌های f روی \mathbb{R} را تعیین کنید.

«موفق باشید»