بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان

آزمون پایان ترم محاسبات عددی مورخ ۱۳۸۷/۱۰/۱۰ مدت: ۱۵۰ دقیقه دانشکده‌ی علوم ریاضی

تذکر: در طول آزمون به هیچ پرسشی پاسخ داده نمی‌شود. برخی از فرمول‌ها پشت ورقه قید شده‌اند.

---

۱) الف) به روش درونیابی مناسب یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ مانند $P_2(x)$ بیابید که به ازای $x = 0, 1, 2$ داشته باشیم $P_2(x) = \sin(\frac{\pi\ x}{2})$. سپس با استفاده از $P_2(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ مانند $P_3(x)$ به دست بیاورید که به ازای $x = 0, 1, 2, 3$ داشته باشیم $P_3(x) = \sin(\frac{\pi\ x}{2})$. (۲۵ نمره)

ب) بیشترین مقدار $|\sin(\frac{\pi x}{2}) - P_2(x)|$ را بر بازه‌ی $[0, 2]$ بر اساس فرمول خطا به دست آورید. (۲۰ نمره)

۲) الف) ثابت‌های x_1, x_0, c_0 را به قسمی بیابید که تقریب زیر برای چندجمله‌ای‌ها تا بیشترین درجه‌ی ممکن دقیق باشد. (۲۰ نمره)

$$\int_0^1 f(x)\ dx \approx \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

ب) برای محاسبه‌ی $\int_0^1 \sinh(\frac{\pi\ x^2}{2})\ dx$ به روش سیمپسون با حداکثر خطای 10^{-3} بازه‌ی $[0, 1]$ را باید دست‌کم به چند زیربازه تقسیم کنیم؟ به روش ذوزنقه چطور؟ (۲۵ نمره)

۳) اگر $y = y(x)$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ با شرط اولیه‌ی $y(1) = 0$ باشد؛ با استفاده از روش رانگ — کوتای چهار مرحله‌ای مطلوب است مقدار تقریبی $y(1/2)$ (محاسبات میانی با دقت $5D$ انجام شود). (۲۰ نمره)

دانشجویانی که پروژه ندارند فقط به یکی از پرسشهای زیر پاسخ دهند.

۴) برنامه‌ای به زبان C بنویسید که‌برای $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ مقادیر $f'(x_0)$ و $f''(x_0)$ را به ازای $x_0 > 0$ و h ورودی با فرمول‌های زیر تقریب بزند. (۱۰ نمره)

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]\ \ ,\ \ f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)]$$

′۴) جدول زیر را به کمک روش ذوزنقه— رامبرگ برای محاسبه‌ی $\int_1^{1/5} e^{-x^2}\ dx$ تکمیل کنید. (۱۰ نمره)

$Y_{0,k}$	$Y_{1,k}$	$Y_{2,k}$	$Y_{3,k}$
۰/۱۱۸۳۱۹۶			
۰/۱۱۱۵۶۲۷	۰/۱۰۹۳۱۰۴		
....	....	....	
۰/۱۰۹۵۰۰۹	....	۰/۱۰۹۳۶۰۸	....

تاریخ تحویل پروژه‌ی گروه‌های ۲ و ۳ (دکتر مختاری و دکتر تاتاری) آخر وقت اداری یکشنبه ۸۷/۱۰/۱۵ می‌باشد.

موفق باشید

$$y_0 + q\frac{(\Delta y_{-1} + \Delta y_0)}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1})}{2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\frac{(\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2})}{2} + \ \dots$$

$$y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) y_k$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

$$p(x) = f_0 + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_j](x-x_0)\cdots(x-x_{j-1}), \quad f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i},$$

$$f[x_i, \cdots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \cdots, x_{i+j}] - f[x_i, \cdots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \qquad x_0 \le c \le x_n$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + \dots + y_{N-1}) + y_N)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + \dots + y_{N-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{N-1}) + y_N)$$

$$E_s = \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(c), \quad a \le c \le b \qquad E_t = \frac{b-a}{12}h^2 f''(c), \quad a \le c \le b$$

$$k_1 = hf_1(t_n, x_n, y_n) \qquad l_1 = hf_2(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf_1(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}) \qquad l_2 = hf_2(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2})$$

$$k_3 = hf_1(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}) \qquad l_3 = hf_2(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2})$$

$$k_4 = hf_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3) \qquad l_4 = hf_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$w_{n+1} = w_n + hf(x_n, w_n) + \ \dots\ + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_n, w_n)\ , \quad w_0 = y_0$$

$$P_0(x) = 1\ , \quad P_1(x) = x\ , P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\ x\ P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad Y_{p,k} = \frac{4^p Y_{p-1,k+1} - Y_{p-1,k}}{4^p - 1}$$

$$k_1 = hf(x_n, w_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, w_n + k_3)$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$