Arch. Math. 78 (2002) 155–161
0003-889X/02/020155-07 $ 2.90/0

Sonderdruck aus
Archiv der Mathematik

Existenzbedingungen für Dualitäten projektiver Ebenen

Von

GÜNTER PICKERT

Dem Gedenken an Helmut Wielandt gewidmet († 14.02.2001)

Abstract. In a projective plane a permutation of the set of all points and lines is constructed, using only the operations join and meet. Under certain conditions (identities in a coordinatizing ternary field; special cases of Desargues- and Pappos-theorem) this permutation is a duality. For a topological projective plane this duality proves, that point space and line space of the plane are homeomorphic.

In einer projektiven Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, \mathrm{I})$ – dabei seien die Punktmenge $\mathscr{P}$ und die Geradenmenge $\mathscr{G}$ als elementefremd vorausgesetzt, und I bezeichnet die Inzidenzrelation – ist eine *Dualität*, d.h. ein Isomorphismus der Ebene auf die duale Ebene $(\mathscr{G}, \mathscr{P}, \mathrm{I}^{-1})$, eine Permutation δ von $\mathscr{P} \cup \mathscr{G}$ mit $\mathscr{P}^\delta = \mathscr{G}, \mathscr{G}^\delta = \mathscr{P}$ und

(1) $$P \,\mathrm{I}\, g \Rightarrow g^\delta \,\mathrm{I}\, P^\delta;$$

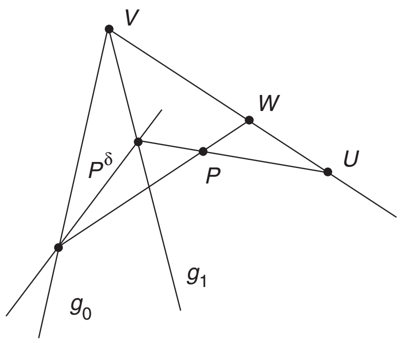
diese Bedingung gilt dann bekanntlich auch mit $\Leftrightarrow$ (statt $\Rightarrow$), so daß δ^{-1} ebenfalls eine Dualität ist.

Um allein mit den Operationen des Verbindens und Schneidens erst einmal eine Bijektion δ einer möglichst großen Teilmenge von $\mathscr{P}$ auf eine Teilmenge von $\mathscr{G}$ herzustellen, bietet es sich an, einen Punkt P von zwei Zentren aus auf jeweils eine Gerade g_0 bzw. g_1 zu projizieren und die beiden Projektionen zur Bildgeraden P^δ zu verbinden (s. Fig. 1). Im Vorgriff auf die spätere Koordinatisierung werden die Projektionszentren mit W, U und der Schnittpunkt von g_0, g_1 mit V bezeichnet. Um die Injektivität zu wahren, muß man U, V, W als kollinear voraussetzen. Man erhält so δ als Bijektion der Menge der nicht auf der Verbindungsgerade UV liegenden Punkte auf die Menge der nicht durch V gehenden Geraden. Nach Wahl eines Punktes $O \neq V$ auf g_0 und mit E als Schnittpunkt von OW mit g_1 werden dann in bekannter Weise (s. z.B. [2], 1.5) die Menge der Punkte $\neq V$ auf g_0 $(= OV)$ als Koordinatenbereich K eingeführt, die Punkte der affinen Ebene (mit UV als uneigentlicher Geraden) durch die $(x, y) \in K \times K$ bezeichnet, die uneigentlichen Punkte durch (u) $(u \in K)$, die nicht durch V gehenden Geraden durch $[u, v]$ und die übrigen Geraden $\neq UV$ durch $[w]$ $(w \in K)$ (s. Fig. 2). Durch die gemäß

(2) $$(x, y) \,\mathrm{I}\, [u, v] \Leftrightarrow y = T(u, x, v)$$

eingeführte ternäre Verknüpfung T wird K zu dem *Ternärkörper* bez. O, E, U, V, für dessen Null- und Einselemente $0, 1$ dann $O = (0, 0)$, $E = (1, 1)$, $g_0 = [0]$, $g_1 = [1]$, $OE = [1, 0]$,

Mathematics Subject Classification (2000): 51A10.



Figur 1. Konstruktion von δ

$U = (0)$, $W = (1)$ sowie $x = (0, x)$ $(x \in K)$ gilt. *Addition* und *Multiplikation* in K mit den neutralen Elementen 0 bzw. 1 werden durch

$$a + b = T(1, a, b), \quad ab = T(a, b, 0)$$

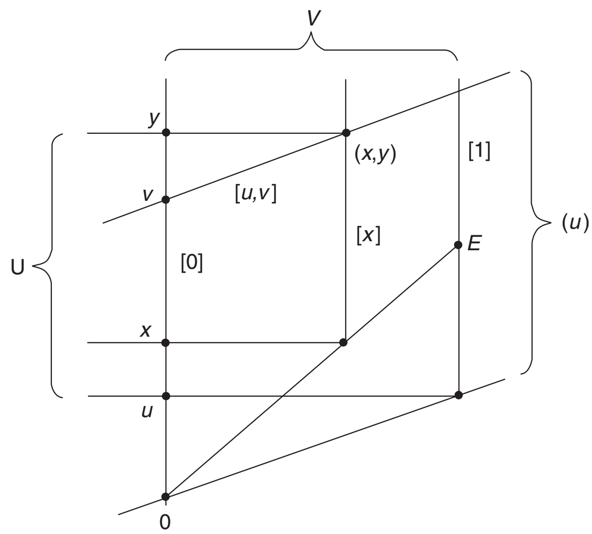
definiert, so daß für die Geraden $[1, v]$ durch W

(3) $\qquad (x, y)\,\mathrm{I}\,[1, v] \Leftrightarrow y = x + v$

gilt.

Die für die affinen Punkte (x, y) mittels g_0, g_1, U, W (bestimmt durch O, E, U, V) eingeführte Bijektion δ läßt sich gemäß (2,3) beschreiben durch

(4) $\qquad (x, y)^\delta = [u, v]$ mit $x + v = y = T(u, 1, v)$.



Figur 2. Koordinatisierung

Insbesondere ergibt sich

(4_0) $\quad (0, y)^\delta = [0, y] \in (0),$

(4_1) $\quad (1, y)^\delta = [1, v] \in (1) \quad \text{mit } 1 + v = y.$

Es stellen sich nun die folgenden beiden Aufgaben:
I. Unter Voraussetzung von (1) ist δ zu einer Permutation von $\mathscr{P} \cup \mathscr{G}$ fortzusetzen; d.h. man muß V^δ, $(u)^\delta$, $[u, v]^\delta$, $[w]^\delta$, UV^δ geeignet definieren.
II. Man hat die Bedingungen aufzustellen, unter denen die so definierte Abbildung δ die Bedingung (1) erfüllt, also eine Dualität der Ebene ist.

Zu I. Aus $(1, 4_0, 4_1)$ erhält man

(5_0) $\quad [0]^\delta = (0),$

(5_1) $\quad [1]^\delta = (1).$

Da nach (4_0) die Punkte $\neq V$ von [0] durch δ in die sämtlichen Geraden $\neq UV$ durch U übergehen, muß

(6) $\quad V^\delta = UV$

sein. Nach der Konstruktion von δ sind die $(x, 0)^\delta$ die sämtlichen Geraden $\neq [1]$ durch $(1, 0)$; daher muß

(7_0) $\quad (0)^\delta = [1]$

sein. Entsprechend sind die $(x, x)^\delta$ die sämtlichen Geraden $\neq [0]$ durch O, so daß

(7_1) $\quad (1)^\delta = [0]$

folgt. Da wegen (1) bei Anwenden von δ sich Verbinden und Schneiden vertauscht, erhält man aus $UV = UW$ und $V \,\mathrm{I}\, [0], [1]$

(7_2) $\quad UV^\delta = V.$

Da $[w]$, [0], [1] kopunktal sind, müssen wegen $(1, 5_0, 5_1)$ $[w]^\delta$, (0), (1) kollinear sein. Da wegen $[w] \neq UV$ und (7_2) $[w]^\delta \neq V$ ist, gibt es also u mit $[w]^\delta = (u)$.

Für $w \neq 0, 1$, $P = (w, w)$, $Q \,\mathrm{I}\, [w]$ hat man in der affinen Ebene also $P^\delta \| Q^\delta$, so daß sich ein im folgenden als ID_{OEUV} bezeichneter Spezialfall des Desarguesschen (V, UV)-Satzes ergibt (s. Fig. 3). Nach der Konstruktion von δ geht P^δ durch $(1, w)$, und man hat

$$(x, y) \,\mathrm{I}\, P^\delta \Leftrightarrow y = ux,$$

so daß man $u = w$, also in Verallgemeinerung von $(5_{0,1})$ für alle $w \in K$

(8) $\quad [w]^\delta = (w)$

erhält. $P^\delta \| Q^\delta$ liefert gemäß Fig. 3

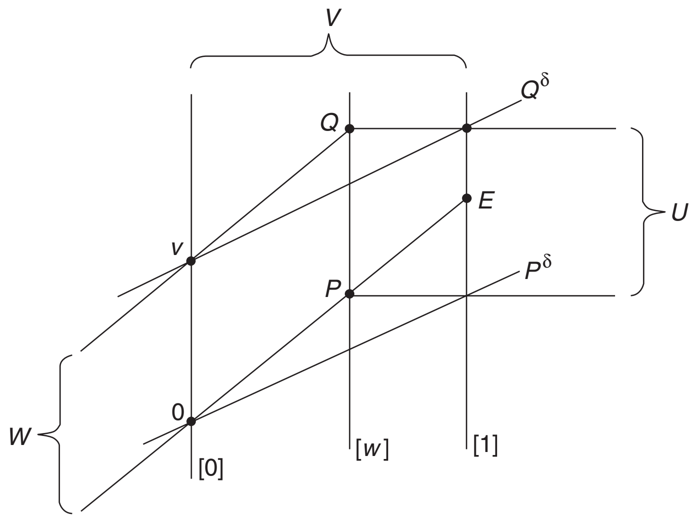
(9) $\quad w + v = T(w, 1, v)$

als die Ternärkörperformulierung für ID_{OEUV}. Mittels (9) läßt sich (4) vereinfachen zu

$(4')$ $\quad (x, y)^\delta = [x, z] \quad \text{mit } x + z = y.$

Wegen (6) liegt $[u, v]^\delta$ nicht auf UV. Man hat also $x', y' \in K$ mit $[u, v]^\delta = (x', y')$ zu bestimmen. Nach $(1, 4')$ muß für alle $x, z \in K$

(10) $\quad x + z = T(u, x, v) \Rightarrow y' = T(x, x', z)$



Figur 3. $\mathbf{ID}_{OEUV}$

gelten. Für $x = 0$ folgt daraus $y' = v$. Wegen $(u)\,\mathrm{I}\,[u, v]$ hat man $(x', y')\,\mathrm{I}\,(u)^\delta$, und $(u)^\delta$ muß die Gerade $[x']$ sein, unabhängig von v. Mit $y' = v = 0$, $x = 1$ und w statt z erhält man aus (10)

$$1 + w = u \Rightarrow 0 = x' + w.$$

Daher hat man (mit u' statt x')

(11) $$[u, v]^\delta = (u', v), \quad (u)^\delta = [u'] \quad \text{mit } 0 = u' + w, \quad 1 + w = u.$$

Durch ($4'$, 6, 7_2, 8, 11) ist δ als Permutation von $\mathscr{P} \cup \mathscr{G}$ mit $\mathscr{P}^\delta = \mathscr{G}$, $\mathscr{G}^\delta = \mathscr{P}$ bei gegebenen O, E, U, V bestimmt; sie wird im folgenden als δ_{OEUV} bezeichnet, wenn die Festlegung durch die 4 Punkte besonders betont werden soll.

Zu II. Man hat hier (1) in den 9 kombinatorisch möglichen Fällen für $P\,\mathrm{I}\,g$ (es gibt je 3 Sorten von Punkten und Geraden) nachzuprüfen. Die drei Fälle $(x, y)\,\mathrm{I}\,UV$, $V\,\mathrm{I}\,[u, v]$, $(u)\,\mathrm{I}\,[w]$ können als falsch ausgeschlossen werden. In den 5 Fällen $(x, y)\,\mathrm{I}\,[w]$, $(u)\,\mathrm{I}\,[u, v]$, $(u)\,\mathrm{I}\,UV$, $V\,\mathrm{I}\,[w]$, $V\,\mathrm{I}\,UV$ ergibt sich (1) bzw. aus ($4'$, 8), (11), (7_2, 11), (6, 8), (6, 7_2). Es bleibt also nur noch $(x, y)\,\mathrm{I}\,[u, v]$ nachzuprüfen. (1) besagt hier wegen (11) entsprechend zu (10)

(12) $$x + z = T(u, x, v), \quad 1 + w = u, \quad 0 = u' + w \quad \Rightarrow \quad v = T(x, u', z).$$

Diese Bedingung ist zusammen mit (9) also notwendig und hinreichend dafür, daß δ eine Dualität ist. Um die recht undurchsichtige Bedingung (12) verwendungsfähiger zu machen, wird die (notwendige) Bedingung ID_{OEUV} durch den stärkeren (V, UV)-Desargues-Satz ersetzt. Dann erhält man

Satz 1. *Unter Voraussetzung des (V, UV)-Desargues-Satzes ist δ_{OEUV} genau eine Dualität, wenn im Ternärkörper bez. O, E, U, V für alle $u, x \in K$*

(13) $$-ux + x = x(-u + 1)$$

gilt. Diese Bedingung ist besonders dann erfüllt, wenn der Ternärkörper ein kommutativer Quasikörper ist.

B e w e i s. Bekanntlich (s. z.B. [2], 3.5) folgen aus dem (V, UV)-Desargues-Satz sowohl die Linearität $T(u, x, v) = ux + v$ von T wie die Gruppeneigenschaft von $(K, +)$. Die Voraussetzungen in (12) lassen sich daher als

$$-ux + x = v - z, \quad u' = -u + 1$$

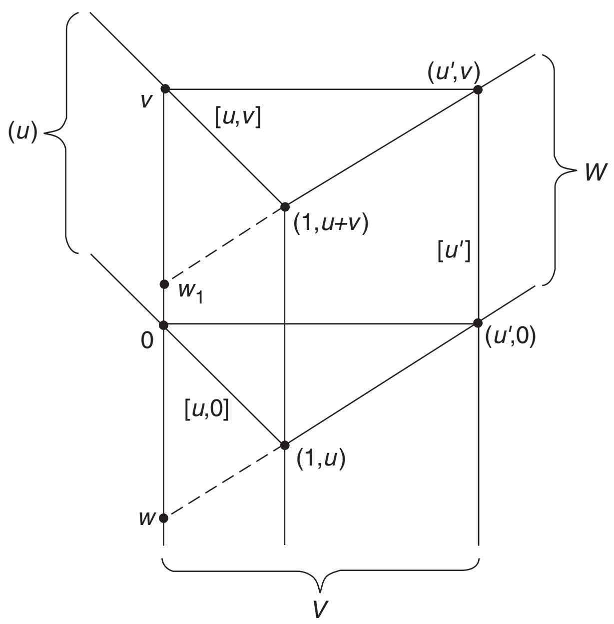
und die Folgerung als $v - z = xu'$ schreiben, so daß (12) tatsächlich zu (13) wird. Übrigens schreibt sich (4′) jetzt einfach als $(x, y)^\delta = [x, -x + y]$ und (11) als $[u, v]^\delta = (-u + 1, v)$, $(u)^\delta = [-u + 1]$.

Um die Bedingung (12) durchsichtiger zu machen wird sie im folgenden als mit Schließungssätzen äquivalent festgestellt. Man sieht leicht, daß (12) für die 3 Fälle $u = 0$, $u = 1$, $x = 0$ bereits mittels (9) folgt. Man darf also im folgenden $x \neq 0$, $u \notin \{0, 1\}$ voraussetzen. Im Fall $x = 1$ wird (12) zu

$$(12_1) \qquad 1 + w_1 = u + v, \quad 1 + w = u, \quad 0 = u' + w \quad \Rightarrow \quad v = u' + w_1.$$

An Hand von Fig. 4 erkennt man, daß dies – ebenso wie (9) – einen Spezialfall des (V, UV)-Desargues-Satzes bedeutet, der im folgenden als ID'_{OEUV} bezeichnet wird. Man hat dann auch

$$(12'_1) \qquad 1 + w_1 = u + v, \quad 1 + w = u, \quad v = u' + w_1 \quad \Rightarrow \quad 0 = u' + w;$$



Figur 4. ID'_{OEUV}

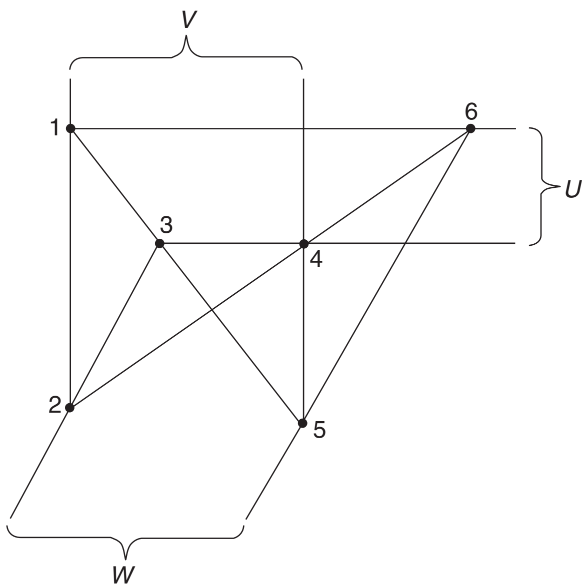
denn bestimmt man u'' durch $u'' + w = 0$, so ergeben die beiden ersten Voraussetzungen in $(12'_1)$ nach (12_1) $v = u'' + w_1$, was zusammen mit der dritten Voraussetzung in $(12'_1)$ gerade $u'' = u'$ liefert. Wegen $(12_1, 12'_1)$ darf man in (12) $1 + w = u$, $0 = u' + w$ durch $1 + w_1 = u + v$, $v = u' + w_1$ ersetzen. Mit dieser Änderung ergibt (12) dann den in Fig. 5 dargestellten Schließungssatz, wobei mit 1 bis 6 die Punkte v, z, $(x, x+z)$, $(1, x+z)$, $(1, 1+w_1)$, (u', v) bezeichnet sind. Da 1, 3, 5 sowie 2, 4, 6 jeweils kollinear sind, erkennt man in diesem Schließungssatz einen – im folgenden mit IP_{OEUV} bezeichneten Spezialfall des (affinen) Satzes von Pappos mit den 3 Festpunkten U, V, W und den 2 Festgeraden OV, EV (12, 45 in der Figur). Damit erhält man den

Satz 2. *δ_{OEUV} ist genau dann eine Dualität, wenn die Schließungssätze ID_{OEUV}, ID'_{OEUV}, IP_{OEUV} gelten.*

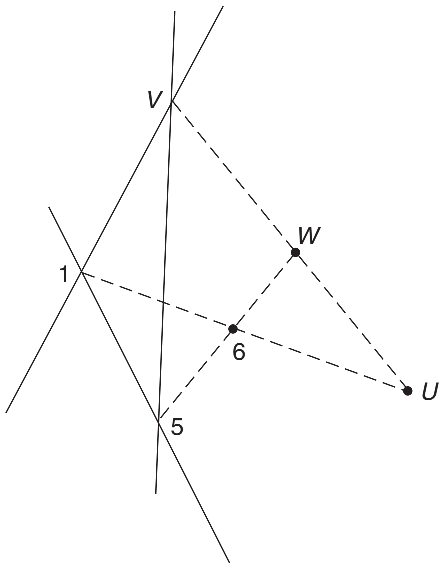
Wählt man in Fig. 5 auf der Geraden 15 einen vierten Punkt $3'$ und bestimmt zu diesem die Punkte $2'$, $4'$ (entsprechend 2, 4), so erhält man eine interessante Konfiguration mit den 12 Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, $2'$, $3'$, $4'$, U, V, W und den 12 Geraden (jeweils durch ihre Konfigurationspunkte angegeben) $122'V$, $44'5V$, $133'5$, $16U$, $23W$, $34U$, 246, $2'3'W$, $3'4'U$, $2'4'6$, $56W$, UVW.

Die ersten 3 Geraden haben die Ordnung 4, alle anderen die Ordnung 3. Entsprechend gehen nur durch die Punkte 6, U, W jeweils 4 Geraden. Die Verbindungsgeraden $6U$, UW, $W6$ gehen durch die Schnittpunkte 1, 5, V der 3 Geraden der Ordnung 4 (s. Fig. 6)!

Bei topologischen projektiven Ebenen hat man den Satz (s. [1], Prop. 3.5; dort allgemeiner für topologische Polygone bewiesen): Ist die Einschränkung einer Kollineation auf eine



Figur 5. IP_{OEUV}



Figur 6. Die 6 Elemente der Ordnung 4

Punktreihe ein Homöomorphismus, so gilt dies auch für die Kollineation. Wendet man diesen Satz auf eine topologische projektive Ebene und ihre duale Ebene an, so ergibt sich

Satz 3. *Gibt es in einer topologischen projektiven Ebene ein nichtausgeartetes Punktequadrupel* (O, E, U, V) *derart, daß* δ_{OEUV} *eine Dualität ist, so sind Punkt- und Geradenraum der Ebene homöomorph.*

Zum Beweis braucht man nur zu beachten, daß nach Konstruktion von δ_{OEUV} die Einschränkung dieser Dualität auf die Punktreihe der Geraden OV die Perspektivität auf das Geradenbüschel durch U und damit nebst Umkehrung stetig ist.

Literaturverzeichnis

[1] R. Bödi and L. Kramer, On Homomorphisms Between Generalized Polygons. Geom. Dedicata **58**, 1–14 (1955).
[2] G. Pickert, Projektive Ebenen, 2.Aufl. Berlin–Heidelberg–New York 1975.

Eingegangen am 8. 5. 2000

Anschrift des Autors:

Günter Pickert
Mathematisches Institut
der Justus-Liebig-Universität
Arndtstr. 2
35392 Gießen