به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

آزمون پایان ترم هندسه دیفرانسیل

مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه ۱۳۹۱/۱۰/۲۶

۱. (۴۰ نمره) نگاشت $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$ با $\mathbf{x}(x,y) = (x+y, x-y, \frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲))$ مفروض است.

الف) فرم‌های اساسی اول و دوم این رویه را در نقطه‌ی دلخواه به دست آورید.

ب) با ذکر دلیل مشخص کنید آیا خم با ضابطه‌ی $\alpha(t) = \mathbf{x}(t,t) = (۲t, ۰, t^۲)$ یک ژئودزیک است؟ خمیدگی نرمال این خم در $P = (۲, ۰, ۱)$ چیست؟

ج) نگاشت واینگارتن و $R^۱_{۲۱۲}$ را در $P = (۲, ۰, ۱)$ محاسبه کنید.

د) جهت‌های اصلی رویه را در $P = (۲, ۰, ۱)$ به دست آورید.

۲. (۱۰ نمره) نشان دهید فرم اساسی سوم، $III = \langle d\mathbf{n}, d\mathbf{n}\rangle$ مستقل از پارامتری‌سازی رویه است. آیا فرم اساسی سوم ذاتی است؟ چرا؟

۳. (۲۰ نمره) فرض کنید M یک رویه‌ی ساده نظیر نگاشت $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^۳$ باشد و $P \in M$. همچنین فرض کنید L نگاشت واینگارتن در P و $\mathbf{n}$ نگاشت نرمال رویه در این نقطه باشد.

الف) نشان دهید برای $i = ۱, ۲$ داریم $L(\mathbf{x}_i) = -\mathbf{n}_i$.

ب) اگر K خمیدگی گاوسی رویه در P باشد، ثابت کنید $\mathbf{n}_۱ \times \mathbf{n}_۲ = K(\mathbf{x}_۱ \times \mathbf{x}_۲)$.

«موفق باشید»

چند فرمول که ممکن است در محاسبات مورد استفاده قرار گیرند:

$$K = \frac{\sum R^l_{۱۲۱} g_{l۲}}{\det(g_{ij})} = \frac{\det\ II}{\det\ I}$$

$$R^l_{ijk} = L_{ik}L^l_j - L_{ij}L^l_k \qquad L_{ij} := \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{n}\rangle$$

$$۰ = \det(L - \lambda I) = \lambda^۲ - (\text{trace } L)\ \lambda + \det L$$

$$II(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \textstyle\sum_{i,j} L_{ij} u^i v^j$$

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} + \sum(\Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{ij}\Gamma^l_{pk})$$

$$L^l_k = \textstyle\sum L_{ik} g^{il} \qquad \kappa_n(s) := \langle \alpha''(s), \mathbf{n}(\alpha^۱(s), \alpha^۲(s))\rangle$$

$$\mathbf{x}_{ij} = L_{ij}\mathbf{n} + \textstyle\sum_k \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k$$

$$\kappa_n = \textstyle\sum_{i,j} L_{ij}(\alpha^i)'(\alpha^j)' = II(\mathbf{T}, \mathbf{T})$$

$$\kappa_n = \frac{II(\dot\alpha, \dot\alpha)}{I(\dot\alpha, \dot\alpha)} \qquad \kappa(s)\mathbf{N}(s) = \alpha''(s) = \kappa_n(s)\mathbf{n}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{S}(s)$$