به نام پروردگار یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

مباحثی در آنالیز عددی

درونیابی به روش اسپلاین مکعبی

پاییز ۱۳۹۲

گردآوری و تنظیم: دکتر سید قهرمان طاهریان.

دیباچه

این مجموعه برگرفته از سمینارهای دانشجویان کارشناسی‌ارشد رشته‌ی نساجی و برخی از پروژههای دانشجویان کارشناسی رشته‌های فنی دانشگاه صنعتی اصفهان است. مراجع اصلی ما چاپ هفتم کتاب Numerical Analysis تالیف آقایان Richard L. Burden و J. Douglas Fairies و چاپ دوم کتاب An Introduction to Numerical Analysis تالیف آقایان Stoer و Bulirsch بوده است. هدف از این مجموعه آشنایی دانشجویان با بخش کوچکی از کاربردهای بسیار گسترده و روزافزون روش‌های عددی در علوم فنی و مهندسی است. متاسفانه این درس در دوره‌های کارشناسی جدی گرفته نمی‌شود. در دوره‌های تکمیلی هم یک بحث حاشیه‌ای و تجملی محسوب می‌شود. برای تمامی محققین واقعی رشته‌های فنی و مهندسی روشن است که امروزه تحقیق ارزشمند و جدی بدون بینش عددی و استفاده‌ی صحیح از روش‌های عددی امکان‌پذیر نیست. امیدوارم این جزوه‌ی کوچک آغازی باشد برای ارج نهادن بر این ابزار پرقدرت تحقیقات علمی بویژه در بین مهندسین گرانقدری که آینده‌ی درخشان کشور عزیزمان در دست آنهاست. از همه‌ی دانشجویان عزیزی که در تهیه‌ی این جزوه باتمام توانشان زحمت کشیدند و با بردباری زیاد وسواسها و ایرادات مرا به کار پر ارزش خود پذیرفتند صمیمانه سپاسگزارم. امیدوارم بیشتر این بزرگواران را در آینده‌ی نزدیک در زمره‌ی محققین برجسته ببینیم. بدیهی است جز ذات یکتای پروردگار که آفرینشگر بی‌عیب است، چیز بی عیب و نقص وجود ندارد. دیدگاه‌های همکاران و دانشجویان گرامی را در بهبود و کاستن از عیوب این جزوه به دیده‌ی منت ارج مینهیم.

خرداد ماه ۱۳۸۷. دکتر سید قهرمان طاهریان.

فصل ۱

درونیابی به روش اسپلاین مکعبی

روش‌های مختلفی برای درونیابی یک تابع در یک بازه وجود دارد که هر یک نسبت به بقیه مزایا و معایبی دارند. تقریب یک تابع دلخواه روی یک بازه‌ی بسته به دلیل طبیعت نوسانی چندجمله‌ای‌های درجه بالا می‌تواند خطای زیادی داشته باشد. علاوه‌بر این تغییر کوچک تابع در یک زیر بازه می‌تواند تأثیر زیادی در چندجمله‌ای درون‌یاب داشته باشد. به همین دلایل در عمل ترجیح داده می‌شود که بازه را به زیربازه‌های کوچک تقسیم کرده و تا جای ممکن درجه‌ی چندجمله‌ای درون‌یاب را کاهش دهند. این رهیافت تقریب قطعه به قطعه با چندجمله‌ای‌ها نامیده می‌شود. ساده‌ترین این چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های خطی (درجه یک) هستند. نمودار این توابع یک خط شکسته است که مجموعه‌ی نقاط $(x_۰, y_۰), (x_۱, y_۱), \ldots$ و (x_n, y_n) را به‌هم وصل می‌کند. یکی از معایب این روش عدم مشتق‌پذیری در انتهای زیربازه‌ها می‌باشد. تعبیر هندسی این مطلب همان عدم همواری نمودار است. ولی در بیشتر موارد همواری تابع مشخص است و تابع درون‌یاب نیز باید هموار باشد.

رهیافت دیگر برای درونیابی، استفاده از چندجمله‌ای‌های هرمیت می‌باشد. برای مثال اگر مقادیر تابع و مشتق آن برای نقاط $x_n > \ldots > x_۱ > x_۰$ معلوم باشند، می‌توان از چندجمله‌ای درجه ۳ هرمیت در بازه‌های $[x_۰, x_۱]$، ...، $[x_{n-۱}, x_n]$ استفاده کرد. در این صورت یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته روی هر زیر بازه مانند $[x_i, x_{i+۱}]$ به‌دست می‌آید. در این رهیافت با مسأله‌ی تعیین ضرایب $H_۳(x)$ روبه‌رو هستیم. اما برای درون‌یابی عمومی نیاز به تقریب مشتق تابعی داریم که ممکن است به‌سادگی قابل محاسبه نباشد.

رهیافتی که در این نوشتار مورد بحث قرار می‌گیرد، به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای است. با این روش به استثنای نقاط انتهایی بازه که تابع در آن باید درون یابی شود نیازی به استفاده از مشتق نیست. ساده‌ترین نوع توابع چندجمله‌ای با ویژگی‌های فوق، چندجمله‌ای درجه ۳ در بازه‌های متوالی هستند. به‌عبارت دیگر در بازه‌ی $[x_۰, x_۱]$ یک چندجمله‌ای درجه ۳ می‌سازیم که مقدار آن

در x_0 و x_1 با مقدار تابع یکی باشد. روی بازه‌ی $[x_1, x_2]$ چندجمله‌ای درجه ۳ دیگری می‌سازیم که در نقاط x_1 و x_2 مقدار آن با مقدار تابع یکسان باشد. با ادامه‌ی این روند، درنهایت روی کل بازه تابع چندجمله‌ای درون‌یاب، قطعه به قطعه مشخص می‌شود.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده و $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ زیر مجموعه‌ای از نقاط $[a,b]$ باشد. یک **درون‌یاب اسپلاین مکعبی** برای f تابعی مانند S است که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) S یک چندجمله‌ای درجه ۳ است. برای سادگی به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n-1$ تابع S را بر زیربازه‌ی $[x_j, x_{j+1}]$ با S_j نمایش می‌دهیم.

(۲) به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n$، $S(x_j) = f(x_j)$.

(۳) به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n-2$، $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$.

(۴) به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n-2$، $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$.

(۵) به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, n-2$، $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$.

(۶) یکی از شرایط مرزی زیر نیز برقرار می‌باشد.
i) شرایط مرزی آزاد $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.
ii) شرایط مرزی مقید $S'(x_n) = f'(x_n),\ S'(x_0) = f'(x_0)$.

یک چندجمله‌ای درجه ۳ در حالت کلی به شکل زیر است.

$$S(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

برای چند جمله‌ای‌های مکعبی اسپلاین ثابت‌های d, c, b, a مجهولات هر بازه را تشکیل می‌دهند. شرط (۱) برای به دست آوردن مجهولات معادله‌ای فراهم نمی‌آورد. شرط (۲) تعداد $n+1$ معادله، شرط (۳) تعداد $n-1$ معادله، شرط (۴) تعداد $n-1$ معادله و شرط (۵) تعداد $n-1$ معادله را برای حل معادلات فراهم می‌آورد. با اعمال هر یک از شرایط i) و ii) نیز می‌توان دو معادله‌ی دیگر به معادلات افزود. در این صورت یک دستگاه $4n$ معادله و $4n$ مجهول به دست می‌آید. ضرایب چندجمله‌ای در هر زیربازه و چندجمله‌ای اسپلاین مکعبی با حل این دستگاه به‌دست می‌آیند.
حال به ساختن درون‌یاب اسپلاین مکعبی برای تابع f می‌پردازیم. از شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S_j(x) &= a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \\ S_j(x_j) &= a_j = f(x_j) \end{aligned}$$

از شرط (۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \end{aligned}$$

همچنین از $a_n = f(x_n)$ و $h_j = x_{j+1} - x_j$ نتیجه می‌شود

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \tag{1}$$

از سوی دیگر $b_n = S'(x_n)$. پس

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

از شرط (۴) نتیجه می‌شود

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \tag{2}$$

از یک طرف می‌دانیم $c_n = \frac{S''(x_n)}{2}$.

از طرف دیگر بنابر شرط (۵)

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \tag{3}$$

با به‌دست آوردن d_j از معادله‌ی (۳) و قرار دادن آن در معادله‌ی (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{4}$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \tag{5}$$

از رابطه‌ی (۴) مقدار b_j را محاسبه کرده و در رابطه‌ی (۵) قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) & (6) \\ b_{j+1} &= \frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) + h_j(c_j + c_{j+1}) \end{aligned}$$

از تبدیل j به $j - 1$ در فرمول (۶) نتیجه می‌شود

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j) \tag{7}$$

با قرار دادن معادله‌های (۶) و (۷) در معادله‌ی (۵) با اندیس مناسب یعنی $b_j = b_{j-1} + h_{j-1}(c_{j-1} + c_j)$ می‌توان نوشت

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \tag{8}$$

آنچه به دست آمد در قضیه‌ی ۱.۱ قابل جمع‌بندی است.

قضیه ۱.۱ هرگاه تابع f در نقاط $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ تعریف شده باشد، آنگاه همواره به ازای نقاط گره $x_1, \ldots, x_n$ دارای درون‌یاب اسپلاین مکعبی منحصر به فرد S است به قسمی که S در شرط مرزی آزاد $S''(a) = S''(b) = 0$ صدق می‌کند.

در واقع برای به دست آوردن پارامترهای اسپلاین مکعبی ماتریس سه‌قطری زیر به دست می‌آید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سطر اول این ماتریس ضرایب c_{j-1}، c_j و c_{j+1} در سمت چپ معادله (۸) به‌ازای $j = 0, \ldots, n-1$ می‌باشند. با حل دستگاه $Ax = b$ به ازای x و b به صورت زیر ضرایب فوق به دست می‌آیند.

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

الگوریتم اسپلاین مکعبی با شرایط مرزی آزاد

ورودی: $x_0, x_1, \ldots, x_n, a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \ldots, a_n = f(x_n)$.

خروجی: a_j, b_j, c_j, d_j برای $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

گام ۱) برای $i = 0, 1, \ldots, n-1$ قرار دهید $h_i = x_{i+1} - x_i$.

گام ۲) برای $i = 1, 2, \ldots, n-1$ قرار دهید

$$\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}).$$

۳) قرار دهید ۱ = l_0، ۰ = μ_0 و ۰ = z_0.
گام ۴) برای ۱ − $i = 1, 2, \ldots, n$ قرار دهید

$$\begin{aligned}
l_i &= 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{j-1}\mu_{i-1} \\
\mu_i &= \frac{h_i}{l_i} \\
z_i &= (\alpha_i - h_{i-1} z_{i-1})/l_i
\end{aligned}$$

گام ۵) قرار دهید: ۱ = l_n، ۰ = z_n و ۰ = c_n.
گام ٦) برای ۰ ,… ,۲ − $j = n - 1, n$ قرار دهید:

$$\begin{aligned}
c_j &= z_j - \mu_j c_{j+1} \\
b_j &= (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3 \\
d_j &= (c_{j+1} - c_j)/3h_j
\end{aligned}$$

گام ۷) خروجی a_j, b_j, c_j, d_j برای ۱ − $j = 0, 1, \ldots, n$.
گام ۸) پایان.