فصل ۵

آنالیز برداری

آنالیز برداری یک ابزار کارآمد برای مدل کردن مفاهیم بنیانی فیزیک کلاسیک مانند میدان‌های نیرو، کار و امثال آن است. در این فصل به بررسی چند مفهوم بنیانی در آنالیز برداری مانند انتگرال‌های خطی، انتگرال روی رویه‌ها و قضیه‌های گرین، واگرائی و استوکس می‌پردازیم. انتگرال‌های خطی برای مدل کردن پدیده‌های فیزیکی مانند کار و محاسبه‌ی کمیت‌هائی مانند جرم اجسام ناهمگن منحنی شکل و امثال آنها به کار برده می‌شوند. به کمک انتگرال روی رویه‌ها مساحت بخشی از رویه‌ها را محاسبه می‌کنیم. یکی دیگر از مفاهیم مهم این فصل، مفهوم شار یک میدان نیرو و رابطه‌ی آن با دیگر مفاهیم آنالیز برداری است که در قضیه‌ی واگرائی گاوس به آن می‌پردازیم.

۵–۱ انتگرال خطی نوع اول

کار انجام شده روی یک خم به وسیله‌ی یک میدان نیرو مثال ساده‌ای از یک پدیده‌ی فیزیکی است که منجر به تعریف انتگرال خطی (نوع دوم) می‌شود. پیش از آن به نوع دیگری از انتگرال‌های خطی می‌پردازیم که برای محاسبه‌ی جرم اجسام ناهمگن منحنی‌شکل به کار می‌روند.

فرض کنیم خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B، نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^۲$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم تابع حقیقی (اسکالر) $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ روی C تعریف شده و پیوسته باشد.

هر افراز مانند $a=t_۰<t_۱<\dots<t_n=b$ روی $[a,b]$ نقاط $A=P_۰$، $P_۱$، $\cdots$ و $P_n=B$ را روی خم C مشخص می‌کند به قسمی که $P_i=\mathbf{r}(t_i)$. به ازای

$\Delta s_i := \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|$ حاصل جمع $\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i))\Delta s_i$ را حاصل جمع ریمان تابع f روی C متناظر با افراز فوق می‌نامیم. برای $(i=1,...,n)$، $\mu = \max \Delta s_i$ در صورت وجود $\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i))\Delta s_i$، تابع f را روی C انتگرال‌پذیر می‌نامیم. مقدار این حد را در صورت وجود **انتگرال خطی (منحنی‌الخط) نوع اول** تابع f روی C می‌نامیم و با نماد $\int_C f(x,y)ds$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که به ازای تابع ثابت ۱ مقدار $\int_C ds$ همان طول خم C است. به علاوه تعریف انتگرال خطی به گونه‌ای است که مقدار $\int_C fds$ مستقل از جهت منحنی C است. این نکته را در قسمت بعد نیز به طور دقیق‌تر نشان خواهیم داد.

به همین ترتیب برای خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B نظیر یک تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ و برای تابع حقیقی (اسکالر) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ که روی C تعریف شده و پیوسته باشد، انتگرال خطی نوع اول f روی C تعریف و با نماد $\int_C f(x,y,z)ds$ نمایش داده می‌شود.

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگینِ توابع برداری، برای یک $t_{i-1}\le \tau_i \le t_i$ می‌توان نوشت:

$$\Delta s_i = \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \|\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})\| = \|\mathbf{r}'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})\| = \|\mathbf{r}'(\tau_i)\|\Delta t_i$$

پس

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)ds &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i))\Delta s_i\\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i))\|\mathbf{r}'(\tau_i)\|\Delta t_i\\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt\\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\end{aligned}$$

به همین ترتیب $\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$.

مثال ۵-۱-۱ انتگرال خطی $\int_C \frac{ds}{x-y}$ را محاسبه کنید که در آن C پاره‌خط $\overline{PQ}$ با $P=(0,-3)$ و $Q=(6,0)$ است.

پاره‌خط $\overline{PQ}$ را می‌توان به ازای $0\le t\le 1$ به کمک تابع برداری $\mathbf{r}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ با

ضابطه‌ی $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = (۰, -۳) + t(٦, ۳) = ٦t\,\vec{i} + (۳t - ۳)\,\mathbf{j}$ بیان کرد. بنابر این $x(t) = ٦t$ و $y(t) = ۳t - ۳$. پس $x'(t) = ٦$ ، $y'(t) = ۳$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}\int_C \frac{ds}{x-y} &= \int_۰^۱ \frac{۱}{x(t)-y(t)}\sqrt{x'^۲(t)+y'^۲(t)}\;dt\\ &= \frac{\sqrt{۴۵}}{۳}\int_۰^۱ \frac{۱}{t+۱}\,dt = \sqrt{۵}\,\ln ۲\end{aligned}$$

مثال ۵–۱–۲ انتگرال خطی $\int_C xyz\;ds$ را محاسبه کنید که C مارپیچ $x = \sin t$ ، $y = \cos t$ و $z = t$ به ازای $۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ است.

از $x = \sin t$ ، $y = \cos t$ و $z = t$ نتیجه می‌شود $x' = \cos t$ ، $y' = -\sin t$ ، $z' = ۱$ و

$$\begin{aligned}\int_C xyz\;ds &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} x(t)y(t)z(t)\sqrt{x'^۲(t)+y'^۲(t)+z'^۲(t)}\;dt\\ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} t\sin t\cos t\;\sqrt{\sin^۲ t+\cos^۲ t+۱}\;dt\\ &= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} t\sin ۲t\;dt = \frac{\pi\,\sqrt{۲}}{۸}\end{aligned}$$

تعبیر فیزیکی انتگرال خطی نوع اول

یک میله را به شکل خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B در نظر می‌گیریم. فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^۳$ با معادلات پارامتری $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ و چگالی میله در هر نقطه $\rho(x,y,z)$ باشد. در این صورت برای محاسبه‌ی m ، جرم میله به کمک یک افراز روی $[a,b]$ و در نتیجه افرازی روی C با نمادگزاری به کار رفته در تعریف انتگرال خطی داریم

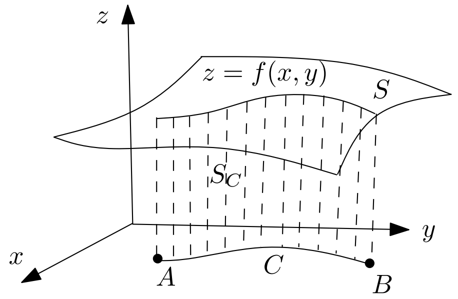
$$m = \lim_{\mu\to ۰}\sum_{i=۱}^{n}\Delta m_i = \lim_{\mu\to ۰}\sum_{i=۱}^{n}\rho(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\Delta s_i = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

تعبیر هندسی انتگرال خطی نوع اول

فرض کنیم C یک خم هموار با ابتدا و انتهای A و B واقع در صفحه xoy و S نمودار یک تابع دو متغیره‌ی $z = f(x,y)$ باشد که در یک همسایگی منحنی C تعریف شده است.

اگر S_C قسمتی از سطح استوانه‌ای با مولد C محدود به صفحه‌ی xoy و سطح S باشد ، نظیر افرازی از منحنی C و با نمادگزاری قبلی می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت}\ S_C = \lim_{\mu\to ۰} \sum_{i=۱}^{n} f(x(t_i), y(t_i))\Delta s_i = \int_C f(x,y)ds$$

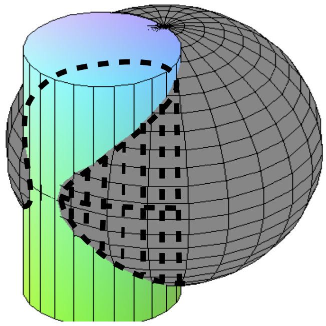


شکل ۵–۱ تعبیر هندسی انتگرال خطی نوع اول.

مثال ۵–۱–۳ مساحت قسمتی از سطح استوانه‌ای $x^۲ + y^۲ = ۲x$ را که به وسیله‌ی کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ جدا شده به دست آورید.

فرض کنیم C دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ به معادلات پارامتری $x = ۱ + \cos t$ و $y = \sin t$ به ازای $۰ \le t \le ۲\pi$ و $z = f(x,y) = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ باشد. در این صورت اگر σ مساحت مورد نظر باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
\sigma &= ۲\int_C f(x,y)ds \\
&= ۲\int_۰^{۲\pi} \sqrt{۴ - (\cos t + ۱)^۲ - \sin^۲ t}\ \sqrt{\sin^۲ t + \cos^۲ t}\ dt \\
&= ۲\sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi} \sqrt{۱ - \cos t}\ dt = ۴\int_۰^{۲\pi} |\sin\frac{t}{۲}|\ dt = ۱۶
\end{aligned}$$



شکل ۵–۲ مساحت بخشی از استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ که توسط کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ جدا شده است.

ویژگی‌های انتگرال خطی نوع اول

۱. اگر توابع اسکالر f و g روی خم C انتگرال‌پذیر باشند آنگاه به ازای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ تابع اسکالر $\lambda f + g$ نیز روی خم C انتگرال‌پذیر است و

$$\int_C (\lambda f + g) ds = \lambda \int_C f ds + \int_C g ds$$

۲. اگر تابع اسکالر f روی خم $C_۱$ بین نقاط A و B و روی خم $C_۲$ بین نقاط B و C انتگرال‌پذیر باشد آنگاه روی $C := C_۱ \cup C_۲$ بین نقاط A و C انتگرال‌پذیر است و

$$\int_C f ds = \int_{C_۱} f ds + \int_{C_۲} f ds$$

۵–۲ انتگرال خطی نوع دوم

رده‌ی مهمی دیگری از توابع روی زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ توابع برداری هستند. برای $D \subseteq^۲$ تابع $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^۲$ را که به هر نقطه از D یک بردار در صفحه نظیر می‌کند یک **میدان برداری** روی D می‌نامیم. در حالت کلی یک میدان برداری به شکل $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\ \mathbf{i} + Q(x,y)\ \mathbf{j}$ است که $P : D \to \mathbb{R}$ و $Q : D \to \mathbb{R}$ توابع حقیقی دو متغیره روی D هستند.

به همین ترتیب تابع $\mathbf{F} : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را که به هر نقطه از $\mathbb{R}^۳$ برداری در فضا نظیر می‌کند یک **میدان برداری در فضا** می‌نامیم. در حالت کلی یک میدان برداری در فضا به شکل $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ قابل بیان است که P ، Q و R توابع حقیقی سه متغیره هستند.

میدان برداری $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^۲$ را روی $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ **پیوسته** می‌نامیم هرگاه توابع P و Q بر D پیوسته باشند. میدان برداری $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^۲$ بر D **مشتق‌پذیر** است هرگاه توابع P و Q بر D مشتق‌پذیر باشند. پیوستگی و مشتق‌پذیری برای $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^۳$، ($D \subseteq \mathbb{R}^۳$) به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

فرض کنیم C یک خم هموار بین دو نقطه‌ی A و B ، نمودار تابع برداری $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^۲$ با معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم تابع برداری $\mathbf{F} : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ روی C تعریف شده و پیوسته باشد. یک افراز $a = t_۰ < t_۱ < \dots < t_n = b$ روی $[a,b]$ نقاط $A = P_۰$، $P_۱$، $\cdots$ و $P_n = B$ را روی خم C مشخص می‌کند. به ازای $\Delta \mathbf{r}_i := \overrightarrow{P_{i-۱}P_i}$ حاصل جمع $\sum_{i=۱}^{n} \mathbf{F}(x(t_i), y(t_i)) \cdot \Delta \mathbf{r}_i$ را

حاصل جمع ریمان تابع برداری $\mathbf{F}$ روی C متناظر با افراز فوق می‌نامیم. در صورت وجود $\lim_{\mu\to ۰}\sum_{i=۱}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i))\cdot\Delta\mathbf{r}_i$ که $\mu=\max||\Delta\mathbf{r}_i||$ ،$(i=۱,...n)$، تابع $\mathbf{F}$ را روی C انتگرال‌پذیر نامیده و حد فوق را **انتگرال خطی (منحنی‌الخط) نوع دوم** تابع برداری $\mathbf{F}$ روی C می‌نامیم و با نماد $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ نمایش می‌دهیم.

به همین ترتیب برای یک خم هموار C بین دو نقطه‌ی A و B ، نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^۳$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ در فضا و تابع برداری $\mathbf{F}:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$ که روی C تعریف شده و پیوسته باشد انتگرال خطی نوع دوم $\mathbf{F}$ روی C تعریف و با نماد $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ نمایش داده می‌شود.

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع برداری به ازای یک $t_{i-۱}\le\tau_i\le t_i$،

$$\Delta\mathbf{r}_i=\overrightarrow{P_{i-۱}P_i}=\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-۱})=\mathbf{r}'(\tau_i)(t_i-t_{i-۱})=\mathbf{r}'(\tau_i)\Delta t_i$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \lim_{\mu\to ۰}\sum_{i=۱}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i))\cdot\Delta\mathbf{r}_i\\ &= \lim_{\mu\to ۰}\sum_{i=۱}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i))\cdot\mathbf{r}'(\tau_i)\Delta t_i\\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt\end{aligned}$$

به همین ترتیب برای $\mathbf{F}:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt$.

همچنین به ازای $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\ \mathbf{i}+Q(x,y)\ \mathbf{j}$ و $\mathbf{r}(t)=x(t)\ \mathbf{i}+y(t)\ \mathbf{j}$،

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t))\ \mathbf{i}+Q(x(t),y(t))\ \mathbf{j}\ ]\cdot[x'(t)\ \mathbf{i}+y'(t)\ \mathbf{j}\ ]\ dt\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t))\ x'(t)+Q(x(t),y(t))\ y'(t)]\ dt\\ &= \int_a^b P(x(t),y(t))\ x'(t)\ dt+\int_a^b Q(x(t),y(t))\ y'(t)\ dt\\ &= \int_C P\ dx+\int_C Q\ dy\end{aligned}$$

به شکل مشابه به ازای $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\ dx + \int_C Q\ dy + \int_C R\ dz$$

مثال ۵–۲–۱ برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = (x^۲ + ۳y)\ \mathbf{i} + (۳x - ۲y)\ \mathbf{j}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C قسمتی از منحنی به معادلات $x = t^۲$ ، $y = t^۳$ است که از نقطه‌ی $A = (۱, ۱)$ به نقطه‌ی $B = (۴, ۸)$ پیموده شده باشد.

ب) خم C سهمی به معادلات $x = t$ و $y = t^۲ - \frac{۸}{۳}t + \frac{۸}{۳}$ به ازای $۱ \le t \le ۴$ است که از نقطه‌ی A به B پیموده شده است.

ج) خم C پاره خط AB است که از نقطه‌ی A به B پیموده شده است.

الف) از $x = t^۲$ و $y = t^۳$ نتیجه می‌شود $x' = ۲t$ و $y' = ۳t^۲$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy \\
&= \int_C (x^۲ + ۳y)\ dx + (۳x - ۲y)\ dy \\
&= \int_۱^۲ [(x(t)^۲ + ۳y(t))\ x'(t) + (۳x(t) - ۲y(t))\ y'(t)]\ dt \\
&= \int_۱^۲ [(t^۴ + ۳t^۳)(۲t) + (۳t^۲ - ۲t^۳)(۳t^۲)]\ dt = ۵۱
\end{aligned}$$

ب) از $x = t$ و $y = t^۲ - \frac{۸}{۳}\ t + \frac{۸}{۳}$ نتیجه می‌شود $x' = ۱$ و $y' = ۲t - \frac{۸}{۳}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy \\
&= \int_C (x^۲ + ۳y)\ dx + (۳x - ۲y)\ dy \\
&= \int_۱^۴ [(x(t)^۲ + ۳y(t))\ x'(t) + (۳x(t) - ۲y(t))\ y'(t)]\ dt \\
&= \int_۱^۴ [(t^۲ + ۳t^۲ - ۸t + ۸) + (۳t - ۲t^۲ + \frac{۱۶}{۳}t - \frac{۱۶}{۳})(۲t - \frac{۸}{۳})]\ dt \\
&= ۵۱
\end{aligned}$$

ج) اگر $O = (۰, ۰)$ مبدأ مختصات باشد، پاره خط AB را که از نقطه‌ی A به B

پیموده می‌شود می‌توان به صورت زیر پارامتریزه کرد.

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (۱, ۱) + t(۳, ۷) = (۱ + ۳t)\ \mathbf{i} + (۱ + ۷t)\ \mathbf{j}$$

بنابراین $x = ۱ + ۳t$ و $y = ۱ + ۷t$. در نتیجه $x' = ۳$ و $y' = ۷$. پس

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy \\ &= \int_C (x^۲ + ۳y)\ dx + (۳x - ۲y)\ dy \\ &= \int_۰^۱ [(x(t)^۲ + ۳y(t))\ x'(t) + (۳x(t) - ۲y(t))\ y'(t)]\ dt \\ &= \int_۰^۱ [((۱ + ۳t)^۲ + ۳(۱ + ۷t))(۳) + (۳(۱ + ۳t) - ۲(۱ + ۷t)(۷)]\ dt \\ &= ۵۱ \end{aligned}$$

مثال ۵-۲-۲ برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin x\ \mathbf{i} + xy\ \mathbf{j} + \frac{۱}{۱+z}\ \mathbf{k}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C قسمتی از منحنی به معادلات $x = t$ ، $y = t^۲$ و $z = t^۳$ است که از نقطه‌ی $A = (۰, ۰, ۰)$ به نقطه‌ی $B = (۱, ۱, ۱)$ پیموده شده باشد.

ب) خم C پاره خط AB است که از نقطه‌ی A به B پیموده شده است.

ج) خم C پاره خط AB است ولی از نقطه‌ی B به A پیموده شده است.

الف) از $x = t$ ، $y = t^۲$ و $z = t^۳$ نتیجه می‌شود $x' = ۱$ ، $y' = ۲t$ و $z' = ۳t^۲$. پس

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_C \sin x\ dx + xy\ dy + \frac{۱}{۱+z}\ dz \\ &= \int_۰^۱ [\sin x(t)\ x'(t) + x(t)\ y(t)\ y'(t) + \frac{z'(t)}{۱+z(t)}]\ dt \\ &= \int_۰^۱ (\sin t + ۲t^۴ + \frac{۳t^۲}{۱+t^۳})\ dt = [-\cos t + \frac{۲}{۵}t^۵ + \ln(۱+t^۳)]_۰^۱ \\ &= \ln ۲ + \frac{۷}{۵} - \cos ۱ \end{aligned}$$

ب) پاره خط AB را که از نقطه‌ی A به B پیموده می‌شود می‌توان به ازای $۰ \le t \le ۱$

به صورت $x=y=z=t$ پارامتریزه کرد. در نتیجه $x'=y'=z'=1$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx+Qdy+Rdz\\
&= \int_C \sin x\ dx + xy\ dy + \frac{1}{1+z}\ dz\\
&= \int_0^1 [\sin x(t)\ x'(t) + x(t)\ y(t)\ y'(t) + \frac{z'(t)}{1+z(t)}]\ dt\\
&= \int_0^1 (\sin t + t^2 + \frac{1}{1+t})\ dt = [-\cos t + \frac{1}{3}t^3 + \ln(1+t)]_0^1\\
&= \ln 2 + \frac{4}{3} - \cos 1
\end{aligned}$$

ج) پاره خط AB را که از نقطه‌ی B به A پیموده می‌شود می‌توان به صورت زیر پارامتریزه کرد.

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BA} = (1,1,1) + t(-1,-1,-1) = (1-t)\ \mathbf{i} + (1-t)\ \mathbf{j} + (1-t)\ \mathbf{k}$$

بنابراین $x=y=z=1-t$ و در نتیجه $x'=y'=z'=-1$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx+Qdy+Rdz\\
&= \int_C \sin x\ dx + xy\ dy + \frac{1}{1+z}\ dz\\
&= \int_0^1 [\sin x(t)\ x'(t) + x(t)\ y(t)\ y'(t) + \frac{z'(t)}{1+z(t)}]\ dt\\
&= \int_0^1 (-\sin(1-t) - (1-t)^2 - \frac{1}{2-t})\ dt\\
&= [-\cos(1-t) + \frac{1}{3}(1-t)^3 + \ln(2-t)]_0^1\\
&= \cos 1 - \ln 2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

تعبیر فیزیکی انتگرال خطی نوع دوم

مسیر (خم) هموار C را بین دو نقطه‌ی A و B در نظر می‌گیریم. فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ و نیروی وارد شده بر یک جسم فیزیکی در طول مسیر C در نقطه‌ی (x,y,z) برابر $\mathbf{F}(x,y,z)$ باشد (شکل ۶–۲). در این صورت برای محاسبه‌ی W ، کار انجام شده

به وسیله‌ی F در طول C با نمادگزاری به کار رفته در تعریف انتگرال خطی داریم

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i \\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\|\ \|\Delta\mathbf{r}_i\|\ \cos\theta_i \\ &= \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\cdot\Delta\mathbf{r}_i = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

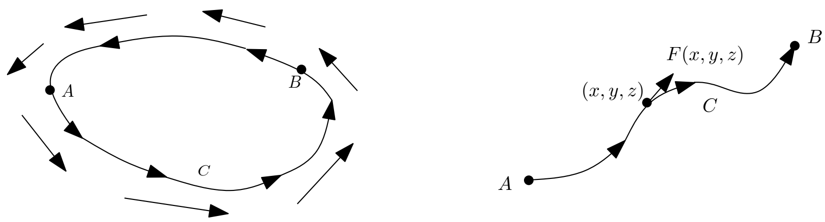
به قسمی که θ زاویه‌ی بین نیرو و تغییر مکان است.

یک تعبیر فیزیکی مهم دیگر انتگرال خطی نوع دوم برای میدان سرعت $\mathbf{F}$ از یک سیال مطرح می‌شود. برای این میدان اگر $\mathbf{F}$ مولفه‌ای هم جهت با یکه‌ی مماس بر خم بسته‌ی C داشته باشد آنگاه $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt > 0$. در این حالت ذرات سیال روی خم C هم جهت با یکه‌ی مماس می‌چرخند.

به همین ترتیب اگر F مولفه‌ای خلاف جهت یکه‌ی مماس بر خم C داشته باشد آنگاه $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt < 0$. در این حالت ذرات سیال روی خم C در خلاف جهت یکه‌ی مماس می‌چرخند.

در حالتی که F مولفه‌ای موازی با یکه‌ی مماس بر خم C نداشته باشد آنگاه $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),y(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt = 0$. در این حالت ذرات سیال روی خم C چرخشی ندارند.

بر اساس این تعبیر، برخی از مؤلفین $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را **چرخش** F روی C هم می‌نامند.



شکل ۵–۳ کار انجام شده به وسیله‌ی $\mathbf{F}$ در طول C و چرخش $\mathbf{F}$ روی C.

ویژگی‌های انتگرال خطی نوع دوم

۱. اگر توابع برداری $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ روی خم C انتگرال‌خطی نوع دوم داشته باشند آنگاه به ازای هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ تابع برداری $\lambda\mathbf{F} + \mathbf{G}$ نیز روی خم C انتگرال‌خطی دارد و

$$\int_C (\lambda\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

۲. اگر تابع برداری $\mathbf{F}$ روی خم $C_۱$ بین نقاط A و B و روی خم $C_۲$ بین نقاط B و C انتگرال‌خطی نوع دوم داشته باشد آنگاه روی خم $C := C_۱ + C_۲$ بین نقاط A و C انتگرال خطی دارد و

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_۱} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_۲} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

رابطه‌ی بین انتگرال‌های خطی نوع اول و دوم

فرض کنیم خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در بازه‌ی $[a, b]$، به وسیله‌ی $s = s(t)$ تابع طول قوس پارامتری سازی مجدد شود. به ازای L ، طول قوس خم C دیدیم که C را می‌توان نمودار تابع برداری $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ روی $[\circ, L]$ نیز در نظر گرفت که $t = t(s)$ معکوس تابع s است. در این صورت به ازای بردار یکه‌ی مماس $\mathbf{T}$ می‌توان رابطه‌ی بین انتگرال‌های خطی نوع اول و دوم را به صورت زیر بیان کرد.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_\circ^L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} ds = \int_\circ^L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

در روابط فوق از تغییر متغیر $t = t(s)$ به صورت زیر استفاده شده است. از $t = t(s)$ نتیجه می‌شود $dt = t'(s)ds = \frac{dt}{ds}(s)ds$. همچنین به ازای $t = a$ داریم $s = \circ$ و به ازای $t = b$ داریم $s = L$. بنابر این

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt \\
&= \int_\circ^L \mathbf{F}(\mathbf{r}(t(s))) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(s)) \ \frac{dt}{ds}(s) ds \\
&= \int_\circ^L \mathbf{F}(\mathbf{R}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) ds \\
&= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(s)) \cdot \mathbf{T}(s) ds
\end{aligned}$$

تأثیر تغییر پارامتر در انتگرال خطی نوع دوم

فرض کنیم خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ در بازه‌ی $[a,b]$ ، به وسیله‌ی تابع تغییر پارامتر $t:[c,d]\to[a,b]$ با ضابطه‌ی $t=t(\tau)$ پارامتری سازی مجدد شود. اگر $\frac{dt}{d\tau}>0$ ، $t(c)=a$ و $t(d)=b$ باشد پارامتری سازی مجدد را **جهت نگه‌دار** می‌نامیم. در واقع با پارامتر جدید τ، خم C همچنان از نقطه‌ی $A=\mathbf{r}(a)$ به نقطه‌ی $B=\mathbf{r}(b)$ پیموده می‌شود. روابط زیر نشان می‌دهند که تغییر پارامتر جهت نگه‌دار تأثیری در انتگرال خطی نوع دوم ندارد. فرض کنیم $\mathbf{R}(\tau)=\mathbf{r}(t(\tau))$. در این صورت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_c^d \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int_c^d \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}d\tau=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

به عکس اگر $\frac{dt}{d\tau}<0$ ، $t(c)=b$ و $t(d)=a$ باشد پارامتری سازی مجدد را **جهت برگردان** می‌نامیم. به این ترتیب به ازای هر پارامتر جدید جهت برگردان مانند τ خم C از نقطه‌ی $B=\mathbf{r}(b)$ به نقطه‌ی $A=\mathbf{r}(a)$ پیموده می‌شود. روابط زیر نشان می‌دهند که تغییر پارامترجهت برگردان علامت انتگرال خطی نوع دوم را تغییر می‌دهد.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_d^c \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau=-\int_c^d \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}d\tau=-\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

نتیجه‌ی ساده‌ی بحث فوق این است که برای تغییر پارامترجهت برگردان $t:[a,b]\to[a,b]$ با ضابطه‌ی $t\mapsto b+(a-t)$ که $-C$ را مشخص می‌کند داریم

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

شرط استقلال از مسیر برای انتگرال خطی نوع دوم

در مثال ۵–۲–۱ برای تابع برداری $\mathbf{F}(x,y)=(x^{۲}+۳y)\ \mathbf{i}+(۳x-۲y)\ \mathbf{j}$ مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ بین دو نقطه‌ی A و B روی سه مسیر متفاوت یکسان شد. در حالت کلی اگر مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ برای تابع برداری $\mathbf{F}$ روی هر مسیر دلخواه بین دو نقطه‌ی A و B یکسان شد $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را **مستقل از مسیر** می‌نامیم. خواهیم دید که این ویژگی بستگی به تابع برداری $\mathbf{F}$ دارد. در مثال ۵–۲–۱ برای $P(x,y)=x^{۲}+۳y$, $Q(x,y)=۳x-۲y$ داریم $\frac{\partial Q}{\partial x}=۳=\frac{\partial P}{\partial y}$. نشان می‌دهیم که می‌توان تابع حقیقی $U=U(x,y)$ را به قسمی

به دست آورد که $\nabla U = \mathbf{F}$. برای این کار باید داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = ۳x - ۲y$ و $\frac{\partial U}{\partial x} = P = x^۲ + ۳y$. از رابطه‌ی دوم با انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود $U(x,y) = \int (x^۲ + ۳y)\ dx = \frac{۱}{۳}x^۳ + ۳xy + h(y)$ به قسمی که $h(y)$ نسبت به متغیر x ثابتی است که باید تعیین شود. از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = ۳x - ۲y$ نتیجه می‌شود $۳x + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = ۳x - ۲y$. پس $h'(y) = -۲y$ و در نتیجه $h(y) = -y^۲$. به این ترتیب برای $U(x,y) = \frac{۱}{۳}x^۳ + ۳xy - y^۲$ داریم $\nabla U = \mathbf{F}$.

برای بیان حالت کلی ابتدا به چند تعریف مقدماتی می‌پردازیم.

تابع برداری $\mathbf{F}$ را روی یک ناحیه باز مانند D یک **میدان گرادیان** می‌نامیم هرگاه تابع مشتق‌پذیر $U : D \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به قسمی که $\nabla U = \mathbf{F}$. در این صورت تابع U را **تابع پتانسیل** $\mathbf{F}$ روی D می‌نامیم.

یادآوری می کنیم که مجموعه‌ی D باز است هرگاه به ازای هر نقطه‌ی $\mathbf{x} \in D$ یک همسایگی از $\mathbf{x}$ در D وجود داشته باشد.

مجموعه‌ی D را **همبند (همبند راهی)** می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ یک خم پیوسته‌ی $C \subseteq D$ با ابتدا و انتهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ وجود داشته باشد.

مجموعه‌ی D را یک **دامنه** می‌نامیم هرگاه باز و همبند باشد.

خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ روی $[a,b]$ را **بسته** گوییم هرگاه $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

خم C، نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ روی $[a,b]$ را **ساده** گوییم هرگاه روی (a,b) یک به یک باشد.

دامنه‌ی D را **دامنه‌ی ساده** گوییم هرگاه به ازای هر خم ساده و بسته‌ی $C \subseteq D$، درون C نیز زیر مجموعه‌ی D باشد.

یکی از ویژگی‌های مهم میدان‌های گرادیان، استقلال کار انجام شده از مسیری است که دو نقطه را به هم وصل می‌کند. ابتدا فرض کنیم $\mathbf{F}$ روی دامنه‌ی D یک میدان گرادیان باشد، یعنی تابع مشتق‌پذیر $U : D \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla U = \mathbf{F}$. اگر $C \subset D$ قطعه‌ای از یک خم هموار به معادلات پارامتری $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ برای $t \in [a,b]$ باشد که نقطه‌ی $\mathbf{x} = (x(a), y(a), z(a))$ را به $\mathbf{y} = (x(b), y(b), z(b))$ وصل می‌کند آنگاه با استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای تابع $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$g(t) = U\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}z'(t) \\ &= P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t) \\ &= \mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \int_a^b \mathbf{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a) = U(\mathbf{y}) - U(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

در حالتی که C خمی قطعه به قطعه هموار باشد که نقطه‌ی $\mathbf{x}$ را به نقطه‌ی $\mathbf{y}$ وصل می‌کند، با تقسیم خم C به تعداد متناهی قطعه خم هموار و تکرار روند فوق برای هر مولفه‌ی همبند C، نتیجه‌ی فوق مجددا به دست می‌آید. به این ترتیب، مقدار انتگرال $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ از مسیر C مستقل و فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی خواهد داشت.

عکس این ویژگی نیز برقرار است. به عبارت دیگر، برای میدان پیوسته‌ای مانند $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ که بر ناحیه‌ی D در فضای $\mathbb{R}^3$ تعریف شده‌است اگر مقدار $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ مستقل از مسیر C واقع در D و فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای مسیر باشد آنگاه میدان $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان است. برای اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}_0 \in D$ نقطه‌ای دلخواه باشد. برای $\mathbf{x} = (x, y, z)$ در D با انتخاب مسیری قطعه به قطعه هموار مانند $C \subset D$ از $\mathbf{x}_0$ به $\mathbf{x}$ بنا به فرض مقدار $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ مستقل از C و فقط تابعی از مختصات نقطه‌ی $\mathbf{x}$ خواهد بود. قرار می‌دهیم $U(x, y, z) = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$. در این صورت $U : D \to \mathbb{R}$ تابعی است که بر ناحیه‌ی D تعریف شده است. برای نقاط $\mathbf{x} = (x, y, z)$ و $\mathbf{y} = (x + h, y, z)$ در D، فرض کنیم C' پاره‌خطی از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ باشد. لازم به ذکر است که بنابر فرض باز بودن D، همواره با انتخاب نقطه‌ی $\mathbf{y}$ در یک همسایگی مناسب $\mathbf{x}$ می‌توانیم چنین مسیری در دامنه‌ی D داشته باشیم. به این ترتیب، با توجه به تعریف تابع U، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} U(x + h, y, z) - U(x, y, z) &= \int_{C \cup C'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} - \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \\ &= \int_{C'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_x^{x+h} P(t, y, z)\, dt \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از فرض پیوستگی تابع P،

$$\lim_{h\to ۰}\frac{U(x+h,y,z)-U(x,y,z)}{h}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{h}\int_x^{x+h}P(t,y,z)\,dt=P(x,y,z)$$

در نتیجه $\frac{\partial U}{\partial x}=P$. به همین ترتیب، $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$ و $\frac{\partial U}{\partial z}=R$. با توجه به فرض پیوستگی توابع P، Q و R بر دامنه‌ی D، تابع U بر D مشتقات جزئی پیوسته دارد و در نتیجه بر D مشتق‌پذیر است و $\nabla U=\mathbf{F}$، یعنی $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان است. خلاصه‌ی بحث فوق در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه ۵-۲-۳ اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ روی دامنه‌ی D پیوسته باشد آنگاه برای هر مسیر $C\subseteq D$ مقدار $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر C است اگر و تنها اگر $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان باشد. به علاوه اگر $\mathbf{F}=\nabla U$ و خم C از نقطه‌ی $\mathbf{x}$ به نقطه‌ی $\mathbf{y}$ پیموده شده باشد آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=U(\mathbf{x})-U(\mathbf{y})$$

به این ترتیب اگر $\mathbf{F}=\nabla U$ و خم C از نقطه‌ی $\mathbf{x}$ به نقطه‌ی $\mathbf{y}$ پیموده شده باشد آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=U(\mathbf{y})-U(\mathbf{x})$$

یک نتیجه‌ی ساده‌ی قضیه‌ی ۵-۲-۳ این است که اگر $\mathbf{F}$ روی دامنه‌ی D یک میدان گرادیان باشد برای هر مسیر ساده و بسته‌ی $C\subseteq D$ و نقطه‌ی دلخواه $\mathbf{x}\in C$ داریم

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=U(\mathbf{x})-U(\mathbf{x})=۰$$

همانگونه که مشاهده کردیم، برای یک میدان گرادیان، انتگرال خط میدان در امتداد یک خم مقداری مستقل از مسیر و وابسته به نقاط ابتدا و انتهای آن است. در مباحث کاربردی شناسایی چنین میدان‌هایی اهمیت خاصی دارد. در ادامه‌ی این بخش، با یک شرط معادل برای این خاصیت در حالت‌های خاصی آشنا می‌شویم. فرض کنیم D دامنه‌ای در صفحه‌ی xoy باشد که میدان $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ بر آن تعریف شده است. همچنین فرض کنیم توابع $P,Q:D\to\mathbb{R}$ بر این ناحیه مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند. اگر $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان باشد آنگاه تابع مشتق‌پذیر $U:D\to\mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

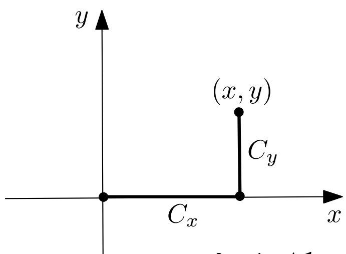
در نتیجه

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^۲ U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (۱)$$

با توجه به فرض پیوستگی توابع $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ بر D مشتقات $\frac{\partial^۲ U}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^۲ U}{\partial x \partial y}$ بر D پیوسته و در نتیجه برابر هستند. پس بنابر معادلات (۱)، در هر نقطه از D، $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

عکس این ویژگی برای دسته‌ای از دامنه‌ها در صفحه برقرار است. فرض کنیم D دامنه‌ای به صورت $I \times J$ باشد که در آن $I, J \subseteq \mathbb{R}$ دو بازه‌ی باز از اعداد حقیقی هستند. همچنین فرض کنیم $P, Q : D \to \mathbb{R}$ دو تابع با مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته بر این دامنه باشند به گونه‌ای که در هر نقطه از این دامنه $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. نشان می‌دهیم، تحت این شرط، میدان $\mathbf{F} + P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر D یک میدان گرادیان است. نقطه‌ای ثابت مانند $\mathbf{x}_\circ \in D$ را در نظر می‌گیریم. برای سهولت فرض کنیم $\mathbf{x}_\circ = (\circ, \circ)$. برای هر نقطه‌ی دلخواه $(x, y) \in D$ فرض کنیم $C_{(x,y)}$ مسیری متشکل از دو پاره‌خط C_x، به معادلات $x(t) = t$ و $y(t) = \circ$ برای $t \in [\circ, x]$، و C_y، به معادلات $x(t) = x$ و $y(t) = t$ برای $t \in [\circ, y]$ باشد. اکنون تابع $U : D \to \mathbb{R}$ را برای هر $(x, y) \in D$، با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
U(x,y) := \int_{C_{(x,y)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_x} P\,dx + \int_{C_y} Q\,dy \\
&= \int_\circ^x P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y Q(x,t)\,dt
\end{aligned}
$$



شکل ۵ــ۴ مسیر $C_{(x,y)}$.

برای دو نقطه‌ی $(x+h, y)$, (x, y) در D داریم

$$
\begin{aligned}
U(x+h,y) - U(x,y) &= \Big(\int_\circ^{x+h} P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y Q(x+h,t)\,dt\Big) \\
&- \Big(\int_\circ^{x} P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y Q(x,t)\,dt\Big) \\
&= \int_x^{x+h} P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y \big(Q(x+h,t) - Q(x,t)\big)\,dt
\end{aligned}
$$

و از آنجا

$$
\frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = \frac{۱}{h}\int_x^{x+h} P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y \frac{Q(x+h,t) - Q(x,t)}{h}\,dt
$$

با توجه به پیوستگی تابع P بر D و بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال توابع یک متغیره،

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}P(t,0)\,dt=P(x,0)$$

از سوی دیگر، با استفاده از فرض پیوستگی تابع $\frac{\partial Q}{\partial x}$ بر D، می‌توان ثابت کرد

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_{0}^{y}\frac{Q(x+h,t)-Q(x,t)}{h}\,dt &= \int_{0}^{y}\lim_{h\to 0}\frac{Q(x+h,t)-Q(x,t)}{h}\,dt\\ &= \int_{0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,dt\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از فرض $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} &= P(x,0)+\int_{0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,dt\\ &= P(x,0)+\int_{0}^{y}\frac{\partial P}{\partial y}(x,t)\,dt\\ &= P(x,0)+P(x,t)\big|_{0}^{y}=P(x,y)\end{aligned}$$

به این ترتیب، برای هر نقطه در D، $P=\frac{\partial U}{\partial x}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $Q=\frac{\partial U}{\partial y}$. با توجه به پیوستگی توابع P و Q بر D، تابع U بر D مشتق‌پذیر است. پس بنا به تعریف، میدان $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان است. در بخش بعد، با استفاده از قضیه‌ی گرین، این خاصیت را می‌توانیم برای هر دامنه‌ی همبند ساده در صفحه اثبات کنیم و در نتیجه قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۵-۲-۴ فرض کنیم D یک دامنه‌ی همبند ساده در صفحه و $P,Q:D\to\mathbb{R}$ توابعی با مشتقات جزئی پیوسته بر این دامنه باشند. در این صورت میدان $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ بر این دامنه یک میدان گرادیان است اگر و تنها اگر در هر نقطه از این دامنه $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

همان طور که مثال زیر نشان می‌دهد، شرط همبند ساده بودن D در این قضیه شرطی ضروری است و بدون آن قضیه‌ی فوق لزوما برقرار نیست.

مثال ۵-۲-۵ فرض کنیم $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ و $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. در این صورت توابع P و Q بر $D:=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. به علاوه برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$،

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

اگر $\mathbf{F} + P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بر D میدان گرادیان باشد آنگاه بنابر قضیه‌ی ۵–۲–۳، مقدار انتگرال خط این میدان بر روی یک مسیر بسته واقع در این ناحیه برابر صفر خواهد بود. فرض کنیم C دایره به معادله‌ی $x(t) = \cos t$ و $y(t) = \sin t$ برای $t \in [\circ, ۲\pi]$ باشد. با محاسبه‌ی مستقیم $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$، خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\circ^{۲\pi} \big(\frac{-\sin t}{\sin^۲ t + \cos^۲ t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^۲ t + \cos^۲ t}(\cos t)\big)\, dt = ۲\pi \neq \circ$$

این نتیجه نشان می‌دهد میدان $\mathbf{F}$ بر $D = \mathbb{R}^۲ - \{(\circ, \circ)\}$ میدان گرادیان نیست. توجه می‌کنیم که در اینجا دامنه‌ی $\mathbb{R}^۲ - \{(\circ, \circ)\}$ دامنه‌ای همبند ولی غیر ساده است.

مثال ۵–۲–۶ برای میدان برداری مثال قبل انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C نیم‌دایره‌ی به معادله‌ی $(x - \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۳}{۴}$ و $۱ \leq y$ است که از نقطه‌ی $A = (\sqrt{۳}, ۱)$ به نقطه‌ی $B = (\circ, ۱)$ پیموده شده باشد.

ب) خم C دایره‌ی به معادله‌ی $(x - \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۳}{۴}$ است.

الف) تابع $\mathbf{F}$ روی هر دامنه‌ای شامل خم C که مبدأ را در بر نداشته باشد دارای مشتقات جزئی پیوسته است.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^۲ + y^۲) + ۲y^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{y^۲ - x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{x^۲ + y^۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

بنابراین $\mathbf{F}$ در این دامنه یک میدان گرادیان است. می‌خواهیم تابع حقیقی $U = U(x, y)$ را به قسمی به دست آوریم که $\nabla U = \mathbf{F}$. برای این کار باید داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial x} = P = \frac{-y}{x^۲ + y^۲}$ و $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$. از رابطه‌ی دوم با انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود

$$U(x, y) = \int \frac{-y}{x^۲ + y^۲}\, dx = \int \frac{-\frac{۱}{y}}{(\frac{x}{y})^۲ + ۱}\, dx = -\arctan(\frac{x}{y}) + h(y)$$

به قسمی که $h(y)$ تابعی است که باید تعیین شود (نسبت به متغیر x مانند یک ثابت است). از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$ نتیجه می‌شود

$\dfrac{x}{x^{۲}+y^{۲}}=\dfrac{\partial U}{\partial y}=h'(y)+\dfrac{x}{x^{۲}+y^{۲}}$. پس $h'(y)=۰$ و در نتیجه می‌توان نوشت $h(y)=۰$. به این ترتیب برای $U(x,y)=-\arctan(\dfrac{x}{y})$ داریم $\nabla U=\mathbf{F}$ و

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=U(۰,۱)-U(\sqrt{۳},۱)=\frac{\pi}{۳}$$

ب) برای میدان گرادیان $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{-y}{x^{۲}+y^{۲}}\,\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^{۲}+y^{۲}}\,\mathbf{j}$ روی هر مسیر بسته که مبدأ را در بر نداشته باشد، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=۰$.

مشابه بحث فوق، اگر میدان $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ بر دامنه‌ای مانند $D\subset\mathbb{R}^{۳}$ تعریف شده باشد و توابع P، Q و R بر D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند آنگاه به شرط گرادیان بودن این میدان بر D، معادلات زیر برقرار خواهند بود:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}\quad,\quad\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\quad,\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

عکس این ویژگی، مانند آنچه در مورد میدان‌های روی $\mathbb{R}^{۲}$ گفته شد، برای دسته‌ای از میدانها روی دامنه‌های همبند در $\mathbb{R}^{۳}$ قابل اثبات است.

مثال ۵–۲–۷ برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=(e^{z}+y^{۲})\,\mathbf{i}+۲xy\,\mathbf{j}+xe^{z}\,\mathbf{k}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) خم C خم دلخواه هموار و بسته‌ای در فضای $\mathbb{R}^{۳}$ است.

ب) خم C خم هموار دلخواهی در فضای $\mathbb{R}^{۳}$ است که از نقطه‌ی $\mathbf{x}=(۰,۱,۱)$ به نقطه‌ی $\mathbf{y}=(۱,۰,۱)$ پیموده شده است.

الف) تابع $\mathbf{F}$ روی هر دامنه‌ی شامل خم C دارای مشتقات جزئی پیوسته است.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=۲y=\frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=۰=\frac{\partial Q}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=e^{z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

پس $\mathbf{F}$ در $\mathbb{R}^{۳}$ یک میدان گرادیان است و روی هر مسیر بسته داریم:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=۰$$

ب) **روش اول.** چون $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر است و می‌توان به جای C خط راست بین A و B را جایگزین کرد. پاره خط AB را که از نقطه‌ی

A به B پیموده می‌شود می‌توان به صورت زیر پارامتری کرد.

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) + t(1, -1, 0) = t\ \mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + \ \mathbf{k}$$

بنابراین $x = t$ ، $y = 1 - t$ و $z = 1$. در نتیجه $x' = 1$ ، $y' = -1$ و $z' = 0$. پس

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz \\
&= \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (e^z + y^2)\ dx + 2xy\ dy + xe^z\ dz \\
&= \int_0^1 [(e^z + y^2)\ x' + 2x\ y\ y' + xe^z\ z']\ dt \\
&= \int_0^1 [(e^1 + (1-t)^2) + 2(t)(1-t)(-1)]\ dt \\
&= [te + t - 2t^2 + t^3]_0^1 = e
\end{aligned}$$

روش دوم. کافی است U، تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ را به دست آوریم. می‌خواهیم تابع حقیقی $U = U(x,y,z)$ را به قسمی به دست آوریم که $\nabla U = \mathbf{F}$. برای این کار باید داشته باشیم $\frac{\partial U}{\partial z} = R = xe^z$ ، $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = 2xy$ و $\frac{\partial U}{\partial x} = P = e^z + y^2$. از رابطه‌ی سوم با انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود $U(x,y,z) = \int (e^z + y^2)\ dx = xe^z + xy^2 + h(y,z)$ به قسمی که $h(y,z)$ نسبت به متغیر y, z ثابتی است که باید تعیین شود. از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = 2xy$ نتیجه می‌شود $2xy = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} + 2xy$. پس $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$ و در نتیجه $h(y,z) = g(z)$ به قسمی که $g(z)$ نسبت به متغیر z ثابتی است که باید تعیین شود. از رابطه‌ی $\frac{\partial U}{\partial z} = R = xe^z$ نتیجه می‌شود $xe^z = \frac{\partial U}{\partial y} = xe^z + g'(z)$. پس $g'(z) = 0$. بنابر این می‌توان $g(z) = 0$ و در نتیجه $h(y,z) = 0$ در نظر گرفت. به این ترتیب برای $U(x,y,z) = xe^z + xy^2$ داریم $\nabla U = \mathbf{F}$. به این ترتیب

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(1, 0, 1) - U(0, 1, 1) = e$$

روش دیگر برای محاسبه‌ی U به صورت زیر است:

$$U(x,y,z) = \int_0^x P(t, 0, 0)\ dt + \int_0^y Q(x, t, 0)\ dt + \int_0^z R(x, y, t)\ dt$$

در این مثال $P(t,\circ,\circ)=\circ$ ، $Q(x,t,\circ)=\text{۲}xt$ و $R(x,y,t)=xe^t$. بنابر این

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_\circ^x P(t,\circ,\circ)\,dt+\int_\circ^y Q(x,t,\circ)\,dt+\int_\circ^z R(x,y,t)\,dt \\ &= \int_\circ^x dt+\int_\circ^y \text{۲}xt\,dt+\int_\circ^z xe^t\,dt \\ &= t|_\circ^x+xt^{\text{۲}}|_\circ^y+xe^t|_\circ^z = x+xy^{\text{۲}}+xe^z-x=xy^{\text{۲}}+xe^z \end{aligned}$$

۳–۵ قضیه‌ی گرین در صفحه

قضیه‌ی گرین در صفحه رابطه‌ی عمیق بین انتگرال خط یک میدان روی خمی ساده و بسته در صفحه با انتگرال دوگانه‌ی تابعی وابسته به میدان روی ناحیه‌ی محدود به این خم را مطرح می‌کند. این قضیه را می‌توان به عنوان حالت خاصی از قضیه‌های واگرایی گوس و استوکس در فضا که در بخش‌های بعد مشاهده خواهیم کرد در نظر گرفت.

ابتدا حالت خاصی از این قضیه را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم C یک خم بسته و ساده در صفحه باشد که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی شود و ناحیه‌ی ساده‌ای چون D را محصور می‌کند. با توجه به فرض ساده بودن ناحیه‌ی D، بازه‌ای چون $[a,b]$ و توابع پیوسته‌ی $g_{\text{۱}},g_{\text{۲}}:[a,b]\to\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{\text{۲}} \mid a\le x\le b \quad g_{\text{۱}}(x)\le y\le g_{\text{۲}}(x)\}$$

همچنین فرض کنیم توابع حقیقی دو متغیره‌ی P و Q بر ناحیه‌ی بازی حاوی D مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند. بنابر قضیه‌ی فوبینی برای تابع پیوسته‌ی $\frac{\partial P}{\partial y}$،

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy &= \int_a^b\int_{g_{\text{۱}}(x)}^{g_{\text{۲}}(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \big(P(x,g_{\text{۲}}(x))-P(x,g_{\text{۱}}(x))\big) \\ &= -\int_b^a P(x,g_{\text{۲}}(x))\,dx-\int_a^b P(x,g_{\text{۱}}(x))\,dx \\ &= \int_C P\,dx \end{aligned}$$

به همین ترتیب، برای ناحیه‌ی ساده‌ی D بازه‌ای مانند $[c,d]$ و توابع پیوسته‌ی $h_{\text{۱}},h_{\text{۲}}:[c,d]\to\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{\text{۲}} \mid c\le y\le d\ ,\ h_{\text{۱}}(y)\le x\le h_{\text{۲}}(y)\}$$

شبیه به آنچه مشاهده کردیم، مجددا با استفاده از قضیه‌ی فوبینی برای تابع پیوسته‌ی $\frac{\partial Q}{\partial x}$ خواهیم داشت

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \int_C Q\, dy$$

به این ترتیب، با جمع دو رابطه‌ی فوق،

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x})\, dxdy$$

اکنون با استفاده از این حالت خاص قضیه‌ی گرین به بررسی حالت کلی‌تر این قضیه می‌پردازیم. فرض کنیم ناحیه‌ی D محصور توسط خم بسته و ساده‌ی C به صورت اجتماعی متناهی از نواحی ساده‌ی $D_۱$، $\cdots$، D_n باشد با این خاصیت که برای هر دو زیرناحیه‌ی D_i و D_j، مجموعه‌ی $D_i \cap D_j$ حداکثر یک منحنی پیوسته باشد. بدون کم شدن از کلیت مساله، فرض کنیم $D = D_۱ \cup D_۲$ به قسمی که $D_۱$ و $D_۲$ نواحی ساده با مرزهای $C_۱$ و $C_۲$، طی شده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشند و $C' := D_۱ \cap D_۲$ یک خم پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم توابع P و Q بر مجموعه‌ای باز در برگیرنده‌ی D مشتقات جزئی پیوسته داسته باشند. قرار می‌دهیم $C'_۱ := C_۱ - C'$ و $C'_۲ := C_۲ - C'$. بنابر حالت قبل،

$$\begin{aligned}\int_{C_۱} P\, dx + Q\, dy &= \iint_{D_۱} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy \\ \int_{C_۲} P\, dx + Q\, dy &= \iint_{D_۲} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy\end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\int_{C_۱} P\, dx + Q\, dy = \int_{C'_۱} P\, dx + Q\, dy + \int_{C'} P\, dx + Q\, dy$$
$$\int_{C_۲} P\, dx + Q\, dy = \int_{C'_۲} P\, dx + Q\, dy + \int_{-C'} P\, dx + Q\, dy$$

که در اینجا منظور از $-C'$ همان خم C' ولی پیموده شده در خلاف جهت C' است. با جمع طرفین دو رابطه‌ی اخیر و توجه به این نکته که $\int_{-C'} P\, dx + Q\, dy = -\int_{C'} P\, dx + Q\, dy$، خواهیم داشت

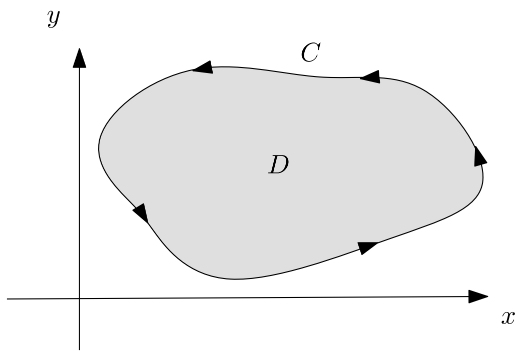
$$\begin{aligned}\int_C P\, dx + Q\, dy &= \int_{C'_۱} P\, dx + Q\, dy + \int_{C'_۲} P\, dx + Q\, dy \\ &= \int_{C_۱} P\, dx + Q\, dy + \int_{C_۲} P\, dx + Q\, dy\end{aligned}$$

$$= \iint_{D_1} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy + \iint_{D_2} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$$
$$= \iint_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$$

به این ترتیب، حالت کلی‌تری از قضیه‌ی گرین به صورت زیر به دست می‌آید.

قضیه ۵–۳–۱ (**گرین**) فرض کنیم C یک خم بسته و ساده در صفحه و D ناحیه‌ی محصور توسط این خم باشد. همچنین فرض کنیم P و Q دو تابع دو متغیره حقیقی بر ناحیه‌ی بازی از صفحه در برگیرنده‌ی ناحیه‌ی D تعریف شده و دارای مشتقات جزئی پیوسته بر این ناحیه باشند. اگر C در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) پیموده شود آنگاه

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$$



شکل ۵–۵ ناحیه‌ی مربوط به قضیه‌ی گرین.

مثال ۵–۳–۲ برای میدان $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{1+x^2} - 2y^2)\ \mathbf{i} + (y^2 + xy)\ \mathbf{j}$ انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را در هریک از حالت‌های زیر محاسبه کنید (شکل ۵–۶).

الف) خم C منحنی بسته‌ی $ABCDA$ است که AB کمان دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2$ از نقطه‌ی $A = (1,1)$ به $B = (\sqrt{2}, 0)$ ، BC قسمتی از محور x بین نقطه‌ی B و $C = (\sqrt{8}, 0)$ ، CD کمان دایره‌ی $x^2 + y^2 = 8$ از نقطه‌ی C به $D = (2,2)$ و بالاخره DA بخشی از خط $x = y$ بین نقطه‌ی D و A است.

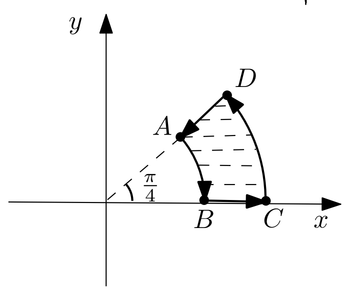
ب) خم C منحنی $ABCD$ از قسمت الف است.

توابع حقیقی $P(x,y)=\dfrac{x}{1+x^2}-2y^2$ و $Q(x,y)=y^2+xy$ روی دامنه‌ی D شامل C و درون آن مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم بسته و ساده‌ی C در جهت مثبت و برای میدان برداری $\mathbf{F}$ شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است. از سوی دیگر

$$D=\{(r,\theta)\ :\ \sqrt{2}\le r\le\sqrt{8},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}\ ,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=y\ \ ,\ \ \frac{\partial P}{\partial y}=-4y$$

بنابر این

$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy &= \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA\\
&= \iint_D 5y\,dA\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}5(r\sin\theta)r\,dr\,d\theta\\
&= 5(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta)(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}}r^2\,dr)\\
&= (-5\cos\theta|_0^{\frac{\pi}{4}})\,(\frac{1}{3}r^3|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}})=\frac{35\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{2})
\end{aligned}$$



شکل ۵–٦ خم C در مثال ۵–۳–۲.

ب) با در نظر گرفتن پاره‌خط DA از خط $x=y$ برای خم $C''=C+AD$ شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است و بنابر الف $\int_{C''}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\frac{35\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{2})$. پس

$$\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+\int_{DA}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\frac{35\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{2})$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy &= \frac{35\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{2})-\int_{DA}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\\
&= \frac{35\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{2})+\int_{AD}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

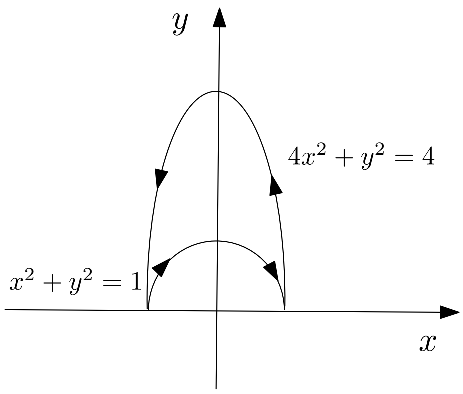
از سوی دیگر

$$\begin{aligned}\int_{AD} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy &= \int_{۱}^{۲} [(\frac{t}{۱+t^{۲}} - ۲t^{۲}) + (t^{۲} + t^{۲})]\ dt \\ &= [\ln(۱+t^{۲})]_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۲} \ln \frac{۵}{۲}\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \frac{۳۵\sqrt{۲}}{۳}(۲ - \sqrt{۲}) + \frac{۱}{۲} \ln \frac{۵}{۲}$$

مثال ۵–۳–۳ خم C خمی بسته شامل نیمه‌ی بالای محور x از بیضی $۴x^{۲} + y^{۲} = ۴$ بین نقاط $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$ و نیم‌دایره‌ی بالای محور x از دایره‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۱$ بین نقاط $(-۱,۰)$ و $(۱,۰)$ است (شکل ۵–۷). برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = (-y + xy^{۲} + \arctan x^{۲})\ \mathbf{i} + (yx^{۲} + ۵x - e^{y^{۲}})\ \mathbf{j}$ ، انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.



شکل ۵–۷ خم C در مثال ۵–۳–۳.

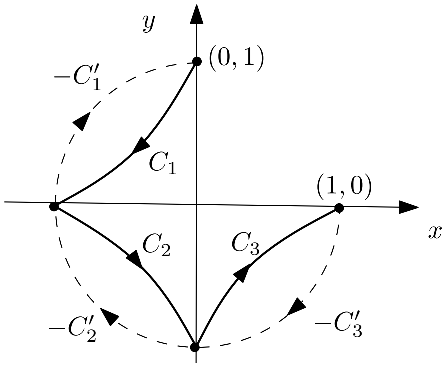
توابع حقیقی $P(x,y) = -y + xy^{۲} + \arctan x^{۲}$ و $Q(x,y) = yx^{۲} + ۵x - e^{y^{۲}}$ روی دامنه‌ی D شامل C و درون آن مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم بسته و ساده‌ی C در جهت مثبت و برای تابع $\mathbf{F}$ شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است و

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ۲xy + ۵ \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -۱ + ۲xy$$

$$\begin{aligned}\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy &= \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = ۶ \int\int_D\ dA \\ &= ۶(\frac{۱}{۲}\pi(۲) - \frac{۱}{۲}\pi) = ۳\pi\end{aligned}$$

مثال ۵-۳-۴ خم C نمودار رابطه‌ی $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=۱$ در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم صفحه‌ی مختصاتی از $(۰,۱)$ به $(۱,۰)$ پیموده شده است (شکل ۵—۸). برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=\frac{-y}{x^۲+y^۲}\,\mathbf{i}+\frac{x}{x^۲+y^۲}\,\mathbf{j}$، مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

می‌توان خم C را به صورت $C=C_۱+C_۲+C_۳$ نوشت که $C_۱$ قطعه‌ای از خم C در ناحیه‌ی دوم ، $C_۲$ قطعه‌ای از خم C در ناحیه‌ی سوم و $C_۳$ قطعه‌ای از خم C در ناحیه‌ی چهارم صفحه‌ی مختصاتی است. فرض کنیم C' نمودار دایره‌ی به معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم صفحه‌ی مختصاتی بین نقاط $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ باشد. در این صورت می‌توان خم C' را نیز به صورت $C'=C'_۱+C'_۲+C'_۳$ نوشت که $C'_۱$ قطعه‌ای از دایره‌ی C' در ناحیه‌ی دوم ، $C'_۲$ قطعه‌ای از دایره‌ی C' در ناحیه‌ی سوم و $C'_۳$ قطعه‌ای از دایره‌ی C' در ناحیه‌ی چهارم صفحه‌ی مختصاتی باشد.



شکل ۵—۸ شکل مربوط به مثال ۵-۳-۴.

به ازای $i=۱,۲,۳$ توابع حقیقی $P(x,y)=\frac{-y}{x^۲+y^۲}$ و $Q(x,y)=\frac{x}{x^۲+y^۲}$ روی هر دامنه‌ی D_i شامل $C_i+C'_i$ و درون آن که مبدأ را نداشته باشد مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم $C_i+C'_i$ در جهت مثبت و برای تابع F شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است. از سوی دیگر

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

بنابر این شرایط قضیه‌ی گرین برای خم $-C_i+C'_i$ روی D_i برقرار است و داریم

$$\int_{-C_i+C'_i} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \quad = \quad \iint_{D_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=۰$$

پس برای $i = ۱,۲,۳$

$$\int_{C_i} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \int_{C'_i} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^۲ t + \sin^۲ t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^۲ t + \sin^۲ t}(\cos t)\right)dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi} dt = ۳\frac{\pi}{۲}\end{aligned}$$

محاسبه‌ی مساحت به کمک قضیه‌ی گرین

شرایط قضیه‌ی گرین برای D ناحیه‌ای در صفحه‌ی xy، متشکل از یک خم بسته‌ی قطعه قطعه هموار C و درون آن به قسمتی که C در جهت مثبت پیموده شده است و به ازای توابع $P(x,y) = -y$ و $Q(x,y) = x$ برقرار است. بنابر این A مساحت ناحیه‌ی D را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned}A = \iint_D dA &= \frac{۱}{۲}\iint_D (۱+۱)\ dA \\ &= \frac{۱}{۲}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \\ &= \frac{۱}{۲}\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy \\ &= \frac{۱}{۲}\int_C -y\ dx + x\ dy\end{aligned}$$

به همین ترتیب به ازای توابع $P(x,y) = ۰$ و $Q(x,y) = x$ می‌توان نوشت $A = \int_C x\ dy$.

و به ازای توابع $P(x,y) = -y$ و $Q(x,y) = ۰$ می‌توان نوشت $A = \int_C -y\ dx$.

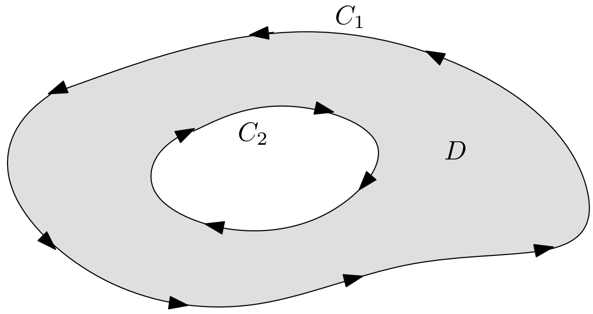
قضیه‌ی گرین برای نواحی همبند دوگانه

فرض کنیم $C_۱$ و $C_۲$ خم‌های بسته‌ی قطعه قطعه هموار باشند که $C_۲$ در درون $C_۱$ قرار گرفته است. ناحیه‌ی D را ناحیه‌ای در صفحه‌ی xy، متشکل از $C_۱$ و $C_۲$ و بین آنها در نظر می‌گیریم. این نوع ناحیه را **همبند دوگانه** می‌نامیم (شکل ٦—۵). جهت مثبت خم‌های $C_۱$ و $C_۲$ را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که هرگاه ناظری روی C_i ($i = ۱,۲$)

در آن جهت حرکت کند D را در سمت چپ خود ببیند. به این ترتیب جهت مثبت $C_۱$ خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و جهت مثبت $C_۲$ جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

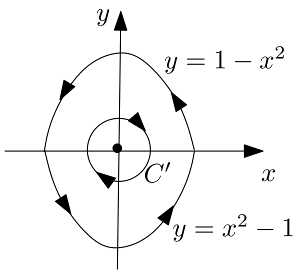
قضیه ۵–۳–۵ فرض کنیم D ناحیه‌ای همبند دوگانه در صفحه‌ی xy با مرزهای $C_۱$ و $C_۲$ باشد به قسمی که $C_۱$ و $C_۲$ در جهت مثبت پیموده شده اند (شکل ۵–۹). در این صورت اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ روی دامنه‌ی بازی شامل D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد آنگاه

$$\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dA = \int_{C_۱} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy + \int_{C_۲} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$



شکل ۵–۹ یک ناحیه‌ی همبند دوگانه و شکل مربوط به مثال ۵–۳–٦.

مثال ۵–۳–٦ خم C خمی بسته شامل قطعاتی از سهمی‌های $y = x^۲ - ۱$ و $y = ۱ - x^۲$ است که این دو از هم جدا می‌کنند (شکل ٦–۵). اگر C در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده شود ، برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = \frac{x-y}{x^۲+y^۲}\ \mathbf{i} + \frac{y+x}{x^۲+y^۲}\ \mathbf{j}$ ، انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.



شکل ۵–۱۰ شکل مربوط به مثال ۵–۳–٦.

فرض کنیم C' دایره $x^۲ + y^۲ = r^۲$ به شعاع r باشد به قسمی که C' درون C قرار بگیرد (برای مثال $r = \frac{۱}{۴}$). جهت C' را جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم. توابع حقیقی

$P(x,y)=\frac{y-x}{x^۲+y^۲}$ و $Q(x,y)=\frac{y+x}{x^۲+y^۲}$ روی ناحیه‌ای همبند دوگانه D در صفحه‌ی xy با مرزهای C و C' مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این روی خم‌های بسته و ساده‌ی C و C' و برای تابع F شرایط قضیه‌ی گرین برقرار است. از سوی دیگر

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^۲-x^۲-۲xy}{x^۲+y^۲}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

بنابر این

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{C'}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\int_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\circ$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{-C'}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\ &= \int_\circ^{۲\pi}[\frac{r\sin t-r\cos t}{r^۲\cos^۲ t+r^۲\sin^۲ t}(-r\sin t)+\frac{r\cos t+r\sin t}{r^۲\cos^۲ t+r^۲\sin^۲ t}(r\cos t)]\ dt\\ &= \int_\circ^{۲\pi}\ dt=۲\pi\end{aligned}$$

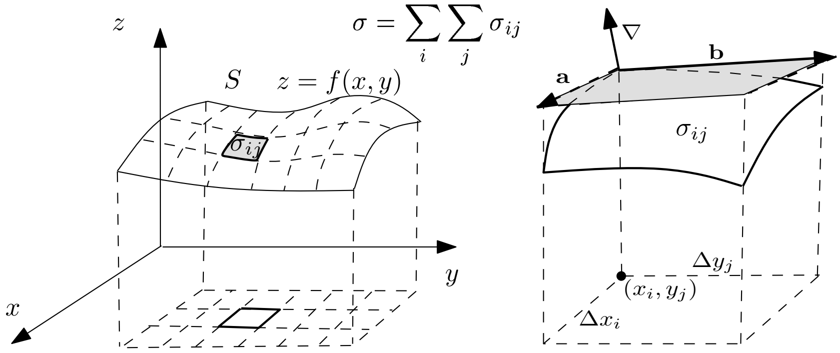
۵–۴ مساحت و انتگرال رویه

در این بخش به معرفی نوع دیگری از انتگرال، موسوم به انتگرال رویه می‌پردازیم. این مفهوم به نوعی تعمیم انتگرال خطی هم هست. همان‌گونه که گفتیم ایده‌ی اولیه‌ی انتگرال خطی برای محاسبه‌ی طول کمانی از یک خم و کار یک میدان نیرو در طول یک خم مطرح شده است. به همین ترتیب ایده‌ی اولیه‌ی انتگرال رویه برای محاسبه‌ی مساحت بخشی از یک رویه در یک ناحیه و شار یک میدان نیرو گذرنده از یک سطح بوده است.

در ادامه‌ی بحث ابتدا به نحوه‌ی محاسبه‌ی مساحت بخشی از یک رویه می‌پردازیم. همانند دیگر انتگرال‌هایی که تاکنون مطرح کرده‌ایم، در اینجا نیز به کمک افرازی مناسب روی ناحیه‌ی مورد نظر یک مجموع ریمان برای تقریب مساحت رویه به دست می‌آوریم. فرض کنیم رویه‌ی S نمودار تابع $z=f(x,y)$ و تصویر قائم S بر صفحه xoy ناحیه‌ی نرمال D باشد (یعنی D اجتماعی از نواحی ساده‌ی عمودی و افقی است). همچنین فرض کنیم f روی D مشتقات جزئی پیوسته دارد و D در مستطیل $[a,b]\times[c,d]$ محدود شده است. برای افراز $a=x_\circ<...<x_n=b$ از $[a,b]$ و افراز $c=y_\circ<...<y_m=d$ از $[c,d]$، مجموعه‌ای از زیر نواحی $\delta_{ij}=[x_{i-۱},x_i]\times[y_{j-۱},y_j]$ برای ناحیه‌ی D به دست می‌آید. فرض کنیم مستطیل Δ_{ij} با طول Δx_i و عرض Δy_j زیر ناحیه‌ی δ_{ij} از $[a,b]\times[c,d]$ باشد که اشتراک آن با D تهی نیست. روی این نواحی نیز مجموعه‌هایی از

S به دست می‌آید (شکل ۵–۱۱). اگر **عنصر(اِلمان) سطح** روی Δ_{ij} برابر σ_{ij} باشد، مساحت بخشی از S که روی D قرار دارد عبارت است از:

$$\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}$$



شکل ۵–۱۱ مساحت رویه.

اکنون به محاسبه‌ی تقریبی برای σ_{ij} می‌پردازیم. فرض کنیم متوازی‌الاضلاع π_{ij} قسمتی از صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در نقطه‌ی $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ باشد که روی ناحیه‌ی Δ_{ij} واقع شده است (شکل ۵–۱۱). در این صورت مساحت π_{ij} تقریبی برای σ_{ij} است.

اگر $\mathbf{a} = a_۱\ \mathbf{i} + a_۲\ \mathbf{j} + a_۳\ \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_۱\ \mathbf{i} + b_۲\ \mathbf{j} + b_۳\ \mathbf{k}$ مشخص کننده‌ی طول و عرض π_{ij} باشند در بخش اول دیدیم که مساحت π_{ij} برابر $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ است.

تصویر قائم متوازی‌الاضلاع π_{ij} بر صفحه‌ی xoy مستطیلی با طول Δx_i و عرض Δy_j است. بنابر این $(a_۱, a_۲) = \Delta x_i\ \mathbf{i}$ و $(b_۱, b_۲) = \Delta y_j\ \mathbf{j}$. در نتیجه $\mathbf{a} = \Delta x_i\ \mathbf{i} + a_۳\ \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \Delta y_j\ \mathbf{j} + b_۳\ \mathbf{k}$. از سوی دیگر بردار $\nabla = -f_x\ \mathbf{i} - f_y\ \mathbf{j} + \mathbf{k}$، بردار گرادیان تابع $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ در نقطه‌ی $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ برداری عمود بر π_{ij} است. بنابر این $\mathbf{a} \cdot \nabla = ۰$ و $\mathbf{b} \cdot \nabla = ۰$. پس

$$۰ = \mathbf{a} \cdot \nabla = (\Delta x_i \mathbf{i} + a_۳ \mathbf{k}) \cdot (-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\Delta x_i\ f_x + a_۳$$

$$۰ = \mathbf{b} \times \nabla = (\Delta y_j \mathbf{j} + b_۳ \mathbf{k}) \cdot (-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\Delta y_j\ f_y + b_۳$$

در نتیجه $b_۳ = \Delta y_j\ f_y$ و $a_۳ = \Delta x_i\ f_x$. پس

$$\mathbf{a} = \Delta x_i\ \mathbf{i} + \Delta x_i\ f_x\ \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{b} = \Delta y_j\ \mathbf{j} + \Delta y_j\ f_y\ \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & ۰ & \Delta x_i\ f_x \\ ۰ & \Delta y_j & \Delta y_j\ f_y \end{vmatrix} \| = \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

$$\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \approx \sum_i \sum_j \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sum_i \sum_j \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$$

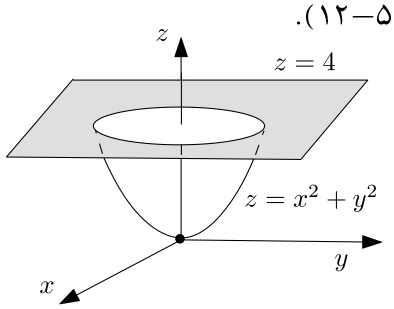
به این ترتیب برای $\mu = \text{Max}_{i,j}\{\Delta x_i\ ,\ \Delta y_j\}$ داریم

$$\sigma = \lim_{\mu \to ۰} \sum_i \sum_j \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j = \int\int_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA$$

مقدار $\lim_{\mu \to ۰} \sum_i \sum_j \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$ را در صورت وجود با $\int\int_S d\sigma$ نمایش می‌دهیم. بنابر آنچه گفته شد، مساحت رویه‌ی S روی ناحیه‌ی D عبارت است از

$$\int\int_S d\sigma = \int\int_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA$$

مثال ۵–۴–۱ مطلوب است مساحت بخشی از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ واقع در زیر صفحه‌ی $z = ۴$ (شکل ۵–۱۲).



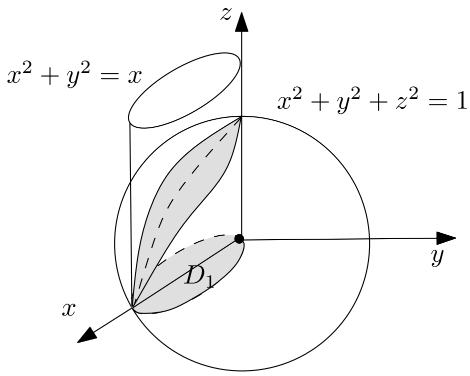
شکل ۵–۱۲ مساحت بخشی از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ واقع در زیر صفحه‌ی ۴ $z =$.

می‌خواهیم مساحت رویه‌ی S به معادله‌ی $z = f(x,y) = x^۲ + y^۲$ را روی ناحیه‌ی $D := \{(x,y) : x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ به دست آوریم.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int\int_D \sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\ dA \\
&= \int\int_D \sqrt{۱ + ۴x^۲ + ۴y^۲}\ dA \\
&= \int_۰^{۲\pi} \int_۰^۲ r\sqrt{۱ + ۴r^۲}\ dr\ d\theta \\
&= (\frac{۱}{۱۲}\int_۰^{۲\pi} d\theta)(۱ + ۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}}|_۰^۲) = \frac{\pi}{۶}(۱۷\sqrt{۱۷} - ۱)
\end{aligned}$$

مثال ۵–۴–۲ مطلوب است مساحت قسمتی از کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ که به وسیله‌ی استوانه‌ی $x^{۲}+y^{۲}=x$ در بالای صفحه‌ی xoy محدود می‌شود (شکل ۵–۱۳). باید قسمتی از رویه‌ی S به معادله‌ی $z=f(x,y)=\sqrt{۱-x^{۲}-y^{۲}}$ را در نظر بگیریم که روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=x$ قرار دارد. معادله‌ی دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=x$ در مختصات قطبی عبارت است از $r^{۲}=r\cos\theta$ یعنی $r=\cos\theta$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از $\{(r,\theta): ۰\le r\le\cos\theta, -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\}$. به این ترتیب به ازای $D_{۱}:=\{(r,\theta): ۰\le r\le\cos\theta, ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \iint_{D}\sqrt{۱+f_x^{۲}+f_y^{۲}}dA\\ &= ۲\iint_{D_۱}\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}-y^{۲}}+\frac{y^{۲}}{۱-x^{۲}-y^{۲}}}\,dA\\ &= ۲\iint_{D_۱}\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}-y^{۲}}}\,dA=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{۱-r^{۲}}}\,dr\,d\theta\\ &= ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}[-(۱-r^{۲})^{\frac{۱}{۲}}]_{۰}^{\cos\theta}\,d\theta=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\cos\theta)\,d\theta=\pi-۲\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۳ قسمتی از کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ که به وسیله‌ی استوانه‌ی $x^{۲}+y^{۲}=x$ در بالای صفحه‌ی xoy محدود می‌شود.

انتگرال رویه برای توابع حقیقی (اسکالر)

پیش از ارائه‌ی مفهوم شار یک میدان نیرو گذرنده از یک سطح مفهوم کلی‌تر انتگرال رویه را برای توابع حقیقی مطرح می‌کنیم. فرض کنیم رویه‌ی S نمودار تابع $z=f(x,y)$ روی ناحیه‌ی نرمال D در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم $g:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $w=g(x,y,z)$ روی S پیوسته و S در یک مکعب مستطیل $[a,b]\times[c,d]\times[m,n]$ محدود شده است. همچنین فرض کنیم f روی D مشتقات جزئی پیوسته دارد و D در

مستطیل $[a,b]\times[c,d]$ محدود شده است. انتگرال سطح تابع اسکالر g روی سطح S که با نماد $\int\int_S g(x,y,z)\ d\sigma$ نمایش داده می‌شود، در صورت وجود، عبارت است از

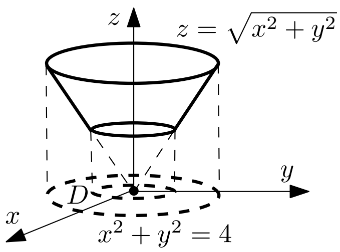
$$\int\int_S g(x,y,z)\ d\sigma := \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\ dA$$

مثال ۵–۴–۳ مطلوب است انتگرال سطح تابع $g(x,y,z)=x^2+z^2$ روی نیم کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$، $(z\geq 0)$.

رویه‌ی S نیم کره‌ی به معادله‌ی $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ است که روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. معادله‌ی دایره‌ی $x^2+y^2=1$ در مختصات قطبی عبارت است از $r=1$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از $\{(r,\theta): 0\leq r\leq 1\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\int\int_S g(x,y,z)d\sigma &= \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dA \\
&= \int\int_D (1-y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dA \\
&= \int\int_D \frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r(1-r^2\sin^2\theta)}{\sqrt{1-r^2}}\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}[-\sin^2\theta(\frac{1}{3}r^2\sqrt{1-r^2}-\frac{2}{3}\sqrt{1-r^2})-\sqrt{1-r^2}]_0^1\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}(-\frac{2}{3}\sin^2\theta+1)\ d\theta = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

مثال ۵–۴–۴ مطلوب است انتگرال سطح تابع $g(x,y,z)=e^{\frac{x^2+y^2}{z}}$ روی بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$ (شکل ۵–۱۴).



شکل ۵–۱۴ بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$.

رویه‌ی S مخروط ناقص به معادله‌ی $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ است که روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد. ناحیه‌ی D در مختصات

قطبی عبارت است از $\{(r,\theta) : ۱ \leq r \leq ۲\ ,\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\int\int_S g(x,y,z)\ d\sigma &= \int\int_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{۱+f_x^۲+f_y^۲}\ dA \\
&= \int\int_D e^{\frac{x^۲+y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}}}\sqrt{۱+\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}+\frac{y^۲}{x^۲+y^۲}}\ dA \\
&= \sqrt{۲}\int\int_D e^{\sqrt{x^۲+y^۲}}\ dA = \sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi}\int_۱^۲ re^r\ dr\ d\theta \\
&= \sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi}[re^r-e^r]_۱^۲\ d\theta = ۲\pi\sqrt{۲}e^۲
\end{aligned}$$

ویژگی‌های انتگرال سطح توابع حقیقی

در مورد انتگرال رویه‌ها از دو ویژگی اساسی زیر در بسیاری از موارد استفاده می‌کنیم.

۱. اگر توابع اسکالر g و h روی رویه‌ی S نمودار تابع $z=f(x,y)$ انتگرال سطح داشته باشند (انتگرال پذیر). آنگاه $g+\lambda h$ نیز روی S انتگرال‌پذیر است و

$$\int\int_S (g+\lambda h)\ d\sigma = \int\int_S g\ d\sigma + \lambda\int\int_S h\ d\sigma$$

۲. اگر تابع اسکالر g روی رویه‌های $S_۱$ و $S_۲$ با مرز مشترک C که C خمی پیوسته است انتگرال پذیر باشد آنگاه g روی $S := S_۱ \cup S_۲$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\int\int_S g\ d\sigma = \int\int_{S_۱} g\ d\sigma + \int\int_{S_۲} g\ d\sigma$$

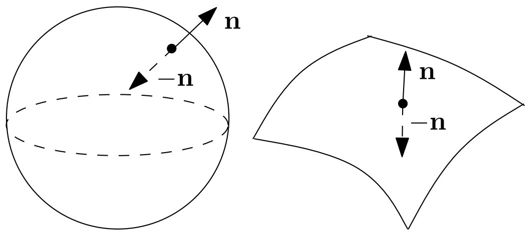
بردار یکه‌ی نرمال رویه و رویه‌های جهت‌پذیر

فرض کنیم رویه‌ی S نمودار تابع $z=f(x,y)$ روی ناحیه‌ی نرمال D در صفحه باشد. در این صورت تابع برداری

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{-f_x(x,y)\mathbf{i}-f_y(x,y)\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{۱+(f_x(x,y))^۲+(f_y(x,y))^۲}}$$

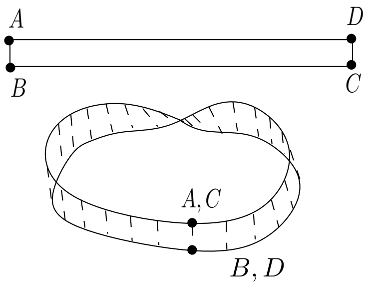
اصطلاحاً **بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای** رویه‌ی S در نقطه‌ی $(x,y,f(x,y))$ نامیده می‌شود. به همین ترتیب تابع برداری $-\mathbf{n}(x,y)$، **بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین** رویه‌ی S در نقطه‌ی $(x,y,f(x,y))$ است (شکل ۵−۱۵). اگر $\mathbf{n}$ پیوسته باشد رویه‌ی S **هموار** نامیده می‌شود. رویه‌ی هموار S **دو طرفه** است هرگاه روی هیچ خم پیوسته‌ای در S، بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای $\mathbf{n}$ به طور پیوسته به بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین $-\mathbf{n}$

تبدیل نشود (شکل ۵—۱۵). سطوح درجه دو مانند کره، بیضی‌گون، سهمی‌گون، زین‌اسبی و... رویه‌های دو طرفه هستند.



شکل ۵—۱۵ بردار نرمال رویه‌ی جهت‌پذیر.

یک مثال معروف برای رویه‌ی یک طرفه **نوار موبیوس** است. برای تجسم نوار موبیوس کافی است لبه‌ی AD از نوار مستطیلی $ABCD\square$ را در $\mathbb{R}^3$ طوری به لبه‌ی BC بچسبانیم که A بر C و B بر D منطبق شوند (شکل ۵—۱۶).



شکل ۵—۱۶ نوار موبیوس (رویه‌ی جهت‌ناپذیر).

برای رویه‌های دو طرفه به طور طبیعی می‌توان دو طرف (جهت) در نظر گرفت.

یک جهت، که آن را جهت مثبت می‌گیریم، جهتی است که بردار $\mathbf{n}$، یکه‌ی نرمال رو به بالای S مشخص می‌کند. جهت دیگر که آن را جهت منفی می‌گیریم، جهتی است که بردار $\mathbf{n}-$، یکه‌ی نرمال رو به پایین S مشخص می‌کند.

مثلاً در کره‌ی S جهتی که بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای S مشخص می‌کند رو به خارج کره است پس جهت مثبت کره سطح خارجی کره است. به این ترتیب اگر کره را همراه با بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای آن مشخص کنیم آن را با جهت مثبت در نظر گرفته‌ایم.

به همین ترتیب جهتی که بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین کره مشخص می‌کند رو به داخل کره است پس جهت منفی کره سطح داخلی کره است. به این ترتیب اگر کره را

همراه با بردار یکه‌ی نرمال رو به پایین (داخل) آن مشخص کنیم آن را با جهت منفی در نظر گرفته‌ایم.

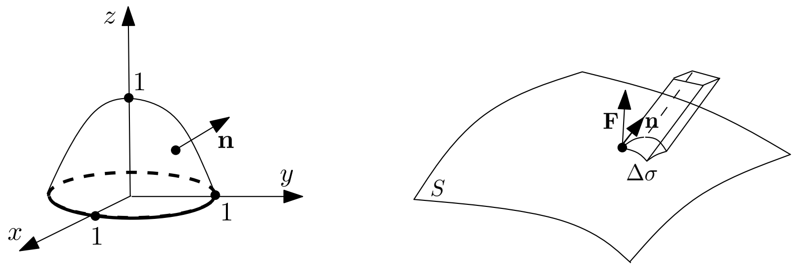
به طور شهودی یک رویه‌ی S، محدود در یک مکعب مستطیل، **بسته** است هرگاه فضای $\mathbb{R}^3$ را به سه ناحیه‌ی درون S، روی S و بیرون S افراز کند. کره و بیضی‌گون مثال‌های ساده از رویه‌های بسته هستند.

۵–۵ شار (فلوی) یک میدان برداری

فرض کنیم $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ یک میدان برداری پیوسته باشد که بر رویه‌ی هموار S با بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای $\mathbf{n}$ تعریف شده است. منظور از **شار** میدان $\mathbf{F}$ که از سطح S می‌گذرد انتگرال سطح زیر است:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

مفهوم شار یک میدان برداری یکی از مفاهیم اساسی در بسیاری از رشته‌های فنی و مهندسی به حساب می‌آید. برای مثال تغییر شار یک میدان مغناطیسی در قاب سیم‌پیچ منجر به تولید برق متناوب می‌شود. به عنوان مثال دیگر، فرض کنیم یک سیال با چگالی ρ و سرعت $\mathbf{v}$ از سطح S عبور می‌کند. برای میدان $\mathbf{F} = \rho\ \mathbf{v}$ عنصر شار $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \Delta\sigma$ مشخص کننده‌ی حجم مایع گذرنده از عنصر سطح $\Delta\sigma$ در واحد زمان است. به عبارت دیگر $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \Delta\sigma$ اِلمان حجم مایع گذرنده از سطح S است (شکل ۵–۱۷).



شکل ۵–۱۷ اِلمان حجم مایع گذرنده از S (المان شار نیروی $\mathbf{F} = \rho\ \mathbf{v}$) و نمودار سهمی‌گون $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ بالای صفحه‌ی xoy.

جمع این اِلمانها در حد، برابر $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ و مشخص کننده‌ی حجم مایع گذرنده از کل سطح S در واحد زمان است.

اگر S نمودار تابع $z = f(x,y)$ روی ناحیه‌ی نرمال D در صفحه‌ی xoy باشد آنگاه:

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}}$$

و در نتیجه به ازای $\mathbf{N} = -f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ داریم:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\left(\frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}}\right)\sqrt{۱ + f_x^۲ + f_y^۲}\,dA \\ &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dA = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA\end{aligned}$$

مثال ۵–۵–۱ شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\ \mathbf{i} + y^۲\ \mathbf{j} + (۱ - z)\ \mathbf{k}$ را از رویه‌ی S، نمودار سهمی‌گون $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ واقع در بالای صفحه‌ی xoy محاسبه کنید. بردار $\mathbf{n}$ را یکه‌ی نرمال رو به بالای S در نظر بگیرید (شکل ۵–۱۷).

از معادله‌ی $z = ۱ - x^۲ - y^۲$، $z \geq ۰$ و جهت $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} + \mathbf{k} = ۲x\ \mathbf{i} + ۲y\ \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = ۲x^۲y + ۲y^۳ + (۱ - z) = ۲x^۲y + ۲y^۳ + (x^۲ + y^۲) = (۲y + ۱)(x^۲ + y^۲)$$

$$D = \{(x,y)\ :\ x^۲ + y^۲ \leq ۱\} = \{(r,\theta)\ :\ ۰ \leq r \leq ۱\ ,\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}\right)\|\mathbf{N}\|\,dA = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA \\ &= \iint_D (۲y + ۱)(x^۲ + y^۲)\,dA \\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ (۲r\sin\theta + ۱)(r^۲)r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{۲}\end{aligned}$$

مثال ۵–۵–۲ شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z) = ۲xy^۲\mathbf{i} + x^۲y\ \mathbf{j} + xyz\ \mathbf{k}$ گذرنده از قطعه صفحه‌ی S به معادله‌ی $x + ۲y + z = ۱$ واقع در یک هشتم اول فضا را محاسبه کنید. بردار $\mathbf{n}$ را یکه‌ی نرمال رو به بالای S، یعنی جهتی که مبدأ را ندارد در نظر بگیرید.

از معادله‌ی $z = ۱ - x - ۲y$ ، $z \geq ۰$ و با توجه به جهت $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + ۲\ \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

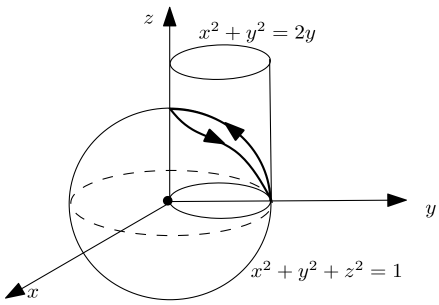
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = x^۲ + y^۲ + xyz = ۲xy^۲ + x^۲y + xy(۱ - x - ۲y) = xy$$

$$D = \{(x,y)\ :\ ۰ \leq x \leq ۱\ , ۰ \leq y \leq \frac{۱}{۲}(۱ - x)\}$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_D \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}\right)\|\mathbf{N}\|\,dA = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA$$

$$\begin{aligned} &= \iint_D xy\ dA = \int_۰^۱ \int_۰^{\frac{۱}{۲}(۱-x)} xy\ dy\ dx \\ &= \int_۰^۱ x[\frac{y^۲}{۲}]_۰^{\frac{۱}{۲}(۱-x)})\ dx = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ x(۱-x)^۲\ dx = \frac{۱}{۲۴} \end{aligned}$$

مثال ۵–۵–۳ فرض کنید S قسمتی از کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴z$ است که به وسیله‌ی استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ در بالای صفحه‌ی xoy محدود می‌شود. شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z) = ۲x\ \mathbf{k}$ گذرنده از رویه‌ی S را محاسبه کنید. بردار $\mathbf{n}$ را یکه‌ی نرمال رو به بالای S (جهتی که مبدأ را ندارد) در نظر بگیرید (شکل ۵–۱۸).



شکل ۵–۱۸ شکل مربوط به مثال ۵–۵–۳.

از معادله‌ی $z = ۲ + \sqrt{۴ - (x^۲ + y^۲)}$ و با توجه به جهت $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود:

$\mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = ۲x$

ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ است و معادله‌ی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ در مختصات قطبی عبارت است از $r^۲ = ۲r\sin\theta$ یعنی $r = ۲\sin\theta$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از $D = \{(r,\theta)\ :\ ۰ \le r \le ۲\sin\theta, ۰ \le \theta \le \pi\}$.

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\ &= \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA = \iint_D ۲x\ dA \\ &= \int_۰^\pi \int_۰^{۲\sin\theta} (۲r\cos\theta)r\ d\mathbf{r}\ d\theta \\ &= \int_۰^\pi \cos\theta[\frac{۲r^۳}{۳}]_۰^{۲\sin\theta}\ d\theta \\ &= \frac{۱۶}{۳}\int_۰^\pi \sin^۳\theta\ \cos\theta\ d\theta = \frac{۴}{۳}[\sin^۴\theta\ ]_۰^\pi = ۰ \end{aligned}$$

چند عملگر برداری مهم

در این بخش به معرفی چند عملگر مهم آنالیز برداری می‌پردازیم که در بیان قضایای واگرایی و استوکس مطرح می‌شوند. می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی V متشکل از توابع حقیقی ۳ متغیره و مجموعه‌ی W متشکل از توابع برداری ۳ متغیره روی میدان $\mathbb{R}$ فضاهای برداری با بعد نامتناهی هستند. در این مجموعه‌ها توابع را بردار در نظر می‌گیریم، جمع برداری همان جمع توابع و ضرب اسکالری ضرب یک عدد در یک تابع است. روی این فضاهای برداری عملگرهای گرادیان ، دیورژانس ، کرل و لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۱) عملگر ∇ (دل)

برای یک تابع حقیقی ۳ متغیره‌ی f که مشتقات جزئی دارد تابع برداری ∇f (گرادیان f) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla f := \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

به طور صوری می‌توان نوشت:

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

می‌توان ∇f را تصویر f به وسیله‌ی عملگر ∇ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\nabla : V \to W \quad ; \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

۲) عملگر div (دیورژانس)

فرض کنیم تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ دارای مشتقات جزئی باشد. در این صورت **دیورژانس (واگرائی)** F که با $\mathrm{div}\ \mathbf{F}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از تابع حقیقی

$$\mathrm{div}\ \mathbf{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

به طور صوری قرار می دهیم

$$\mathrm{div}\mathbf{F} := \nabla \cdot F$$

می‌توان div را یک عملگر به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\mathrm{div}: W \to V \quad ; \quad \mathbf{F} \mapsto \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

۳) عملگر curl (کرل)

برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathbf{i} + Q(x,y,z)\ \mathbf{j} + R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ که روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ توابع P ، Q و R دارای مشتقات جزئی باشند **کرل (پیچش)** F که با $\mathrm{curl}\ \mathbf{F}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از تابع برداری

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} := (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\ \mathbf{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\ \mathbf{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ \mathbf{k}$$

به طور صوری می‌توان نوشت:

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} := \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

در واقع می‌توان curl را یک عملگر به صورت زیر در نظر گرفت

$$\mathrm{curl}: W \to W\ ;\ F \mapsto \nabla\times\mathbf{F} = \mathrm{curl}\ F = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\ \mathbf{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\ \mathbf{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ \mathbf{k}$$

مثال ۵-۵-۴ توابع $\mathbf{F}(x,y,z) = x^۲\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + ۲xz\ \mathbf{k}$ و $f(x,y,z) = xy^۲ + \ln(x+z)$ را در نظر می‌گیریم. مطلوب است ∇f ، $\mathrm{curl}\ \mathbf{F}$ و $\mathrm{div}\ \mathbf{F}$.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = (y^۲ + \frac{۱}{x+z})\ \mathbf{i} + ۲xy\ \mathbf{j} + \frac{۱}{x+z}\ \mathbf{k}$$

برای $P = x^۲$ ، $Q = e^{xz}$ و $R = ۲xz$ داریم

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^۲ & e^{xz} & ۲xz \end{vmatrix} = -xe^{z}\mathbf{i} - ۲z\mathbf{j} + ze^{x}\ \mathbf{k}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۲x + ۰ + ۲x = ۴x$$

اثبات قضیه‌ی زیر را که برخی از روابط مهم بین این عملگر را نشان می‌دهد به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

قضیه ۵-۵-۵ فرض کنیم f و g توابع حقیقی ۳ متغیره باشند که مشتقات جزئی آنها روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ وجود دارند و برای توابع برداری $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ روی یک ناحیه در $\mathbb{R}^3$ همه‌ی مولفه‌ها دارای مشتقات جزئی باشند. در این صورت

۱) $\text{curl}(\nabla f) = 0$.

۲) $\text{div}(\text{curl } \mathbf{F}) = 0$.

۳) برای $\lambda \in \mathbb{R}$، $\nabla(f + \lambda g) = \nabla f + \lambda \nabla g$، $\text{curl}(\mathbf{F} + \lambda\mathbf{G}) = \text{curl } \mathbf{F} + \lambda \text{curl } \mathbf{G}$ و $\text{div}(\mathbf{F} + \lambda\mathbf{G}) = \text{div } \mathbf{F} + \lambda \text{div } \mathbf{G}$

۴) $\text{div } (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{curl } \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{curl } \mathbf{G}$.

۵) $\text{div } (f\mathbf{F}) = f \text{ div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$.

۶) $\text{curl } (f\mathbf{F}) = f \text{ curl } \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.

۵-۶ قضیه‌ی واگرایی گاوس (قضیه‌ی دیورژانس)

در این بخش به یکی از قضایای مهم آنالیز برداری موسوم به قضیه‌ی واگرایی گاوس می‌پردازیم. ابتدا حالت خاص این قضیه را در صفحه بیان می‌کنیم که شکل دیگری از قضیه‌ی گرین است. فرض کنیم مرز ناحیه‌ی D یک خم بسته و قطعه به قطعه هموار C به طول L باشد. همچنین فرض کنیم خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ باشد که با پارامتر طول قوس روی $[0, L]$ بیان شده است. علاوه بر این فرض می‌کنیم توابع P و Q مولفه‌های میدان برداری $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\ \mathbf{i} + Q(x,y)\ \mathbf{j}$ روی D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در بخش قبل دیدیم که $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. به این ترتیب

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = (x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (P(x,y)\ \mathbf{i} + Q(x,y)\ \mathbf{j}) \cdot (y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}) = -Q(x,y)x'(s) + P(x,y)y'(s)$$

بنابر این طبق قضیه‌ی گرین داریم

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds &= \int_C (-Q)\ dx\ + P\ dy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right)\ dA \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\ dA = \iint_D \text{div } \mathbf{F}\ dA
\end{aligned}$$

اکنون قضیه‌ی واگرایی گاوس را در فضا به عنوان تعمیم حالت قبل مطرح می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم T ناحیه‌ای $x-$ ساده، $y-$ ساده و $z-$ ساده باشد. برای این ناحیه‌ی $x-$ ساده، ناحیه‌ی $D_{yz} \subset \mathbb{R}^2$ از صفحه‌ی yoz و توابع $h_1, h_2 : D_{yz} \to \mathbb{R}$ وجود دارند که

$$T = \{(x, y, z) \int \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D_{yz} \ , \ h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}$$

با استفاده از قضیه‌ی فوبینی برای تابع پیوسته‌ی $\dfrac{\partial P}{\partial x}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz &= \iint_{D_{yz}} \Big(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\Big)\, dydz \\
&= \iint_{D_{yz}} \big(P(h_2(y,z), y, z) - P(h_1(y,z), y, z)\big)\, dydz
\end{aligned}$$

از سوی دیگر، رویه‌ی S را می‌توانیم به صورت اجتماع رویه‌های S_1، نمودار تابع $h_1 : D_{yz} \to \mathbb{R}$، S_2، نمودار تابع $h_2 : D_{yz} \to \mathbb{R}$ و $S_3 := S - (S_1 \cup S_2)$ بیان کنیم. در این صورت قائم یکه بر رویه‌ی S_1 در جهت خارج S از رابطه‌ی

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_1}{\partial z})^2}}(-i + \frac{\partial h_1}{\partial y} j + \frac{\partial h_1}{\partial z} k)$$

و قائم یکه بر S_2 در جهت خارج S از رابطه‌ی

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_2}{\partial z})^2}}(i - \frac{\partial h_2}{\partial y} j - \frac{\partial h_2}{\partial z} k)$$

به دست می‌آیند. اگر $S_3 \neq \emptyset$ آنگاه قائم یکه بر قطعات هموار تشکیل دهنده‌ی رویه‌ی S_3 بر بردار $\mathbf{i}$ عمود خواهند بود. به این ترتیب، برای میدان $\mathbf{F}_1 := P\mathbf{i}$،

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{S_1} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_3} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \iint_{S_1} \frac{-P}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_1}{\partial z})^2}}\, d\sigma + \iint_{S_2} \frac{P}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial h_2}{\partial z})^2}}\, d\sigma \\
&= -\iint_{D_{yz}} P(h_1(y,z), y, z)\, dydz + \iint_{D_{yz}} P(h_2(y,z), y, z)\, dydz
\end{aligned}$$

پس

$$\iint_S (P\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz \qquad (0)$$

به همین ترتیب، با در نظر گرفتن میدان $\mathbf{F}_۲ := Q\mathbf{j}$ بر ناحیه‌ی D به عنوان یک ناحیه‌ی $y-$ ساده و میدان $\mathbf{F}_۳ := R\mathbf{k}$ بر D به عنوان یک ناحیه‌ی $z-$ ساده، روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\iint_S (Q\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz \qquad (۱)$$

$$\iint_S (R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz \qquad (۲)$$

با جمع طرفین روابط (۰)، (۱) و (۲)، خواهیم داشت

$$\iint_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\, dV = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV$$

این رابطه که به قضیه‌ی واگرائی گاوس معروف است، برای نواحی کلی‌تر، با تقسیم ناحیه به اجتماعی از نواحی از نوع فوق و با استفاده از خواص انتگرال رویه و با همان ایده‌ای که برای قضیه‌ی گرین مشاهده کردیم به دست می‌آید. این رابطه در قضیه‌ی زیر بیان شده است.

قضیه ۵-۶-۱ **(واگرائی گاوس)** فرض کنیم S رویه‌ای بسته، جهت‌پذیر و قطعه به قطعه هموار در برگیرنده ناحیه‌ی T و $\mathbf{n}$ قائم یکه بر S همه جا رو به سمت بیرون S باشد. اگر مولفه‌های میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ بر مجموعه‌ای باز در برگیرنده‌ی D مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول پیوسته داشته باشند آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV$$

مثال ۵-۶-۲ اگر T ناحیه‌ی خارج استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و داخل کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و S رویه‌ی محصور کننده‌ی T باشد، برای میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+yz)\,\mathbf{i} + (y+xz)\,\mathbf{j} + (z+xy)\,\mathbf{k}$ به ازای $\mathbf{n}$، بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای S مطلوب است $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; d\sigma$.

برای $P = x + yz$، $Q = y + xz$ و $R = z + xy$، $\mathrm{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۳$.

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ ۱ \le x^۲ + y^۲ \le ۴\ ,\ -\sqrt{۴ - (x^۲ + y^۲)} \le z \le \sqrt{۴ - (x^۲ + y^۲)}\} \\ &= \{(r,\theta,z)\ :\ ۱ \le r \le ۲\ ,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\ ,\ -\sqrt{۴ - r^۲} \le z \le \sqrt{۴ - r^۲}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = ۳\iiint_T dV \\
&= ۳\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۱}^{۲}\int_{-\sqrt{۴-r^۲}}^{\sqrt{۴-r^۲}} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= ۳\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۱}^{۲} ۲r\sqrt{۴-r^۲}\, dr\theta \\
&= ۲(\int_{۰}^{۲\pi} d\theta)\, [-(۴-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}]_۱^۲ \\
&= ۱۲\pi\sqrt{۳}
\end{aligned}$$

مثال ۵-٦-۳ فرض کنیم S بخشی از سطح بیضی‌گون $۴x^۲+۴y^۲+z^۲=۵$ باشد که در ناحیه‌ی $z\geq ۱$ قرار دارد، $\mathbf{n}$ قائم یکه‌ی رو به بالای سطح S و $\mathbf{F}(x,y,z)=۲xyz\,\mathbf{i}+(z-y^۲z)\,\mathbf{j}+z^۲\,\mathbf{k}$. مطلوب است $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$.

فرض کنیم رویه‌ی S' بخشی از صفحه‌ی $z=۱$ محدود به بیضی‌گون $۴x^۲+۴y^۲+z^۲=۵$ و $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$ یکه‌ی نرمال پایینی آن باشد. در این صورت $S\cup S'$ یک رویه‌ی بسته و قطعه قطعه هموار است که $\mathbf{n}$ همه جا رو به خارج رویه است. پس به ازای $P=۲xyz$ ، $Q=z-y^۲z$ و $R=z^۲$ که مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط قضیه‌ی واگرایی برای ناحیه‌ی T شامل $S\cup S'$ و درون آن برقرار است. از سوی دیگر

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=۲z$$

$$\begin{aligned}
T &= \{(x,y,z)\ :\ ۰\leq x^۲+y^۲\leq ۱\ ,\ ۱\leq z\leq\sqrt{۵-۴(x^۲+y^۲)}\ \\
&= \{(r,\theta,z)\ :\ ۰\leq r\leq ۱\ ,\ ۰\leq\theta\leq ۲\pi\ ,\ ۱\leq z\leq\sqrt{۵-۴r^۲}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S\cup S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_T ۲z\, dV \\
&= \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}\int_{۱}^{\sqrt{۵-۴r^۲}} ۲zr\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱} r\sqrt{۴-۴r^۲}\, dr\, d\theta \\
&= (\int_{۰}^{۲\pi} d\theta)\, [-\frac{۱}{۱٦}(۴-۴r^۲)^۲]_۰^۱ = ۲\pi
\end{aligned}$$

همچنین برای S' که بخشی از صفحه‌ی $z = ۱$ است،

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = \iint_{S'} (-z^{۲})\ d\sigma = -\iint_{S'}\ d\sigma = -\pi$$

زیرا $\iint_{S'}\ d\sigma$ مساحت دایره‌ی S' است. به این ترتیب

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = \iint_{S'\cup S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma - \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = ۳\pi$$

مثال ۵–٦–۴ شار رو به بیرون نیروی

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x(y^{۲}+z^{۲})\ \mathbf{i} + y(x^{۲}+z^{۲})\ \mathbf{j} + z(x^{۲}+y^{۲})\ \mathbf{k}$$

را که از کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = k^{۲}$ می‌گذرد به دست آورید.

کره‌ی S به معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = k^{۲}$ یک رویه‌ی بسته و هموار است که $\mathbf{n}$، بردار نرمال یکه‌ی آن همه جا رو به خارج رویه است. پس به ازای $P = x(y^{۲}+z^{۲})$ ، $Q = y(x^{۲}+z^{۲})$ و $R = z(x^{۲}+y^{۲})$ که مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط قضیه‌ی واگرایی برای ناحیه‌ی T شامل S و درون آن برقرار است. از سوی دیگر

$$\operatorname{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (y^{۲}+z^{۲}) + (x^{۲}+z^{۲}) + (x^{۲}+y^{۲}) = ۲(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})$$

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ ۰ \le x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \le k^{۲}\ \} \\ &= \{(\rho,\theta,\varphi)\ :\ ۰ \le \rho \le k\ ,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\ ,\ ۰ \le \varphi \le \pi\} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \iiint_{T} \operatorname{div}\ \mathbf{F}\ dV = \iiint_{T} ۲(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\ dV \\ &= ۲\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{k} (\rho^{۲})(\rho^{۲}\sin\varphi)\ d\rho\ d\theta\ d\varphi \\ &= ۲\Big(\int_{۰}^{\pi} \sin\varphi\ d\varphi\Big)\ \Big(\int_{۰}^{۲\pi}\ d\theta\Big)\ \Big(\int_{۰}^{k} \rho^{۴}\ d\rho\Big) = \frac{۸\pi k^{۵}}{۵} \end{aligned}$$

مثال ۵–٦–۵ شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z) = x\ \mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ گذرنده از رویه‌ی بسته‌ی S را محاسبه کنید به قسمی که S اجتماع قسمتی از استوانه‌ی $x^{۲}+y^{۲} = ۲$ است که به وسیله‌ی صفحات $z = \pm ۱$ محدود می‌شود همراه با قسمتی از صفحات $z = \pm ۱$ محدود به این استوانه. بردار $\mathbf{n}$ را همه جا یکه‌ی نرمال رو به خارج S (یعنی ناحیه‌ای که مبدأ را ندارد) در نظر بگیرید.

رویه‌ی S یک رویه‌ی بسته و قطعه‌ای هموار است که $\mathbf{n}$ همه جا رو به خارج رویه است. پس برای $P = x$ ، $Q = y$ و $R = z$ که مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط قضیه‌ی واگرایی برای ناحیه‌ی T شامل S و درون آن برقرار است. از سوی دیگر داریم:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$T = \{(x, y, z) \ : \ ۰ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۲ \ , -۱ \leq z \leq ۱\}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iiint_T \text{div } \mathbf{F} \, dV \\ &= ۳ \iiint_T dV = ٦\pi \end{aligned}$$

آخرین قضیه‌ای که در این بخش مورد توجه قرار می‌دهیم قضیه‌ی استوکس است. فرض کنیم S رویه‌ای قطعه به قطعه هموار و جهت‌پذیر و C خم مرزی آن باشد. قضیه‌ی استوکس بیانگر این است که برای یک میدان برداری $\mathbf{F}$، تعریف شده در یک همسایگی رویه‌ی S و خم C، کار حاصل از این میدان روی خم بسته‌ی C برابر شار حاصل از میدان $\text{curl}\mathbf{F}$ است که از رویه‌ی S می‌گذرد. در اینجا جهت حرکت روی خم C و جهت قائم یکه بر قطعات هموار تشکیل دهنده‌ی S سازگار و بر مبنای قانون دست راست تعیین می‌گردند.

برای مشاهده‌ی طرحی از اثبات این ویژگی، فرض کنیم S قسمتی از رویه‌ای به معادله‌ی $z = f(x, y)$ با شرط $(x, y) \in D$ باشد که در آن D ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه‌ی xoy و f تابعی مشتق‌پذیر بر D است. همچنین فرض کنیم قائم یکه بر S در جهت مثبت محور z باشد. به این ترتیب، در هر نقطه‌ی دلخواه $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y)) \in S$ داریم

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^۲(x, y) + f_y^۲(x, y) + ۱}}$$

با توجه به این که برای دو میدان مشتق‌پذیر $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ داریم $\text{curl}(\mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲) = \text{curl}\mathbf{F}_۱ + \text{curl}\mathbf{F}_۲$، قضیه‌ی استوکس را برای سه میدان برداری $\mathbf{F}_۱ = P\mathbf{i}$، $\mathbf{F}_۲ = Q\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_۳ = R\mathbf{k}$ به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

برای میدان $\mathbf{F}_۱ = P\mathbf{i}$،

$$\text{curl}\mathbf{F}_۱ = \nabla \times (P\mathbf{i}) = det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{k}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl}\mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma &= -\iint_S \Big(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\frac{۱}{\sqrt{f_x^۲(x,y) + f_y^۲(x,y) + ۱}}\, d\sigma \\ &= \iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,f(x,y))\Big)\, dxdy \end{aligned}$$

فرض کنیم $C_۱$ خم مرزی ناحیه‌ی D توسط معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ با $t \in [a,b]$ بیان شده باشد. در این صورت خم C، مرز رویه‌ی S، دارای معادلات پارامتری $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = f(x(t), y(t))$ برای $t \in [a,b]$، خواهد بود. بنابر این

$$\int_C \mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{dr} = \int_a^b P\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)x'(t)\, dt = \int_{C_۱} P\big(x,y,f(x,y)\big)dx$$

با استفاده از قضیه‌ی گرین، عبارت اخیر را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

$$\begin{aligned} \int_{C_۱} P\big(x,y,f(x,y)\big)dx &= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big(P\big(x,y,f(x,y)\big)\Big)dxdy \\ &= -\iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,f(x,y))\Big)\, dxdy \end{aligned}$$

پس

$$\iint_S (\text{curl}\mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \int_C \mathbf{F}_۱ \cdot \mathbf{dr}$$

برای میدان $\mathbf{F}_۲ = Q\mathbf{j}$، به شکل مشابه،

$$\iint_S (\text{curl}\mathbf{F}_۲ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,f(x,y))\Big)\, dxdy$$

همچنین

$$\int_C \mathbf{F}_۲ \cdot \mathbf{dr} = \int_a^b Q\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) y'(t)\, dt = \int_{C_۱} Q\big(x, y, f(x, y)\big)\, dy$$

مقدار انتگرال اخیر نیز با استفاده از قضیه‌ی گرین برابر خواهد بود با

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\Big(Q\big(x, y, f(x, y)\big)\Big)\, dxdy = \iint_D \big(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\big)\, dxdy$$

به این ترتیب تساوی مورد نظر برای میدان $\mathbf{F}_۲$ نیز اثبات می‌شود. سرانجام برای میدان $\mathbf{F}_۳ = R\mathbf{k}$ خواهیم داشت

$$\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F}_۳ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_D \big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\big)\, dxdy$$

و

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}_۳ \cdot \mathbf{dr} &= \int_a^b R\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)\, z'(t)\, dt \\
&= \int_a^b R\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)\big)\, dt \\
&= \int_{C_۱} R\big(x, y, f(x, y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + R\big(x, y, f(x, y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}\, dy \\
&= \iint_D \big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - R\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}\big) dxdy
\end{aligned}$$

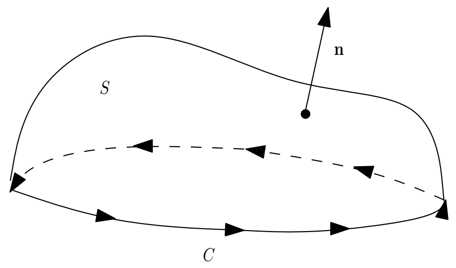
تساوی آخر با استفاده از قضیه‌ی گرین به دست آمده است. حال اگر برای تابع مشتق‌پذیر f داشته باشیم $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ آنگاه عبارت آخر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\iint_D \big(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\big)\, dxdy$$

که بنابر روابط فوق برابر همان $\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F}_۳ \cdot \mathbf{n})\, d\sigma$ است و در نتیجه این خاصیت برای میدان $\mathbf{F}_۳$ نیز برقرار خواهد بود. به این ترتیب، قضیه‌ی استوکس برای میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ثابت می‌شود. همین استدلال برای رویه‌ی S به معادله‌ی $y = f(x, z)$، $(x, z) \in D$، و یا رویه به معادله‌ی $x = f(y, z)$، $(y, z) \in D$ نیز قابل بیان است. با کمی تغییر در استدلال، حالت کلی‌تر این قضیه با تقسیم رویه‌ی S به قطعات کوچکتر که در یکی از خاصیت‌های فوق صدق کنند و بدون شرط اضافی برای تابع f قابل اثبات است. بنابر آنچه گفته شد قضیه استوکس به شکل زیر مطرح می‌شود.

قضیه ۵–۶–۶ (**استوکس**) فرض کنیم S رویه‌ای قطعه قطعه هموار در $\mathbb{R}^۳$ باشد که مرز آن خم قطعه هموار و بسته‌ی C است. همچنین فرض کنیم همه‌ی مولفه‌های تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\ \mathbf{i}+Q(x,y,z)\ \mathbf{j}+R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ روی S دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. در این صورت اگر C در جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ ، بردار یکه‌ی نرمال رو به بالای S پیموده شود (شکل ۵–۱۹)، (یعنی اگر ناظری در آن جهت روی C حرکت کند S را سمت چپ خود ببیند) آنگاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r}=\iint_S \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$



شکل ۵–۱۹ شار گذرنده‌ی F از S برابر کار F روی مرز S است.

مثال ۵–۶–۷ قضیه‌ی استوکس را برای $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}+x^۳y^۲\ \mathbf{j}+z\ \mathbf{k}$ و S نیمه‌ی بالایی بیضی‌گون $۴x^۲+y^۲+z^۲=۴$ تحقیق کنید.

نیمه‌ی بالایی بیضی‌گون S به معادله‌ی $۴x^۲+y^۲+z^۲=۴$ یک رویه‌ی هموار و مرز S بیضی C به معادله‌ی $۴x^۲+y^۲=۴$ است. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج رویه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P=۱$ ، $Q=x^۳y^۲$ و $R=z$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. همچنین رویه‌ی S نمودار تابع $z=\sqrt{۴-y^۲-۴x^۲}$ روی ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\ :\ ۰\le ۴x^۲+y^۲\le ۴\}$ است. پس $D=\{(x,y)\ :\ -۱\le x\le ۱\ ,\ -۲\sqrt{۱-x^۲}\le y\le ۲\sqrt{۱-x^۲}\}$. خم C را می‌توان به صورت $x=\cos t$ و $y=۲\sin t$ روی $[۰,۲\pi]$ پارامتریزه کرد. از سوی دیگر

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ۱ & x^۳y^۲ & z\end{vmatrix}=۳x^۲y^۲\ \mathbf{k}\quad,\quad \mathbf{N}=-z_x\ \mathbf{i}-z_y\ \mathbf{j}+\ \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \iint_D \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot(\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA\\ &= \iint_D \mathrm{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA=\iint_D ۳x^۲y^۳\ dA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-۱}^{۱}\int_{-۲\sqrt{۱-x^۲}}^{۲\sqrt{۱-x^۲}} ۳x^۲y^۲\ dy\ dx \\ &= \int_{-۱}^{۱} x^۲[y^۳]_{-۲\sqrt{۱-x^۲}}^{۲\sqrt{۱-x^۲}}\ dx \\ &= ۱۶\int_{-۱}^{۱} x^۲(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}\ dx \\ &= ۳۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۴ t\sin^۲ t\ dt = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} &= \int_C P\ dx\ + Q\ dy + R\ dz \\ &= \int_C\ dx\ + x^۳y^۲\ dy + z\ dz \\ &= \int_{\circ}^{۲\pi} (-\sin t + ۸\cos^۴ t\sin^۲ t)\ dt \\ &= ۳۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۴ t\sin^۲ t\ dt = \pi \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r} = \int\int_S \text{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

مثال ۵-۶-۸ خم C از تلاقی نیم‌کره‌ی بالایی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴z$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲ = ۲y$ حاصل شده است. مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot\ d\mathbf{r}$ برای $\mathbf{F}(x,y,z) = ۲x\mathbf{i} + (۳y+x^۲)\ \mathbf{j} + ۴z\ \mathbf{k}$.

نیمه‌ی بالایی کره‌ی S به معادله‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴z$ یک رویه‌ی هموار است که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C می‌باشد. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج رویه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P = ۲x$ ، $Q = ۳y+x^۲$ و $R = ۴z$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این شرایط قضیه‌ی استوکس برای S و مرز آن C برقرار است. رویه‌ی S نمودار تابع $z = ۲+\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ است روی ناحیه‌ی D محدود به دایره‌ی $x^۲+y^۲ = ۲y$. معادله‌ی دایره‌ی $x^۲+y^۲ = ۲y$ در مختصات قطبی عبارت است از $r^۲ = ۲r\sin\theta$ یعنی $r = ۲\sin\theta$. بنابر این ناحیه‌ی D در مختصات قطبی عبارت است از:

$$D = \{(r,\theta)\ :\ \circ \le r \le ۲\sin\theta, \circ \le \theta \le \pi\}$$

از سوی دیگر

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۲x & ۳y + x^{۲} & ۴z \end{vmatrix} = ۲x\ \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{N} = -z_x\ \mathbf{i} - z_y\ \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot\ d\mathbf{r} &= \int\!\!\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma = \int\!\!\int_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot (\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\ &= \int\!\!\int_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dA = \int\!\!\int_D ۲x\ dA \\ &= \int_{\circ}^{\pi} \int_{\circ}^{۲\sin\theta} ۲r\cos\theta r\ dr\ d\theta \\ &= \int_{\circ}^{\pi} [\frac{۲}{۳} r^{۳}]_{\circ}^{۲\sin\theta} \cos\theta\ d\theta \\ &= \frac{۱۶}{۳} \int_{\circ}^{\pi} \cos t \sin^{۳} t\ dt = \frac{۴}{۳}[\sin^{۴} t]_{\circ}^{\pi} = \circ \end{aligned}$$

مثال ۵-۶-۹ خم C از تلاقی صفحه‌ی $۲x + ۲y + z = ۶$ و صفحه‌های xoy، xoz و zoy حاصل شده است. برای $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^{۲}\mathbf{i} + z\ \mathbf{j} + x\ \mathbf{k}$ مطلوب است $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

صفحه‌ی $۲x + ۲y + z = ۶$ یک رویه‌ی هموار است که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C است. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج صفحه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P = -y^{۲}$ ، $Q = z$ و $R = x$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابر این شرایط قضیه‌ی استوکس برای S و مرز آن C برقرار است. صفحه‌ی S نمودار تابع $z = ۶ - ۲x - ۲y$ است روی ناحیه‌ی D محدود به مثلث $۲x + ۲y = ۶$ ، یعنی $D = \{(x, y)\ :\ \circ \leq x \leq ۳\ ,\ \circ \leq y \leq ۳ - x\}$.

از سوی دیگر

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^{۲} & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲y\,\mathbf{k} \ ,\ \mathbf{N} = -z_x\,\mathbf{i} - z_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = ۲\,\mathbf{i} + ۲\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int\!\!\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma = \int\!\!\int_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot (\frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|})\|\mathbf{N}\|\ dA \\ &= \int\!\!\int_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dA = \int\!\!\int_D (۲y - ۴)\ dA \\ &= \int_{\circ}^{۳} \int_{\circ}^{۳-y} (۲y - ۴)\ dy\ dx = \int_{\circ}^{۳} (-۲y^{۲} + ۱\circ y - ۱۲)\ dy = -۹ \end{aligned}$$

مثال ۵–۶–۱۰ خم C از تلاقی صفحه‌ی $x+y+z=1$ و سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ حاصل شده است. برای $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}$ مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C می‌باشد یک رویه‌ی هموار است. اگر $\mathbf{n}$ را همه جا رو به خارج صفحه‌ی S بگیریم (جهتی که مبداء را در بر ندارد) آنگاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ روی C مثبت است. توابع $P=-y$ ، $Q=x$ و $R=-z$ مشتقات جزئی پیوسته دارند.

بنابر این شرایط قضیه‌ی استوکس برای S و مرز آن C برقرار است. بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=1$ که مرز آن خم هموار و بسته‌ی C می‌باشد نمودار تابع $z=1-x-y$ است.

برای به دست آوردن ناحیه‌ی D ، از معادلات $x+y+z=1$ و $z=x^2+y^2$ داریم $1-x-y=x^2+y^2$ یعنی $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$.

پس ناحیه‌ی D عبارت است از درون و روی دایره‌ی $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$.

از سوی دیگر

$$\text{curl}\ \mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & -z\end{vmatrix}=2\,\mathbf{k}\quad,\quad \mathbf{N}=-z_x\,\mathbf{i}-z_y\,\mathbf{j}+\,\mathbf{k}=\mathbf{i}+\,\mathbf{j}+\,\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S \text{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \iint_D \text{curl}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dA\\ &= 2\iint_D\ dA=2(\frac{3}{2}\pi)=3\pi\end{aligned}$$

قضیه‌ی استوکس به عنوان تعمیم دیگری از قضیه‌ی گرین

فرض کنیم C یک خم مسطح، بسته و قطعه قطعه هموار باشد. رویه‌ی S را بخشی از صفحه‌ی محدود به C و ناحیه‌ی D را درون C در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم توابع P و Q مولفه‌های میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\ \mathbf{i}+Q(x,y)\ \mathbf{j}=P(x,y)\ \mathbf{i}+Q(x,y)\ \mathbf{j}+0\mathbf{k}$ روی D مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در این صورت:

$$\text{curl}\ \mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial Q}{\partial z}\ \mathbf{i}+\frac{\partial P}{\partial z}\ \mathbf{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\ \mathbf{k}$$

و طبق قضیه‌ی گرین داریم

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ dA \\ &= \int\int_S \text{curl }\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{n}=\mathbf{k}$. به عبارت دیگر می‌توان قضیه‌ی استوکس را تعمیم دیگری برای قضیه‌ی گرین در فضای $\mathbb{R}^۳$ در نظر گرفت.

تعریف معادل و تعبیر فیزیکی دیورژانس

فرض کنیم T_ρ کره‌ی به شعاع ρ و مرکز $P=(x,y,z)$ ، S_ρ سطح این کره و $\mathbf{n}$ بردار یکه‌ی نرمال رو به خارج S_ρ باشد. همچنین فرض کنیم همه‌ی مولفه‌های تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\ \mathbf{i}+Q(x,y,z)\ \mathbf{j}+R(x,y,z)\ \mathbf{k}$ روی S_ρ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. شعاع این کره عبارت است از $V(T_\rho)=\frac{۴}{۳}\pi\rho^۳$. بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین در مورد انتگرال‌های سه‌گانه، برای تابع پیوسته‌ی $\text{div }\mathbf{F}$ یک $(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\in T_\rho$ وجود دارد به قسمی که

$$\begin{aligned}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma &= \int\int\int_{T_\rho}\text{div }\mathbf{F}\ dV \\ &= \text{div }\mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)\int\int\int_{T_\rho}\ dV \\ &= \text{div }\mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)V(T_\rho)\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\text{div }\mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)=\frac{۱}{V(T_\rho)}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

باحدگیری از دو طرف تساوی فوق داریم

$$\text{div }\mathbf{F}(x,y,z)=\lim_{\rho\to ۰}\text{div }\mathbf{F}(x_\rho,y_\rho,z_\rho)=\lim_{\rho\to ۰}\frac{۱}{V(T_\rho)}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

که به تعریف دیگری برای $\text{div }F$ به صورت زیر منجر می‌شود.

$$\text{div }\mathbf{F}(x,y,z)=\lim_{\rho\to ۰}\frac{۱}{V(T_\rho)}\int\int_{S_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

با این رابطه به درک عمیق‌تری از مفهوم $\text{div }\mathbf{F}$ دست می‌یابیم.

اگر $\mathbf{F}$ شار سرعت یک سیال باشد ، در حالتی که $\text{div } \mathbf{F} = ۰$، شار وارد شده به هر گوی بسته با شار خارج شده از آن برابر است. به عبارت دیگر سیال **تراکم ناپذیر** است.

در حالتی که $\text{div } \mathbf{F}(P) > ۰$، شار وارد شده به گویی حاوی P از شار خارج شده از آن کمتر است. به عبارت دیگر سیال در P **چشمه (منبع)** دارد. در این حالت سیال در P به سمت خارج واگرایی مثبت دارد.

و سر انجام در حالتی که $\text{div } \mathbf{F}(P) < ۰$، شار وارد شده به گویی حاوی P از شار خارج شده از آن بیشتر است. به عبارت دیگر سیال در P **چاله** دارد. در این حالت سیال در P به سمت خارج واگرایی منفی دارد ، یعنی به سمت داخل همگرایی دارد.

تعریف معادل و تعبیر فیزیکی کرل

حال فرض کنیم S_ρ قرص به شعاع ρ و مرکز $P = (x, y, z)$ ، C_ρ دایره‌ی مرزی این قرص با جهت القا شده به وسیله‌ی $\mathbf{n}$ ، بردار یکه‌ی نرمال S_ρ باشد. همچنین فرض کنیم همه‌ی مولفه‌های تابع برداری $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\ \mathbf{i} + Q(x, y, z)\ \mathbf{j} + R(x, y, z)\ \mathbf{k}$ روی S_ρ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. مساحت قرص S_ρ عبارت است از $A(S_\rho) = ۴\pi\rho^۲$. بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین در مورد انتگرال‌های دوگانه، برای تابع پیوسته‌ی $\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ یک $(x_\rho, y_\rho, z_\rho) \in S_\rho$ وجود دارد به قسمی که

$$\begin{aligned}
\int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int\!\!\int_{S_\rho} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma \\
&= (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho) \int\!\!\int_{S_\rho} d\sigma \\
&= (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\ A(S_\rho)
\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho) = \frac{۱}{A(S_\rho)} \int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

باحدگیری از دو طرف تساوی فوق داریم

$$(\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x, y, z) = \lim_{\rho \to ۰} (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x_\rho, y_\rho, z_\rho) = \lim_{\rho \to ۰} \frac{۱}{A(S_\rho)} \int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

که به تعریف دیگری برای $\text{curl } \mathbf{F}$ به صورت زیر منجر می‌شود.

$$(\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x, y, z) = \lim_{\rho \to ۰} \frac{۱}{A(S_\rho)} \int_{C_\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

با این رابطه نیز به درک عمیق‌تری از مفهوم $\text{curl } \mathbf{F}$ دست می‌یابیم.

اگر $\mathbf{F}$ شار سرعت یک سیال باشد، در حالتی که $\mathbf{F}$ هیچ مولفه‌ای هم راستا با بردار مماس بر C_ρ نداشته باشد $\int_{C_\rho} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = ۰$ و در نتیجه $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$. در این حالت از $\int_{C_\rho} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = ۰$ (معادل آن $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$) نتیجه می‌شود که سیال حول محور $\mathbf{n}$ روی C_ρ پیچش ندارد.

در حالتی که $\mathbf{F}$ مولفه‌ای هم‌جهت با بردار مماس بر C_ρ داشته باشد، $\int_{C_\rho} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} > ۰$ و در نتیجه $\text{curl } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} > ۰$. در این حالت از $\int_{C_\rho} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} > ۰$ (معادل آن $\text{curl } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} > ۰$) نتیجه می‌شود که سیال حول محور $\mathbf{n}$ روی C_ρ و در جهت آن پیچش دارد.

در حالت سوم که $\mathbf{F}$ مولفه‌ای در خلاف جهت بردار مماس بر C_ρ داشته باشد، $\int_{C_\rho} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} < ۰$ و در نتیجه $\text{curl } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} < ۰$. در این حالت از $\int_{C_\rho} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} < ۰$ (معادل آن $\text{curl } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} < ۰$) نتیجه می‌شود که سیال حول محور $\mathbf{n}$ روی C_ρ و در خلاف جهت آن پیچش دارد.

۵–۷ عملگرهای برداری دردستگاه‌های مختصاتی غیر دکارتی

پیش از این مشاهده کردیم که هر سه بردار مستقل خطی در فضای $\mathbb{R}^۳$ تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند. یعنی هر بردار دلخواه در این فضا را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی این سه بردار بیان کنیم. در دستگاه مختصات دکارتی سه بردار یکه و متعامد $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ پایه‌ی استاندارد فضای $\mathbb{R}^۳$ است. دراین بخش ابتدا به معرفی سه بردار یکه و متعامد مناسب برای دستگاه مختصات کروی می‌پردازیم.

بردار موضع نقطه‌ای مانند (x, y, z) در دستگاه دکارتی بر حسب متغیرهای ρ، ϕ و θ به شکل زیر قابل بیان است.

$$r(\rho,\phi,\theta) = x(\rho,\phi,\theta)i + y(\rho,\phi,\theta)j + z(\rho,\phi,\theta)k$$

اگر دو مولفه‌ی ϕ و θ را ثابت نگه داریم آنگاه تابع برداری $\mathbf{r}$ بر حست متغیر ρ خمی را در فضا مشخص می‌کند. بردار مماس یکه بر این خم در هر نقطه را با نماد $\hat{\mathrm{e}}_\rho$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب، با ثابت نگه داشتن متغیرهای ρ و θ و تغییر ϕ، بردار $\hat{\mathrm{e}}_\phi$ را بردار مماس یکه بر خم حاصل در هر نقطه از آن تعریف می‌کنیم. بردار $\hat{\mathrm{e}}_\theta$ به نحو مشابه تعریف

می‌شود. به این ترتیب، با توجه به روابط

$$x(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\cos\theta \quad , \quad y(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad z(\rho,\phi,\theta)=\rho\cos\phi$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_\rho &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\|} = \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j}+\cos\phi\,\mathbf{k}\\
\hat{\mathbf{e}}_\phi &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\|} = \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i}+\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j}-\sin\phi\,\mathbf{k}\\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\|} = -\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

که با استفاده از نماد ماتریسی معادل است با

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{e}}_\rho\\ \hat{\mathbf{e}}_\phi\\ \hat{\mathbf{e}}_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

با توجه به معادلات فوق مشاهده می‌شود که سه بردار $\hat{\mathbf{e}}_\rho$، $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ دو به دو بر هم عمود هستند و در نتیجه در هر نقطه‌ی (ρ,ϕ,θ) از فضا، این سه بردار تشکیل یک دستگاه متعامد یکه در آن نقطه می‌دهند. بنابر این، هر بردار در فضا را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی از این سه بردار بیان کنیم.

در این بخش به محاسبه‌ی ∇f، $\mathrm{div}\mathbf{F}$ و $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ در سیستم مختصات کروی می‌پردازیم. توجه می کنیم که اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ در ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ تعریف باشد آنگاه در سیستم مختصات کروی این میدان به صورت

$$\mathbf{F}=F_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho+F_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi+F_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

نمایش داده می‌شود که در آن F_ρ، F_ϕ و F_θ مولفه‌های میدان در امتداد بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\rho$، $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ و در حالت کلی، توابعی بر حسب متغیرهای کروی هستند.

در ادامه، فرض می‌کنیم f تابع اسکالری است که در ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ تعریف شده باشد. بردار گرادیان این تابع را در سیستم مختصات کروی به دست می‌آوریم. در

سیستم مختصات دکارتی داریم:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

فرض کنیم g مقدار تابع f را در هر نقطه در سیستم مختصات کروی نشان دهد. به عبارت دیگر،

$$g(\rho,\phi,\theta) = f\big(x(\rho,\phi,\theta), y(\rho,\phi,\theta), z(\rho,\phi,\theta)\big)$$

برای این که گرادیان g را در سیستم مختصات کروی به دست آوریم ابتدا سه بردار $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ را در هر نقطه بر حسب بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\rho$، $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ بیان می‌کنیم. در دستگاه (۳)، اگر ماتریس ضرایب را با A نمایش دهیم آنگاه $\det(A) = ۱$ و از آنجا

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi & ۰ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \sin\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \cos\phi\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\
\mathbf{j} &= \sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\
\mathbf{k} &= \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\rho - \sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_\phi
\end{aligned}$$

از طرف دیگر، با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}
\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که در سیستم مختصات کروی،

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \sin\phi\cos\theta & , \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\phi\sin\theta & , \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial z} = \cos\phi \\
\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{۱}{\rho}\cos\phi\cos\theta & , \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{۱}{\rho}\cos\phi\sin\theta & , \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = -\dfrac{۱}{\rho}\sin\phi \\
\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{\rho\sin\phi} & , \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho\sin\phi} & , \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = ۰
\end{array}$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ و ساده کردن این عبارت‌ها، بردار ∇f، یا در واقع ∇g، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \rho}\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{۱}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \phi}\,\hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{۱}{\rho\sin\phi}\frac{\partial g}{\partial \theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

گرادیان یک تابع مشتق‌پذیر در سیستم مختصات کروی را می‌توانیم به روشی دیگر و با استفاده از رابطه‌ی $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$، که در آن $\mathbf{u}$ برداری یکه است، نیز به دست آوریم. توجه می‌کنیم که رابطه‌ی فوق را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

$$D_{\mathbf{u}}f = \Big((\nabla f)_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + (\nabla f)_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + (\nabla f)_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta\Big)\cdot\mathbf{u}$$

اکنون اگر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ را به ترتیب بردارهای پایه‌ی سیستم مختصات کروی انتخاب کنیم آنگاه مولفه‌های بردار ∇f در این سیستم مختصات به دست می‌آیند. به این ترتیب،

$$\nabla f = (D_{\hat{\mathbf{e}}_\rho}f)\hat{\mathbf{e}}_\rho + (D_{\hat{\mathbf{e}}_\phi}f)\hat{\mathbf{e}}_\phi + (D_{\hat{\mathbf{e}}_\theta}f)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

انجام جزئیات این روش را به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

عملگر بعدی که بررسی می‌کنیم عملگر واگرایی است. فرض کنیم میدان برداری $\mathbf{F}$ به صورت $\mathbf{F} = F_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + F_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + F_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$ داده شده باشدکه مولفه‌های آن مشتقات جزئی پیوسته دارند. برای محاسبه‌ی واگرایی میدان $\mathbf{F}$ در $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^۳$ از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V\to ۰}\frac{۱}{\Delta V}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

که در آن S رویه‌ای بسته و کراندار و نقطه‌ی $\mathbf{x}$ درون آن واقع است. در اینجا ΔV حجم ناحیه‌ی محصور توسط این رویه است. فرض کنیم مختصات کروی نقطه‌ی $\mathbf{x}$ برابر $(\rho_۰,\phi_۰,\theta_۰)$ و D ناحیه‌ی شامل نقاط (ρ,ϕ,θ) باشد که $\rho\in[\rho_۰-\frac{\Delta\rho}{۲},\rho_۰+\frac{\Delta\rho}{۲}]$، $\phi\in[\phi_۰-\frac{\Delta\phi}{۲},\phi_۰+\frac{\Delta\phi}{۲}]$ و $\theta\in[\theta_۰-\frac{\Delta\theta}{۲},\theta_۰+\frac{\Delta\theta}{۲}]$. در این صورت، حجم این ناحیه برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_{\theta_۰-\frac{\Delta\theta}{۲}}^{\theta_۰+\frac{\Delta\theta}{۲}}\int_{\phi_۰-\frac{\Delta\phi}{۲}}^{\phi_۰+\frac{\Delta\phi}{۲}}\int_{\rho_۰-\frac{\Delta\rho}{۲}}^{\rho_۰+\frac{\Delta\rho}{۲}}\rho^۲\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta\\ &= \frac{۱}{۳}\big((\rho_۰+\frac{\Delta\rho}{۲})^۳-(\rho_۰-\frac{\Delta\rho}{۲})^۳\big)\big(\cos(\phi_۰-\frac{\Delta\phi}{۲})-\cos(\phi_۰+\frac{\Delta\phi}{۲})\big)\Delta\theta\end{aligned}$$

اگر S رویه‌ی کل پوشاننده ناحیه‌ی D باشد آنگاه این رویه قابل تقسیم به ۶ رویه‌ی S_1 و S_2، به ترتیب نظیر $\rho = \rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2}$ و $\rho = \rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2}$، رویه‌های S_3 و S_4، متناظر $\phi = \phi_0 + \frac{\Delta\phi}{2}$ و $\phi = \phi_0 - \frac{\Delta\phi}{2}$ و رویه‌های S_5 و S_6 متناظر $\theta = \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}$ و $\theta = \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}$ است. برای مقادیر کوچک $\Delta\rho$، $\Delta\phi$ و $\Delta\theta$، بردارهای نرمال رویه‌های S_1 و S_2، به ترتیب $\hat{\mathbf{e}}_\rho(\mathbf{x})$ و $-\hat{\mathbf{e}}_\rho(\mathbf{x})$، بردارهای نرمال رویه‌های S_3 و S_4 برابر $\hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})$ و $-\hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})$ و برای دو رویه‌ی S_5 و S_6 بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})$ و $-\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})$، و مقدار ΔV نیز تقریبا برابر $\rho_0^2 \sin\phi_0 \Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta$ خواهد بود. برای میدان برداری $\mathbf{F} = F_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + F_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + F_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$ و بردارهای $\Delta\mathbf{h} = (\Delta\rho, \Delta\phi, \Delta\theta)$ و $\mathbf{0} = (0,0,0)$ داریم

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{1}{\Delta V}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \approx \\
&\lim_{\Delta\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{1}{\rho_0^2\sin\phi_0\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta}\Big[\Big(F_\rho\big(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2},\phi_0,\theta_0\big)\Delta\sigma_1 - F_\rho\big(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2},\phi_0,\theta_0\big)\Delta\sigma_2\Big) \\
&\quad + \Big(F_\phi\big(\rho_0,\phi_0+\frac{\Delta\phi}{2},\theta_0\big)\Delta\sigma_3 - F_\phi\big(\rho_0,\phi_0-\frac{\Delta\phi}{2},\theta_0\big)\Delta\sigma_4\Big) \\
&\quad + \Big(F_\theta\big(\rho_0,\phi_0,\theta_0+\frac{\Delta\theta}{2}\big)\Delta\sigma_5 - F_\theta\big(\rho_0,\phi_0,\theta_0-\frac{\Delta\theta}{2}\big)\Delta\sigma_6\Big)\Big]
\end{aligned}$$

که در آن $\Delta\sigma_i$ مساحت رویه‌ی S_i است. به این ترتیب، با استفاده از تقریب‌های

$$\begin{aligned}
&\Delta\sigma_1 \approx (\rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2})^2 \sin\phi_0\Delta\phi\Delta\theta \quad , \quad \Delta\sigma_2 \approx (\rho_0 - \frac{\Delta\rho}{2})^2 \sin\phi_0\Delta\phi\Delta\theta \\
&\Delta\sigma_3 \approx \rho_0 \sin(\phi_0 + \frac{\Delta\phi}{2})\Delta\rho\Delta\theta \quad , \quad \Delta\sigma_4 \approx \rho_0 \sin(\phi_0 - \frac{\Delta\phi}{2})\Delta\rho\Delta\theta \\
&\Delta\sigma_5 \approx \rho_0\Delta\rho\Delta\phi \quad , \quad \Delta\sigma_6 \approx \rho_0\Delta\rho\Delta\phi
\end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 F_\rho)(\mathbf{x}) + \frac{1}{\rho_0\sin\phi_0}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi F_\phi)(\mathbf{x}) + \frac{1}{\rho_0\sin\phi_0}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}(\mathbf{x})$$

آخرین عملگری که بررسی می‌کنیم عملگر curl است. فرض کنیم مولفه‌های میدان $\mathbf{F} = F_\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + F_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + F_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در این صورت، با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای رویه‌ی کراندار S با خم مرزی C،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

که در آن $\mathbf{n}$ قائم یکه بر رویه‌ی S است. برای نقطه‌ی $\mathbf{x}$ در فضا به مختصات کروی $(\rho_0, \phi_0, \theta_0)$، فرض کنیم S رویه‌ی زیر باشد.

$$S = \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho = \rho_0 \ , \ \phi \in [\phi_0 - \frac{\Delta\phi}{2}, \phi_0 + \frac{\Delta\phi}{2}] \ , \ \theta \in [\theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}, \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}]\}$$

در این صورت، برای مقادیر کوچک $\Delta\phi$ و $\Delta\theta$، بردار قائم یکه در نقاط مختلف S تقریبا برابر $\hat{\mathbf{e}}_\rho(\mathbf{x})$ است. در نتیجه

$$\iint_S (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \approx (\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x})\Delta\sigma$$

که در آن $(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x})$ مولفه‌ی میدان $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ در امتداد بردار $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ و $\Delta\sigma$ مساحت رویه‌ی S است. مساحت این رویه قابل تقریب با مساحت مستطیلی به اضلاع $\rho_\circ \sin\phi_\circ \Delta\theta$ و $\rho_\circ\Delta\phi$ و بنابر این تقریبا برابر $\rho_\circ^۲ \sin\phi_\circ \Delta\phi\Delta\theta$ است. به این ترتیب

$$(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x}) = \lim_{(\Delta\phi,\Delta\theta)\to(\circ,\circ)} \frac{۱}{\rho_\circ^۲\sin\phi_\circ\,\Delta\phi\Delta\theta}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (۴)$$

که در آن C خم مرزی رویه‌ی S است. با توجه به این که این خم اجتماع چهار خم به صورت زیر است،

$$\begin{aligned}
C_۱ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ\ ,\ \phi\in[\phi_\circ-\frac{\Delta\phi}{۲},\phi_\circ+\frac{\Delta\phi}{۲}]\ ,\ \theta=\theta_\circ-\frac{\Delta\theta}{۲}\}\\
C_۲ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ\ ,\ \phi\in[\phi_\circ-\frac{\Delta\phi}{۲},\phi_\circ+\frac{\Delta\phi}{۲}]\ ,\ \theta=\theta_\circ+\frac{\Delta\theta}{۲}\}\\
C_۳ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ\ ,\ \phi=\phi_\circ+\frac{\Delta\phi}{۲}\ ,\ \theta\in[\theta_\circ-\frac{\Delta\theta}{۲},\theta_\circ+\frac{\Delta\theta}{۲}]\}\\
C_۴ &= \{(\rho,\phi,\theta) \mid \rho=\rho_\circ\ ,\ \phi=\phi_\circ-\frac{\Delta\phi}{۲}\ ,\ \theta\in[\theta_\circ-\frac{\Delta\theta}{۲},\theta_\circ+\frac{\Delta\theta}{۲}]\}
\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \approx{}& \Big(\mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ,\theta_\circ-\frac{\Delta\theta}{۲})\cdot\Delta\mathbf{r}_۱ + \mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ,\theta_\circ+\frac{\Delta\theta}{۲})\cdot\Delta\mathbf{r}_۲\Big)\\
&+\Big(\mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ+\frac{\Delta\phi}{۲},\theta_\circ)\cdot\Delta\mathbf{r}_۳ + \mathbf{F}(\rho_\circ,\phi_\circ-\frac{\Delta\phi}{۲},\theta_\circ)\cdot\Delta\mathbf{r}_۴\Big) \quad (۵)
\end{aligned}$$

که در آن $\Delta\mathbf{r}_i$ بردار جابجایی در امتداد خم C_i است. از روابط (۴) و (۵) و تقریب‌های

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{r}_۱ \approx \rho_\circ\Delta\phi\ \hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x}p) &&,\quad \Delta\mathbf{r}_۲ \approx -\rho_\circ\Delta\phi\ \hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})\\
&\Delta\mathbf{r}_۳ \approx \rho_\circ\sin(\phi_\circ+\frac{\Delta\phi}{۲})\Delta\theta\ \hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x}) &&,\quad \Delta\mathbf{r}_۴ \approx -\rho_\circ\sin(\phi_\circ-\frac{\Delta\phi}{۲})\Delta\theta\ \hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

داریم

$$(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\rho(\mathbf{x}) = \frac{۱}{\rho_\circ\sin\phi_\circ}\Big(\frac{\partial}{\partial\phi}\big(\sin(\phi)F_\theta\big)(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}(\mathbf{x})\Big)$$

با روشی مشابه، می‌توانیم مولفه‌های میدان $\mathrm{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x})$ در امتداد بردارهای $\hat{\mathbf{e}}_\phi(\mathbf{x})$ و $\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{x})$ را به صورت زیر به دست آوریم.

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}\mathbf{F})_\phi(\mathbf{x}) &= \frac{۱}{\rho_\circ \sin\phi_\circ}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}(\mathbf{x}) - \frac{۱}{\rho_\circ}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\theta)(\mathbf{x})\\ (\mathrm{curl}\mathbf{F})_\theta(\mathbf{x}) &= \frac{۱}{\rho_\circ}\Big(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi)(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}(\mathbf{x})\Big)\end{aligned}$$

به شکل مشابه بردار موضع نقطه‌ای مانند (x,y,z) در دستگاه دکارتی را می‌توان بر حسب متغیرهای r، θ و z به صورت $r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بیان کرد. در این صورت بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{e}}_r$، $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ و $\hat{\mathbf{e}}_z$ همانند دستگاه مختصات کروی قابل تعریف هستند. فرمول‌های زیر برای عملگرهای ∇، div و curl برای توابعی که در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان شده به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{۱}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{F}_r) + \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \Big(\frac{۱}{r}\frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial\theta} - \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial z}\Big)\hat{\mathbf{e}}_r + \Big(\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial r}\Big)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \Big(\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{F}_\theta) - \frac{۱}{r}\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial\theta}\Big)\hat{\mathbf{e}}_z$$

در پایان این فصل، به عنوان مثال، کاربرد آنالیز برداری برای حل دو مساله‌ی فیزیک کلاسیک بیان شده است.

۱) نشان می‌دهیم میدان نیروی جاذبه‌ی جسمی به جرم M یک میدان گرادیان است.

بنابر قانون نیوتن، برای $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r = ||\mathbf{r}|| = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$، میدان نیروی جاذبه‌ی جسمی به جرم M به ازای یک عدد ثابت $G_\circ$ عبارت است از:

$$\mathbf{G} = -\frac{G_\circ M}{r^۳}\mathbf{r}$$

از سوی دیگر $\mathbf{G} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان گرادیان است اگر و تنها اگر $\mathrm{curl}\mathbf{G} = \mathbf{0}$ که معادل است با $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ و $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$، $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. محاسبه‌ی مستقیم $\mathrm{curl}\mathbf{G}$ کمی دشوار است.

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{G_\circ Mx}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} & \frac{G_\circ My}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} & \frac{G_\circ Mz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}\end{vmatrix}$$

اما اگر از ویژگی‌های عملگر کرل استفاده کنیم زودتر به نتیجه می‌رسیم. یادآوری می‌کنیم که برای تابع اسکالر f و تابع برداری $\mathbf{F}$، همواره داریم $\text{curl}\ (f\mathbf{F}) = f\ \text{curl}\ \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$. به ویژه برای $f = \frac{۱}{r^۳}$ و $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ می‌توان نوشت:

$$\text{curl}\ (\mathbf{G}) = -G_\circ M\ \text{curl}\ (f\mathbf{F}) = -G_\circ M\big[\big(\frac{۱}{r^۳}\ \text{curl}\ \mathbf{r}\big) + \big(\nabla(\frac{۱}{r^۳}) \times \mathbf{r}\big)\big]$$

از سوی دیگر

$$\nabla(\frac{۱}{r^۳}) = \big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{۱}{r^۳})\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{۱}{r^۳})\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}(\frac{۱}{r^۳})\big) = (\frac{-۳x}{r^۵}, \frac{-۳y}{r^۵}, \frac{-۳z}{r^۵}) = -\frac{۳}{r^۵}\ \mathbf{r}$$

بنابر این $\nabla(\frac{۱}{r^۳}) \times \mathbf{r} = -\frac{۳}{r^۵}\ (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. با توجه به این که

$$\text{curl}\ \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

نتیجه می‌شود $\text{curl}\mathbf{G} = \mathbf{0}$.

۲) فرض کنیم T ناحیه‌ای بسته و کرانداری از $\mathbb{R}^۳$ باشد که مبدأ را در بر دارد. به علاوه سطح خارجی T یک رویه‌ی قطعه به قطعه هموار S است که شامل مبدأ نیست. نشان می‌دهیم برای میدان برداری $\mathbf{G} = \frac{۱}{r^۳}\mathbf{r}$ که $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r = ||\mathbf{r}|| = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ همواره $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = ۰$.

بنابر قضیه‌ی دیورژانس $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = \int\int\int_T \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV$. با توجه به

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}) \\
&= \frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}}{x^۲+y^۲+z^۲} + \frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} - \frac{y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}}{x^۲+y^۲+z^۲} + \\
&\quad \frac{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} - \frac{z^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}}{x^۲+y^۲+z^۲} = \frac{x^۲+y^۲+z^۲-x^۲-y^۲-z^۲}{(x^۲+y^۲+z^۲)\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} = ۰
\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma = \int\int\int_T \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV = ۰$.

نتیجه‌ی فیزیکی: بنا بر قوانین فیزیک کلاسیک، میدان برداری حاصل از یک بار الکتریکی Q عبارت است از $\mathbf{F} = \frac{Q}{۴\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^۳}$. بر اساس مثال فوق اگر یک سطح بسته حاوی این بار نباشد آنگاه شار گذرنده از این سطح برابر صفر است.

تمرین‌های فصل پنجم

۱) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_1} \frac{ds}{x-y}$ ب) $\int_{C_2} \frac{y}{\sqrt{x}} ds$

که C_1 پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $P = (0, -3)$ و $Q = (6, 0)$ و و معادلات پارامتری C_2 عبارت هستند از $x = 3t^2$ و $y = 2t^3$ به ازای $1 \leq t \leq 2$.

۲) انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{C_1} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$

ب) $\int_{C_2} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$

ج) $\int_{C_3} \frac{xdy - ydx}{x^2+xy+y^2}$

که C_1 دارای معادلات پارامتری $x = 2\cos t$، $y = 2\sin t$ به ازای $0 \leq t \leq \pi$، C_2 مربعی با رئوس $(1, 0)$، $(0, 1)$، $(-1, 0)$، $(0, -1)$ (در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و C_3 دایره‌ای به معادلات پارامتری $x = a\cos t$ ، $y = a\sin t$ ، $(a > 0)$ به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ است.

۳) C خم بسته‌ی هموازی است که نسبت به مبدا متقارن است. ثابت کنید

$$\int_C (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy = 0$$

۴) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال

$$\int_C (-x^2y)dx + (xy^2)dy$$

را حساب کنید که در آن C مرز ناحیه‌ی محصور به دوایر $x^2+y^2 = 4$ و $x^2+y^2 = 16$ است.

۵) فرض کنید $f(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|}$ و C مربعی با رئوس $A = (1, 0)$، $B = (0, 1)$، $C = (-1, 0)$ و $D = (0, -1)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C f(x,y)dx + f(x,y)dy$.

۶) الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین نشان دهید هرگاه توابع دو متغیره‌ی P و Q روی حوزه‌ی همبند ساده‌ی D دارای مشتقات نسبی پیوسته باشند و در هر نقطه‌ی $D \ni (x,y)$ داشته باشیم $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ آن‌گاه $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است.

ب) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C \frac{x-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x+y}{x^۲+y^۲}dy$ که C یک خم هموار بسته حول مبدأ مختصات است.

ج) انتگرال قسمت (ب) را در حالتی محاسبه کنید که C یک منحنی هموار ساده‌ی بسته باشد ولی مبدأ مختصات در داخل C نباشد.

۷) اگر γ کمان OA از خم به معادله‌ی $y = xe^{x-۱}$ باشد، به طوری که $A = (۱,۱)$ و $O = (۰,۰)$، مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی‌الخط

$$\int_\gamma (۳x^۲y + y^۳)dx + (x^۳ + ۳xy^۲)dy$$

۸) مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال خط $\int_C |y|dx + |x|dy$ که C منحنی متشکل از کمان AB، قسمتی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ واقع بر نقطه‌ی $A = (۰,۲)$ و $B = (-۱,۱)$ و BC قسمتی از خط $x + ۶y = ۵$ واقع بر نقطه‌ی $B = (-۱,۱)$ و $C = (۲, \frac{۱}{۲})$ است.

۹) در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید آیا میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان است؟ در صورت مثبت بودن جواب یک تابع دو متغیره‌ی f همراه با دامنه‌اش چنان تعیین کنید که در آن دامنه بردار گرادیان تابع f برابر $\mathbf{F}$ باشد.

الف) $\mathbf{F} = (y - \frac{\sin^۲ y}{x^۲})\mathbf{i} + (x + \frac{\sin ۲y}{x})\mathbf{j}$

ب) $\mathbf{F} = (۲x\cos^۲ y)\mathbf{i} + (۲y - x^۲ \sin ۲y)\mathbf{j}$

۱۰) اگر تابع دو متغیره‌ی u چنان وجود داشته باشد که $du = Pdx + Qdy$ (P و Q توابعی دو متغیره هستند) آن‌گاه فرم دیفرانسیلی $Pdx + Qdy$ را یک فرم دیفرانسیلی کامل می‌نامیم. نشان دهید که $Pdx + Qdy$ یک فرم دیفرانسیلی کامل است اگر و تنها اگر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان باشد.

۱۱) به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال‌های خطی زیر را روی خم‌های داده شده در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت محاسبه کنید.

الف)

$$\int_C \sqrt{x^۲+y^۲}dx + [xy^۲ + y\ln(x+\sqrt{x^۲+y^۲})]dy$$

که در آن C مربعی است با رئوس $(۱,۰)$، $(۴,۰)$، $(۴,۵)$ و $(۱,۵)$.

ب)

$$\int_C \frac{xy^۲}{۱+x^۲}dx + y\ln(۱+x^۲)dy$$

که در آن C دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲y=۰$ است.

۱۲) به کمک انتگرال خطی، مساحت نواحی زیر را به دست آورید.

الف) D محدود است به خم بسته‌ی C با معادلات پارامتری $x=a\cos^۳ t$، $y=a\sin^۳ t$، که در آن $a>۰$ و $۰\le t\le ۲\pi$.

ب) D محدود است به خم بسته‌ی C (کاردیوئید) با معادلات پارامتری $x=۲a\cos t - a\cos ۲t$، $y=۲a\sin t - a\sin ۲t$، که در آن $a>۰$ و $۰\le t\le ۲\pi$.

۱۳) تحقیق کنید که تساوی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = ۱$$

در مورد نگاشت‌های $x=e^u\cos v$، $y=e^u\sin v$ و وارون آن‌ها برقرار است.

۱۴) مساحت رویه‌ی S را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) S قسمتی از کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ بریده می‌شود $(a>۰)$.

ب) S قسمتی از استوانه‌ی $x^۲+y^۲=ax$ است که در کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ قرار دارد $(a>۰)$.

ج) S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است که بین صفحه‌ی $z=۰$ و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ قرار دارد.

۱۵) انتگرال‌های رویه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\int\int_S xyz d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه‌ی $x+y+z=۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

ب) $\int\int_S y d\sigma$ که در آن S قسمتی از سهمی‌گون $y=۲-x^۲-z^۲$ به ازای $y\ge ۰$ است.

ج) $\int\int_S (x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=2x$ بریده می‌شود.

۱۶) انتگرال‌های سطح (رویه‌ای) زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S نیم کره‌ی $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ است.

ب) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $z=xy$ است که در بالای مربع $D=\{(x,y): 0\le y\le 2\ ,\ 0\le x\le 3\}$ قرار دارد.

ج) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0$ و $z=3$ است.

۱۷) به کمک قضیه واگرایی گوس انتگرال رویه‌ای $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و S کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ است.

ب) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ و S رویه‌ی بسته‌ی حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^2+y^2=2$ و صفحات $z=0$ و $z=1$ است.

ج) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و S هر رویه‌ی بسته‌ی دارای شرایط قضیه‌ی واگرایی است.

۱۸) به کمک قضیه‌ی استوکس انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}\cdot dr$ را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-y\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که در صفحه‌ی $z=x$ از برخورد صفحات $x=0$، $x=1$، $y=0$ و $y=2$ به وجود می‌آید.

ب) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که از برخورد استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ با صفحه‌ی $x+y+z=2$ پدید می‌آید.

ج) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و C مثلثی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از $(0,0,3)$، $(1,0,3)$ و $(2,1,3)$.

د) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه‌ی $z=x$ با کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ است (جهت حرکت روی C از طرف مثبت محور z بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود).

۱۹) برای یک تابع حقیقی ۳ متغیره‌ی f، تابع حقیقی $\nabla^2 f$ (لاپلاسین f) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

یا به طور صوری

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla$$

به عبارت دیگر می‌توان $\nabla^2 f$ را تصویر f به وسیله‌ی عملگر ∇^2 به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\nabla^2 : V \to V \ \ ; \ \ f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

نشان دهید $\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$.

۲۰) فرض کنید f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. نشان دهید

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = \|\nabla f\|^2 + f \nabla^2 f$$

۲۱) فرض کنید $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان برداری روی ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ باشد و توابع P، Q و R بر این ناحیه مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشند.

الف) مطلوب است $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

ب) نشان دهید $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ، که در آن $\nabla^2 \mathbf{F} := (\nabla^2 P)\mathbf{i} + (\nabla^2 Q)\mathrm{j} + (\nabla^2 R)$.

۲۲) فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

۲۳) فرض کنید f و g دو تابع سه متغیره با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده سطح S باشند به قسمی که خم مرزی آن C و $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بر سطح S هستند. نشان دهید

(الف) $\displaystyle\int_C (f\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$

(ب) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

۲۴) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{n}$، نماد $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ نماد دیگری برای مشتق سویی تابع f در راستای $\mathbf{n}$ است (به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = D_{\mathbf{n}} f$ و اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$). فرض کنید T ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای $\mathbb{R}^۳$ و S سطح محصور کننده‌ی آن باشد. به علاوه فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه‌ی بیرونی سطح S است. اگر f و g دو تابع با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده حجم T و سطح S باشند، نشان دهید

(الف) $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_T \nabla^۲ f\, dV$

(ب) $\displaystyle\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

(ج) $\displaystyle\iint_S (f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}})\, d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g - g\nabla^۲ f)\, dV$