فصل ۴

انتگرال‌های چندگانه

۴−۱ مفاهیم اولیه و تعریف‌ها

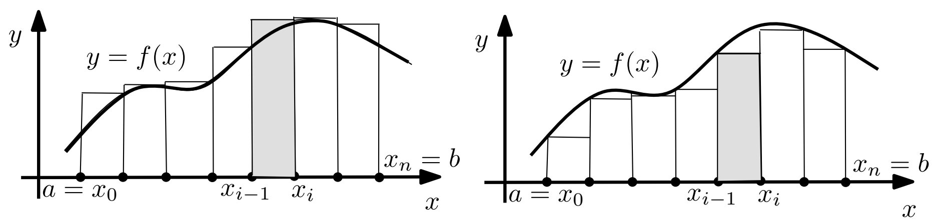
مفهوم انتگرال چندگانه برای توابع حقیقی چند متغیره تعمیم انتگرال توابع حقیقی یک متغیره است. انگیزه‌ی هندسی برای تعریف انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره، تعیین مساحت نواحی در صفحه و برای توابع دو متغیره، تعیین حجم نواحی در فضا بوده است. برای درک بهتر مفهوم انتگرال چندگانه ابتدا به یادآوری تعریف انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره می‌پردازیم. روش‌های مختلفی برای بیان انتگرال معین در کتاب‌های مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی یک متغیره مطرح می‌شود. در این کتاب مفهوم انتگرال به کمک حالت خاصی از مجموع‌های بالایی و پایینی ریمان بیان می‌شود.

فرض کنیم تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ کراندار باشد. یک افراز برای بازه‌ی $[a,b]$ عبارت است از مجموعه‌ی $P = \{x_۰, x_۱, ..., x_n\}$ به قسمی که $a = x_۰ < x_۱ ... < x_n = b$.
فرض کنیم M_i کوچکترین کران بالای مقادیر $f(x)$ در $[x_{i-۱}, x_i]$ و m_i بزرگترین کران پایین مقادیر $f(x)$ در $[x_{i-۱}, x_i]$ باشند. لازم به ذکر است، اگر f پیوسته باشد این مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع در $[x_{i-۱}, x_i]$ هستند. قرار می‌دهیم:

$$U(f,P) := \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i \quad , \quad L(f,P) := \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i$$

مقادیر $U(f,P)$ و $L(f,P)$ به ترتیب مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی تابع f برای افراز P نامیده می‌شوند. اگر f تابعی با مقادیر غیرمنفی باشد، این مقادیر تقریب‌هائی از مساحت

ناحیه‌ی محدود به نمودار f بین خطوط $x = a$، $x = b$ و محور x هستند. برای این دسته از توابع، $U(f, P)$ دارای مقداری بیشتر یا مساوی مساحت این ناحیه و $L(f, P)$ دارای مقداری کوچک‌تر یا مساوی مساحت این ناحیه است. اگر بتوانیم با انتخاب افرازهای مناسب تفاضل این دو مقدار را به دلخواه کوچک کنیم بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، عدد حقیقی یکتائی وجود دارد که از تمام مجموع‌های ریمان بالائی f برای افراز دلخواه کوچکتر و از تمام مجموع‌های ریمان پائینی تابع f برای افراز دلخواه بزرگتر است. این عدد یکتا را انتگرال معین f روی $[a, b]$ می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، افراز P_ε برای $[a, b]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$، تابع f را روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر می‌نامیم. در این صورت عدد یکتائی مانند I وجود دارد به قسمی که برای هر افراز P از $[a, b]$ داریم $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$. عدد I را انتگرال معین f روی $[a, b]$ نامیده و با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نمایش می‌دهیم (شکل ۵ـ۱).



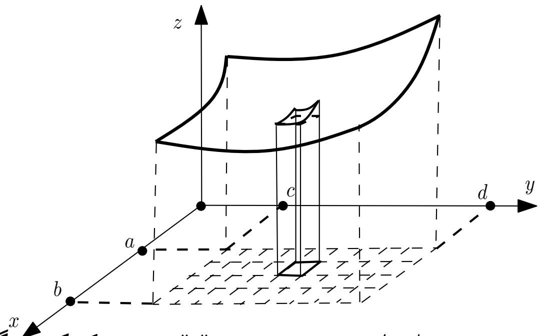
شکل ۵ـ۱ تقریب سطح به کمک مجموع‌های ریمان بالائی و پایینی.

اکنون برای تعمیم این مفهوم برای تابع دو متغیره، فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی f روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ کراندار باشد. افراز $P_x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ را برای بازه‌ی $[a, b]$ و افراز $P_y = \{y_0, y_1, ..., y_m\}$ را برای بازه‌ی $[c, d]$ در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی $\{(x_i, y_j) \ : x_i \in P_x \ , \ y_j \in P_y\}$ را یک افراز برای مستطیل $D := [a, b] \times [c, d]$ می‌نامیم. برای $i = 1, ..., n$ و $j = 1, ..., m$ نقاط این افراز رئوس مستطیل‌های $D_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ هستند که مستطیل D را به $m \times n$ مستطیل کوچکتر تقسیم می‌کند. فرض کنیم M_{ij} کوچکترین کران بالای مقادیر $f(x, y)$ در مستطیل D_{ij} برای $i = 1, ..., n$ و $j = 1, ..., m$ و m_{ij} بزرگترین کران پایین مقادیر $f(x, y)$ درمستطیل‌های D_{ij} باشند. مانند توابع یک متغیره، اگر f پیوسته باشد این مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع در D_{ij} هستند. قرار می‌دهیم:

$$U(f, P) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad , \quad L(f, P) := \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

همانند آنچه برای توابع حقیقی یک متغیره گفتیم، مقادیر $U(f, P)$ و $L(f, P)$ به ترتیب

مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی تابع دو متغیره‌ی حقیقی f برای افراز $P_x \times P_y$ نامیده می‌شوند. اگر f تابعی با مقادیر غیرمنفی باشد، این مقادیر تقریب‌هائی از حجم ناحیه‌ی محدود به نمودار f بین صفحه‌های $x = a$، $x = b$، $y = c$، $y = d$ و صفحه‌ی xoy هستند. برای این دسته از توابع، $U(f, P)$ دارای مقداری بیشتر یا مساوی حجم این ناحیه و $L(f, P)$ دارای مقداری کوچک‌تر یا مساوی حجم این ناحیه است.



شکل ۵—۲ تقریب حجم زیر نمودار تابع دو متغیره‌ی حقیقی f به کمک انتگرال دوگانه روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$.

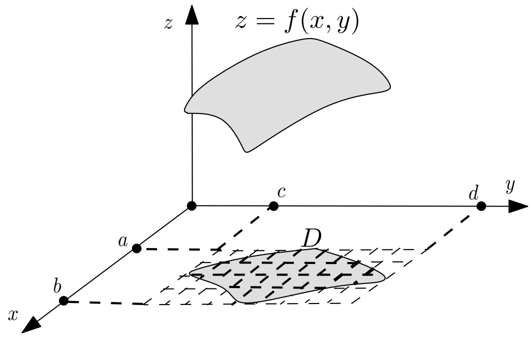
اگر بتوانیم با انتخاب افرازهای مناسب تفاضل این دو مقدار را به دلخواه کوچک کنیم بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، عدد حقیقی یکتائی وجود دارد که بین مجموع‌های ریمان بالائی و مجموع‌های ریمان پائینی تابع f برای افراز دلخواه قرار می‌گیرد. این عدد یکتا را انتگرال دوگانه‌ی f روی $[a, b] \times [c, d]$ می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، افراز P_ε برای مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$، تابع f را روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ انتگرال‌پذیر می‌نامیم. در این صورت عدد یکتائی مانند I وجود دارد به گونه‌ای که برای هر افراز P از $[a, b] \times [c, d]$ داریم $L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$. عدد I را انتگرال دوگانه‌ی f روی مستطیل $D = [a, b] \times [c, d]$ نامیده و با نماد $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ یا $\iint_D f\, dA$ نمایش می‌دهیم.

در حالتی که نمودار f بالای صفحه‌ی xoy باشد، مقادیر $M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ و $m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ **اِلمان‌های (عنصرهای)** حجم هستند (شکل ۵—۲). در نتیجه $L(f, P)$ و $U(f, P)$ تقریب هایی از حجم محصور به نمودار f ، روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ خواهند بود. بنابر این $\iint_D f\, dA$ را می‌توان حجم محصور به نمودار f و صفحه‌ی xoy روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ در نظر گرفت (شکل ۵—۲).

در بیشتر موارد، تابع f روی ناحیه‌ی پیچیده‌تری تعریف شده است. برای ناحیه‌ی کراندار D (محصور در مستطیلی مانند $[a, b] \times [c, d]$)، برای افراز P از $[a, b] \times [c, d]$،

مجموع‌های بالایی و پایینی $U(f,P)$ و $L(f,P)$ را تنها برای مستطیل‌هایی به دست می‌آوریم که با D اشتراک دارند. به عبارت دیگر مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی برای i,jهایی محاسبه می‌شوند که $D_{ij} \cap D \neq \emptyset$.

$$U(f,p) := \sum_j \sum_i M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \ , \qquad L(f,P) := \sum_j \sum_i m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$



شکل ۵–۲ تقریب حجم زیر نمودار تابع دو متغیره‌ی حقیقی f به کمک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی D.

یک پرسش طبیعی این است که چه توابعی انتگرال‌پذیر هستند؟ به دلیل پیچیدگی و گستردگی این بحث تنها به ذکر این نکته می‌پردازیم که برای توابع چند متغیره نیز شرط انتگرال‌پذیری ضعیف‌تر از پیوستگی است. به عبارت دیگر توابع پیوسته روی رده‌ی وسیعی از نواحی کراندار در صفحه انتگرال‌پذیرند ولی توابع غیر پیوسته‌ای هم وجود دارند که انتگرال‌پذیر هستند. باید توجه داشت که اطلاع از انتگرال‌پذیری یک تابع در عمل کمکی به محاسبه‌ی مقدار انتگرال آن نمی‌کند. قضیه‌ی زیر تعمیم قضیه‌ی مشابهی از انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره برای انتگرال دوگانه است.

قضیه ۴–۱–۱ الف) اگر توابع دو متغیره‌ی f و g روی ناحیه‌ی کران‌دار D انتگرال‌پذیر باشند، برای هر $k \in \mathbb{R}$، تابع $kf + g$ نیز روی D انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D (k\ f + g)\, dA = k\ \iint_D f\, dA + \iint_D g\, dA$$

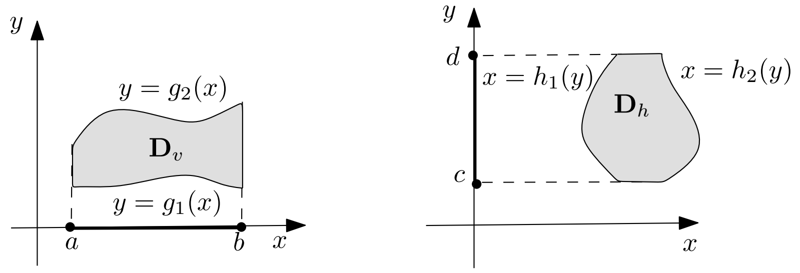
ب) اگر تابع دو متغیره‌ی f روی ناحیه‌های کران‌دار $D_۱$ و $D_۲$ انتگرال‌پذیر باشد و اشتراک $D_۱$ و $D_۲$ یک خم قطعه به قطعه پیوسته و یک به یک باشد آنگاه f روی $D = D_۱ \cup D_۲$ نیز انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D f\, dA = \iint_{D_۱} f\, dA + \iint_{D_۲} f\, dA$$

همانند توابع یک متغیره، محاسبه‌ی انتگرال چندگانه در حالت کلی و در عمل به روش‌های عددی انجام می‌شود. اما برای برخی از نواحی و توابع خاص می‌توان محاسبه‌ی انتگرال دوگانه را به محاسبه‌ی انتگرال توابع یک متغیره تبدیل کرد. به همین دلیل در این قسمت به معرفی چند دسته از این نواحی خاص در صفحه می‌پردازیم.

۱) ناحیه‌ی $D_h \subseteq \mathbb{R}^۲$ را **ساده‌ی افقی** گوییم (شکل ۵−۳) هرگاه توابع پیوسته‌ی $h_۱$ و $h_۲$ روی یک بازه مانند $[c,d]$ وجود داشته باشند به قسمی که $D_h = \{(x,y) \ : \ c \leq y \leq d \ , \ h_۱(y) \leq x \leq h_۲(y)\}$.

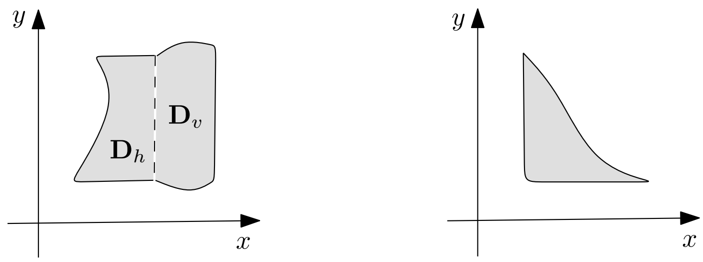
۲) ناحیه‌ی $D_v \subseteq \mathbb{R}^۲$ را **ساده‌ی عمودی** می‌نامیم (شکل ۵−۳) هرگاه توابع پیوسته‌ی $g_۱$ و $g_۲$ روی یک بازه مانند $[a,b]$ وجود داشته باشند به قسمی که $D_v = \{(x,y) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ g_۱(x) \leq y \leq g_۲(x)\}$.



شکل ۵−۳ نواحی ساده‌ی افقی D_h و ساده‌ی عمودی D_v.

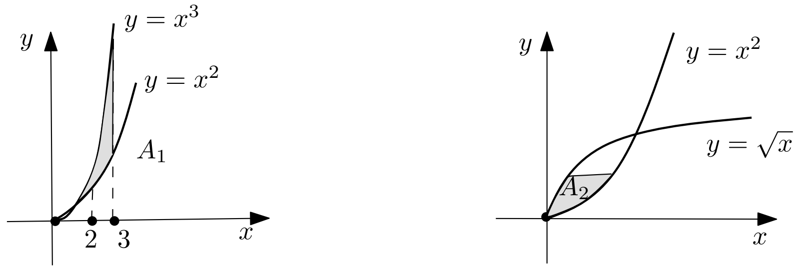
۳) ناحیه‌ی D را **ساده** می‌نامیم (شکل ۵−۴) هرگاه هم ساده‌ی عمودی و هم ساده‌ی افقی باشد.

۴) ناحیه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ را **نرمال** می‌نامیم (شکل ۵−۴) هرگاه اجتماع تعداد باپایانی از نواحی ساده‌ی عمودی و ساده‌ی افقی باشد.



شکل ۵−۴ نواحی ساده و نرمال.

مثال ۴-۱-۲ الف) ناحیه‌ی $A_۱ := \{(x,y) \;:\; ۰ \le y \le \frac{۱}{۲} \,,\; y^۲ \le x \le \sqrt{y}\}$ یک ناحیه‌ی ساده‌ی افقی و ناحیه‌ی $A_۲ := \{(x,y) \;:\; ۲ \le x \le ۳ \,,\; x^۲ \le y \le x^۳\}$ یک ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی است (شکل ۵-۵).



شکل ۵-۵ نواحی $A_۱$ و $A_۲$.

ب) ناحیه‌ی $D_۱ = \{(x,y) : x^۲ + y^۲ \le ۱\}$ یک ناحیه‌ی نرمال است. ناحیه‌ی $D_۲ = \{(x,y) : ۱ \le x^۲ + y^۲ \le ۴\}$ یک ناحیه‌ی نرمال است که ساده‌ی افقی یا عمودی نیست (شکل ۵-۶).

$$\begin{aligned} D_۱ &= \{(x,y) : -۱ \le x \le ۱ \,,\; -\sqrt{۱ - x^۲} \le y \le \sqrt{۱ - x^۲}\} \\ &= \{(x,y) : -۱ \le y \le ۱ \,,\; -\sqrt{۱ - y^۲} \le x \le \sqrt{۱ - y^۲}\} \end{aligned}$$

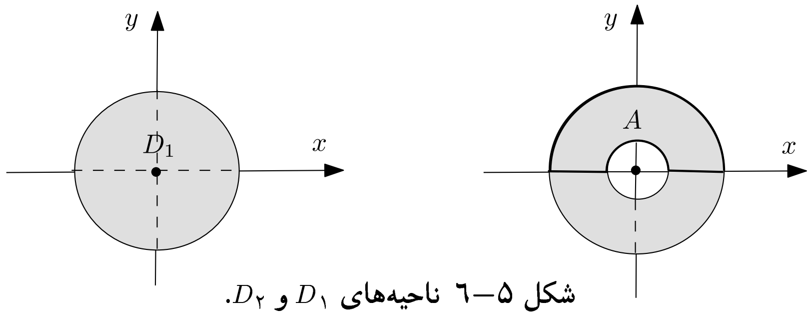
ناحیه‌ی $D_۲$ نرمال است (شکل ۵-۶) زیرا $D_۲ = A \cup B$، که در آن

$$A = \{(x,y) : -۲ \le x \le ۲ \,,\; h_۱(x) \le y \le \sqrt{۴ - x^۲}\} \;,$$

$$h_۱(x) = \begin{cases} \sqrt{۱ - x^۲} & -۱ \le x \le ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$B = \{(x,y) : -۲ \le x \le ۲ \,,\; -\sqrt{۴ - x^۲} \le y \le h_۲(x)\} \;,$$

$$h_۲(x) = \begin{cases} -\sqrt{۱ - x^۲} & -۱ \le x \le ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



شکل ۵-۶ ناحیه‌های $D_۱$ و $D_۲$.

مطالعه‌ی دقیق شرایط انتگرال‌پذیری توابع حقیقی چند متغیره، فراتر از کتاب‌های مقدماتی ریاضی عمومی است و در این قسمت به بیان یک استدلال مقدماتی برای یک حالت خاص اکتفا می‌کنیم.

فرض کنیم f روی یک ناحیه‌ی ساده‌ی افقی D پیوسته باشد. در این صورت توابع پیوسته‌ی $g_۱$ و $g_۲$ روی یک بازه مانند $[a,b]$ وجود دارند که

$$D = \{(x,y) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ g_۱(x) \leq y \leq g_۲(x)\}$$

برای سادگی فرض کنیم f روی D منفی نیست. بنابراین انتگرال دوگانه‌ی $\iint_{D_v} f(x,y)dA$ بیانگر حجم ناحیه‌ی T محصور به نمودار f روی ناحیه‌ی D است. برای محاسبه‌ی حجم T می‌توانیم از ایده‌ای شبیه به روش محاسبه‌ی حجم رویه‌های دوار استفاده کنیم. افراز منظم $\{x_۰ = a, x_۱, \cdots, x_n = b\}$ را برای $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. ناحیه‌ی T را به زیرناحیه‌های T_i افراز می‌کنیم که T_i محصور به صفحات $x = x_{i-۱}$، $x = x_i$ و نمودار f روی زیر ناحیه‌ی زیر است (شکل ۵—۷).

$$D_i = \{(x,y) \ : \ x_{i-۱} \leq x \leq x_i \ , \ g_۱(x) \leq y \leq g_۲(x)\}$$

مساحت T_i را می‌توان توسط $A(x_i)\Delta x_i$ تقریب زد که منظور از $A(x_i)$ مساحت ناحیه‌ای است در صفحه‌ی $x = x_i$ و زیر نمودار f. بنابر حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی یک متغیره داریم:

$$A(x_i) = \int_{g_۱(x_i)}^{g_۲(x_i)} f(x_i,y)dy$$

اکنون نشان می‌دهیم که حجم T توسط یک مجموع ریمان برای تابع A با ضابطه‌ی $A(x) = \int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} f(x,y)dy$ تقریب زده می‌شود.

$$T = \sum_{i=۱}^{n} T_i \approx \sum_{i=۱}^{n} A(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n} \Big(\int_{g_۱(x_i)}^{g_۲(x_i)} f(x_i,y)dy \Big) \Delta x_i$$

به این ترتیب در حد، یعنی اگر $n \to \infty$ آنگاه:

$$T = \int_a^b \left(\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

پس برای ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی $D = \{(x,y) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ g_۱(x) \leq y \leq g_۲(x)\}$:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

با بحثی شبیه به آنچه در مورد نواحی ساده‌ی عمودی گفته شد، برای یک ناحیه‌ی ساده‌ی افقی $D = \{(x,y) \ : \ c \leq y \leq d \ , \ h_۱(y) \leq x \leq h_۲(y)\}$:

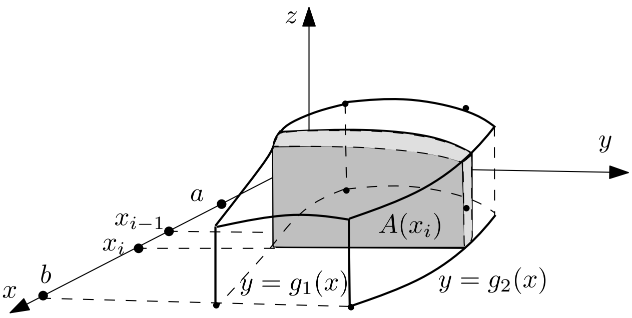
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_۱(y)}^{h_۲(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

از آنچه گفته شد قضیه‌ی معروف به **قضیه‌ی فوبینی** به دست می‌آید.

قضیه ۴–۱–۳ اگر تابع دو متغیره‌ی f روی ناحیه‌ی نرمال D پیوسته باشد، روی D انتگرال‌پذیر است و برای نواحی ساده‌ی افقی D_h و ساده‌ی عمودی D_v داریم

$$\int\int_{D_v} f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$\iint_{D_h} f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_۱(y)}^{h_۲(y)} f(x,y)dx \right) dy$$



شکل ۵–۷ تعبیر هندسی قضیه‌ی فوبینی.

برای نواحی ساده دو فرمول فوق به یک نتیجه منجر می‌شود ولی گاهی اوقات محاسبه‌ی با یکی از فرمول‌ها ساده‌تر است. به ویژه اگر توابع یک متغیره‌ی g, h داشته باشیم که $f(x,y) = g(x)h(y)$ آنگاه

$$\int_{a_۱}^{b_۱} (\int_{a_۲}^{b_۲} g(x)h(y) \ dy) \ dx = (\int_{a_۱}^{b_۱} g(x) \ dx) \ (\int_{a_۲}^{b_۲} h(y) \ dy) \qquad (۱)$$

مثال ۴–۱–۴ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = xe^{x-y}$ را روی مستطیل $D = \{(x,y) : ۲ \leq x \leq ۳, ۱ \leq y \leq ۲\}$ محاسبه کنید.

در این مثال برای $g(x) = xe^x$ و $h(y) = e^{-y}$ داریم $f(x,y) = g(x)h(y)$ پس روی مستطیل D بنابر رابطه‌ی (۱) داریم

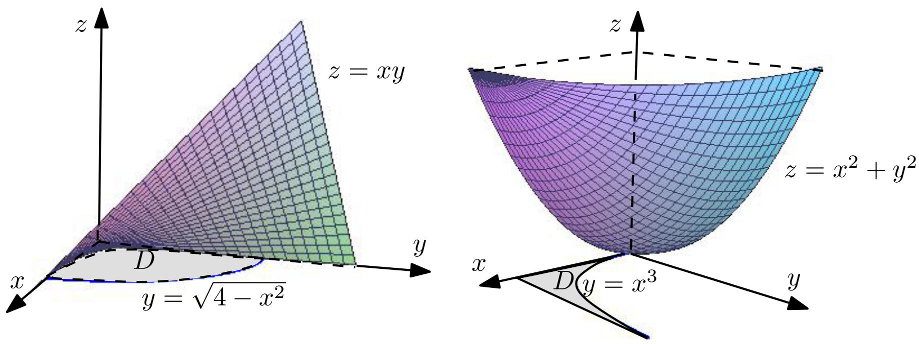
$$\begin{aligned}
\iint_D xe^{x-y}dA &= \Big(\int_۲^۳ xe^x dx\Big)\Big(\int_۱^۲ e^{-y}dy\Big) \\
&= \Big((-۱+x)e^x\Big|_۲^۳\Big)\Big(-e^{-x}\Big|_۱^۲\Big) \\
&= (-e^۲ + ۲e^۳)(e^{-۱} - e^{-۲}) = ۲e^۲ - ۳e + ۱
\end{aligned}$$

مثال ۴–۱–۵ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = xy$ را روی ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی $D = \{(x,y) : ۰ \le x \le ۲, ۰ \le y \le \sqrt{۴ - x^۲}\}$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
\iint_D xydA &= \int_۰^۲ \left(\int_۰^{\sqrt{۴-x^۲}} xydy \right) dx \\
&= \int_۰^۲ \frac{x}{۲}y^۲\Big|_{y=۰}^{y=\sqrt{۴-x^۲}} dx = \int_۰^۲ \frac{x(۴-x^۲)}{۲}dx = ۲
\end{aligned}$$

مثال ۴–۱–۶ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ را روی ناحیه‌ی ساده‌ی عمودی $D = \{(x,y) : ۱ \le x \le ۲, ۱ \le y \le x^۳\}$ محاسبه کنید.

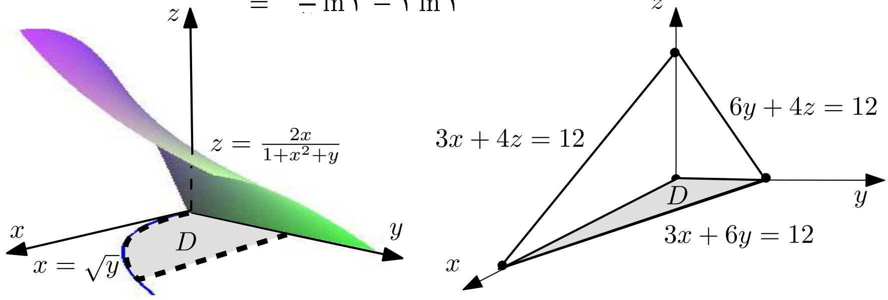
$$\begin{aligned}
\iint_D (x^۲+y^۲)dA &= \int_۱^۲ \left(\int_۱^{x^۳} (x^۲+y^۲)dy \right) dx \\
&= \int_۱^۲ (yx^۲ + \frac{y^۳}{۳})\Big|_{y=۱}^{y=x^۳} dx \\
&= \int_۱^۲ \Big(x^۲(x^۳-۱) + \frac{۱}{۳}x^۹ - \frac{۱}{۳}\Big)dx = \frac{۶۲۹}{۱۵}
\end{aligned}$$



شکل ۵–۸ نمودار تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲$، **ناحیه‌ی** $D = \{(x,y) : ۱ \le x \le ۲, ۱ \le y \le x^۳\}$، **نمودار تابع** $f(x,y) = xy$ **و ناحیه‌ی** $D = \{(x,y) : ۰ \le x \le ۲, ۰ \le y \le \sqrt{۴ - x^۲}\}$.

مثال ۴-۱-۷ انتگرال دوگانه‌ی تابع $f(x,y)=\dfrac{۲x}{۱+x^۲+y}$ را روی ناحیه‌ی ساده‌ی افقی $D=\{(x,y): ۰\le y\le ۱, \sqrt{y}\le x\le ۱\}$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{۲x}{۱+x^۲+y}dA &= \int_۰^۱ \left(\int_۰^{\sqrt{y}} \frac{۲x dx}{۱+x^۲+y} \right) dy \\
&= \int_۱^۲ \ln(۱+x^۲+y)\Big|_{x=۰}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_۱^۲ \Big(\ln(۱+۲y)-\ln(۱+y)\Big)dy \\
&= \Big(\frac{۱}{۲}(۱+۲y)\ln(۱+۲y)+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(۱+y)\ln(۱+y)\Big)\Big|_۰^۱ \\
&= \frac{۳}{۲}\ln ۳ - ۲\ln ۲
\end{aligned}$$



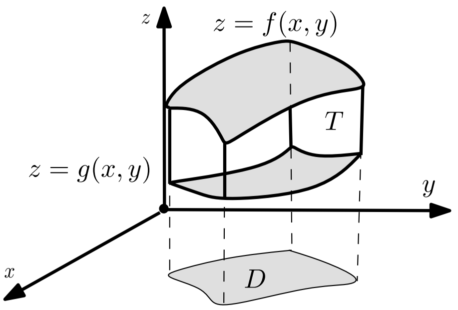
شکل ۵-۹ نمودار تابع $f(x,y)=\dfrac{۲x}{۱+x^۲+y}$، ناحیه‌ی $D=\{(x,y): ۰\le y\le ۱, \sqrt{y}\le x\le ۱\}$ و حجم محصور به صفحه‌ی $۳x+۶y+۴z=۱۲$ و صفحات مختصات.

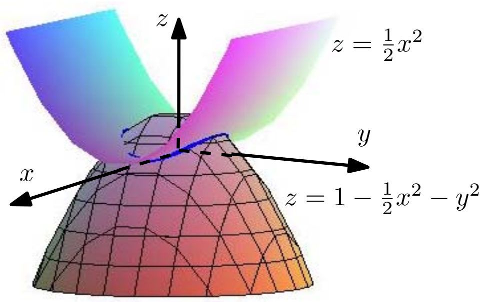
مثال ۴-۱-۸ حجم محصور بین صفحات مختصات و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۳x+۶y+۴z=۱۲$ را محاسبه کنید.

معادله‌ی خط حاصل از تلاقی صفحه‌ی π با صفحه‌ی xoy به ازای $z=۰$ به دست می‌آید که عبارت است از $۳x+۶y=۱۲$. از سوی دیگر صفحه‌ی π رویه‌ای به معادله‌ی $z=\frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)$ است. بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از $\iint_D \frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)dA$ که $D=\{(x,y): ۰\le x\le ۴\ ,\ ۰\le y\le ۲-\frac{x}{۲}\}$.

$$\begin{aligned}
\int\int_D \frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)dA &= \int_۰^۴ \left(\int_۰^{۲-\frac{x}{۲}} \frac{۳}{۴}(۴-x-۲y)dy \right) dx \\
&= \frac{۳}{۴}\int_۰^۴ (۴y-xy-y^۲)\Big|_{y=۰}^{y=۲-\frac{x}{۲}} dx \\
&= \frac{۳}{۱۶}\int_۰^۴ (۱۶-۸x+x^۲)dx = ۴
\end{aligned}$$

حجم ناحیه‌ی T از فضا، بین نمودار توابع $z = f(x,y)$ و $z = g(x,y)$ که تصویر T در صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی D است (شکل ۵–۸) به کمک انتگرال دوگانه محاسبه می‌شود. این حجم در حالتی که روی D داشته باشیم $g(x,y) \le f(x,y)$ عبارت است از $\iint_D (f(x,y) - g(x,y))dA$.





شکل ۵–۸ حجم بین نمودار توابع $z = f(x,y)$ و $z = g(x,y)$ روی ناحیه‌ی D و حجم محصور به رویه‌ی $z = \frac{۱}{۲}x^۲$ و سهمی‌گون بیضوی $z = ۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ - y^۲$.

مثال ۴–۱–۹ حجم محصور بین رویه‌ی استوانه‌ای $z = \frac{۱}{۲}x^۲$ و سهمی‌گون بیضوی $z = ۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ - y^۲$ را محاسبه کنید.

تصویر قائم خم حاصل از تلاقی رویه‌ی استوانه‌ای $z = \frac{۱}{۲}x^۲$ و سهمی‌گون بیضوی $z = ۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ - y^۲$ بر صفحه‌ی xoy دایره‌ای با معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ است. بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از $\iint_D (۱ - x^۲ - y^۲)dA$ که $D = \{(x,y) : ۰ \le x \le ۱ \ , \ ۰ \le y \le \sqrt{۱ - x^۲}\}$.

$$\begin{aligned}
\iint_D (۱ - x^۲ - y^۲)dA &= \int_۰^۱ \left(\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} (۱ - x^۲ - y^۲)dy \right) dx \\
&= \int_۰^۱ (y - x^۲y - \frac{۱}{۳}y^۳)\Big|_{y=۰}^{y=\sqrt{۱-x^۲}} dx \\
&= \int_۰^۱ (\sqrt{۱ - x^۲} - x^۲\sqrt{۱ - x^۲} - \frac{۱}{۳}\sqrt{(۱ - x^۲)^۳}dx \\
&= \left(\frac{۱}{۴}x\sqrt{۱ - x^۲} + \frac{۱}{۴}\arcsin x + \frac{۱}{۶}x\sqrt{(۱ - x^۲)^۳}\right)\Big|_۰^۱ \\
&= \frac{\pi}{۸}
\end{aligned}$$

یکی دیگر از کاربردهای انتگرال دوگانه، محاسبه‌ی مساحت نواحی در $\mathbb{R}^2$ است. در واقع حجم محصور به نمودار $f(x,y) = 1$ و صفحه‌ی xoy روی ناحیه‌ی D از نظر مقدار برابر مساحت ناحیه‌ی D است.

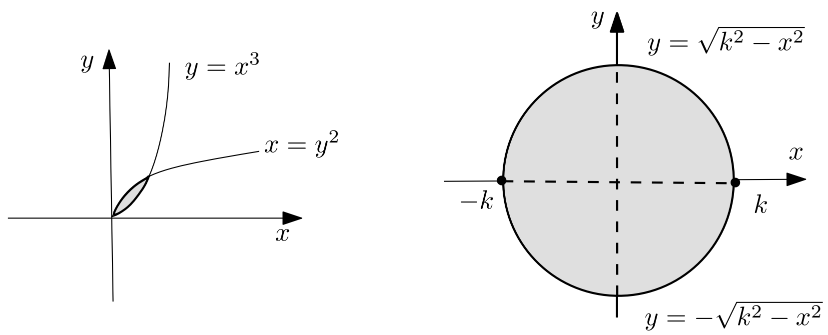
مثال ۴–۱–۱۰ به کمک انتگرال دوگانه مساحت دایره‌ای به شعاع k را به دست آورید.

می‌توان مرکز دایره را مبدأ در نظر گرفت. مساحت دایره‌ی مورد نظر عبارت است از انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D dA$ که:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq k^2\} \\ &= \{(x,y) : -k \leq x \leq k \ , \ -\sqrt{k^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{k^2 - x^2} \end{aligned}$$

بنابر این مساحت دایره عبارت است از:

$$\iint_D dA = \int_{-k}^{k} \left(\int_{-\sqrt{k^2-x^2}}^{\sqrt{k^2-x^2}} dy \right) dx = 2\int_{-k}^{k} \sqrt{k^2 - x^2} dx = \pi k^2$$



شکل ۵–۹ مساحت دایره و ناحیه‌ی محصور به سهمی $x = y^2$ و نمودار تابع $y = x^3$.

مثال ۴–۱–۱۱ به کمک انتگرال دوگانه مساحت ناحیه‌ی محصور به سهمی $x = y^2$ و نمودار تابع $y = x^3$ را به دست آورید.

مساحت ناحیه‌ی مورد نظر عبارت است از انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D dA$ که در آن

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, \ \ y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}\}$$

بنابر این مساحت این ناحیه عبارت است از:

$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx \right) dy = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - y^2) dy = \frac{5}{12}$$

اگر ناحیه‌ی D را به عنوان یک ناحیه ساده‌ی عمودی، یعنی به صورت زیر در نظر بگیریم

$$D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ \ x^3\le y\le \sqrt{x}\}$$

آنگاه مساحت ناحیه‌ی مورد نظر به شکل زیر هم قابل محاسبه است:

$$\int_0^1\left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\right)dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)dx=\frac{5}{12}$$

در این مثال مشاهده می‌شود که هر دو فرمول قضیه‌ی فوبینی (۴–۱–۳) به نتیجه‌ی یکسان می‌رسند. برای برخی از نواحی ساده، یکی از فرمول‌ها ممکن است منجر به یک انتگرال پیچیده و فرمول دیگر به انتگرال ساده‌ای منتهی شود.

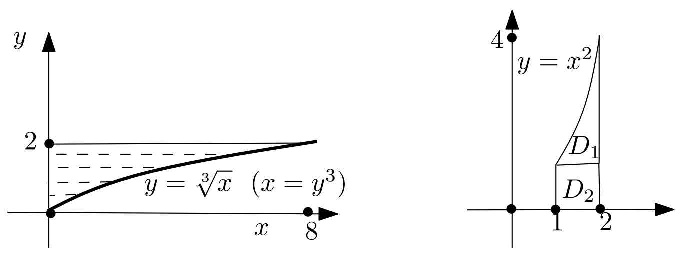
مثال ۴–۱–۱۲ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{1+y^4}$.

مشاهده می‌شود که محاسبه‌ی این انتگرال با ترتیب داده شده با روش تجزیه‌ی کسرهای جزئی و به سختی امکان پذیر است. در حالی که می‌توانیم ناحیه‌ی ساده‌ی D را به صورت ساده‌ی افقی بیان کنیم.

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y): 0\le x\le 8\ ,\ \sqrt[3]{x}\le y\le 2\}\\ &= \{(x,y): 0\le y\le 2\ ,\ 0\le x\le y^3\}\end{aligned}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{dydx}{1+y^4} &= \int_0^2\int_0^{y^3}\frac{dxdy}{1+y^4}\\ &= \int_0^2 \frac{x}{y^4+1}\Big|_{x=0}^{x=y^3}dy\\ &= \frac{1}{4}\ln(1+y^4)\Big|_0^2=\frac{1}{4}\ln 17\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۰ ناحیه‌ی D در مثال ۴–۱–۱۳. ناحیه‌ی D در مثال ۴–۱–۱۲.

مثال ۴-۱-۱۳ مطلوب است $\int_{\circ}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy+\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy$.

برای $D_{۱}=\{(x,y):۱\leq x\leq ۲\ ,\ \circ\leq y\leq ۱\}$ داریم:

$$\int_{\circ}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy=\int\int_{D_{۱}}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dA$$

به همین ترتیب برای

$$D_{۲}=\{(x,y):\sqrt{y}\leq x\leq ۲\ ,\ ۱\leq y\leq ۴\}=\{(x,y):۱\leq x\leq ۲\ ,\ \circ\leq y\leq x^{۲}\}$$

داریم:

$$\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy=\int\int_{D_{۲}}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dA$$

پس با توجه به قضیه‌ی ۴-۳-۳ داریم:

$$\int_{\circ}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy+\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy=\int\int_{D}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dA$$

که در آن $D=\{(x,y):۱\leq x\leq ۲\ ,\ \circ\leq y\leq x^{۲}\}$. به این ترتیب:

$$\begin{aligned}\int\int_{D}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dA &= \int_{۱}^{۲}\int_{\circ}^{x^{۲}}\frac{y}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dydx\\ &= \int_{۱}^{۲}\int_{\circ}^{x^{۲}}(\frac{۱}{۲}y^{۲}|_{\circ}^{x^{۲}})\frac{۱}{x^{۴}}\sin(\frac{\pi x}{۲})dx\\ &= \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}\sin(\frac{\pi x}{۲})dx=\frac{۱}{\pi}\end{aligned}$$

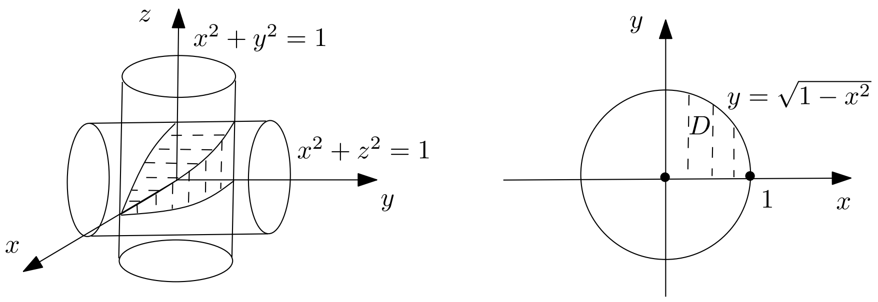
در برخی از موارد، تقارن ناحیه‌ی مورد نظر حجم محاسبات را کم‌تر می‌کند. در مثال بعد یکی از این موارد مطرح شده است.

مثال ۴-۱-۱۴ حجم مقطع استوانه‌های $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $x^{۲}+z^{۲}=۱$ چیست؟

محورهای مختصات محور تقارن استوانه‌های $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $x^{۲}+z^{۲}=۱$ هستند. پس کافی است حجم زیرناحیه‌ی واقع در یک هشتم اول فضا، یعنی زیرناحیه‌ای که برای آن $x,y,z\geq\circ$ محاسبه و در هشت ضرب شود. حجم مورد نظر را می‌توانیم حجم محصور به یک رویه، روی یک ناحیه‌ی مناسب در نظر بگیریم. این رویه را می‌توان نمودار یک تابع مناسب و نظیر یکی از استوانه‌ها مثلاً $z=f(x,y)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ و ناحیه‌ی مناسب را

$D = \{(x,y) : ۰ \leq x \leq ۱\ ,\ ۰ \leq y \leq \sqrt{۱ - x^۲}\}$ در نظر گرفت. به این ترتیب حجم مورد نظر عبارت است از:

$$۸\int_۰^۱ \left(\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} \sqrt{۱ - x^۲}dy\right)dx = ۸\int_۰^۱ (۱ - x^۲)dx = \frac{۱۶}{۳}$$



شکل ۵–۱۱ حجم محصور به استوانه‌های $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ در $\frac{۱}{۸}$ اول.

۴–۲ تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

به کمک تغییر متغیر می‌توان در حالت‌های خاص، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را به یک ناحیه‌ی ساده‌تر، یا تابع را به تابعی ساده‌تر تبدیل کرد. فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ ناحیه‌ای در صفحه‌ی دکارتی xy باشد که توسط تغییر متغیر $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ به ناحیه‌ی D^* در صفحه‌ی uv تبدیل می‌شود. همچنین فرض کنیم نگاشت $T : D \to D^*$ با ضابطه‌ی $T(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ یک به یک، پوشا و وارون T نگاشت $S : D^* \to D$ با ضابطه‌ی $S(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ هر دو مشتق‌پذیر باشند. یک افراز منظم برای ناحیه‌ی D مشخص شده توسط خطوط $x = x_i$، $(i = ۱..n)$ و $y = y_i$، $(j = ۱..m)$ را در نظر می‌گیریم. تصویر این خطوط از صفحه‌ی دکارتی xy توسط نگاشت T به ترتیب عبارتند از خطوط $u_i = u(x_i, y)$ و $v_j = v(x, y_j)$ در صفحه‌ی دکارتی uv. باید توجه داشت که $u_i = u(x_i, y)$ برای مقادیر مناسبی از y و $v_j = v(x, y_j)$ برای مقادیر مناسبی از x، خم‌هایی در صفحه‌ی xy هستند. یک مجموع ریمان برای تابع f با ضابطه‌ی $z = f(x,y)$ نظیر شبکه خطوط x_i و y_j برای ناحیه‌ی D عبارت است از $\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$ که در آن $\Delta D_{i,j} := \Delta x_i \Delta y_j$ مساحت زیر ناحیه‌ی D_{ij} است. این زیرناحیه توسط خطوط $x = x_i,\ x = x_{i-۱}$ و $y = y_j,\ y = y_{j-۱}$ محصور شده است. به کمک خم‌های $u_i = u(x_i, y)$ و $v_j = v(x, y_j)$، می‌توان D را اجتماع زیرناحیه‌های $D^*_{i,j}$ با مساحت $\Delta D^*_{i,j}$ در نظر گرفت که توسط خم‌های

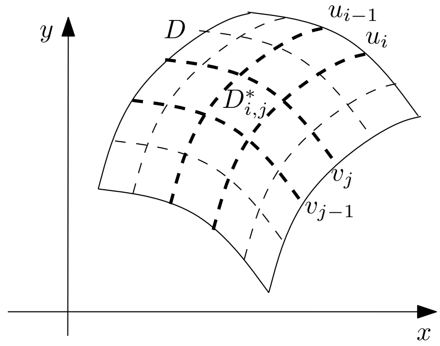
$u_i = u(x_i, y),\ u_{i-۱} = u(x_{i-۱}, y)$ و $v_j = v(x, y_j),\ v_{j-۱} = v(x, y_{j-۱})$ محصور شده است. با توجه به آنچه در فصل‌های اول و دوم گفتیم، توسط بردارهای مماس بر خم‌های u_i, v_j، یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید که مساحت آن عبارت است از:

$$||u_i'(y_j) \times v_j'(x_i)||\Delta u_i \Delta v_j = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(x_i, y_j) & \frac{\partial x}{\partial v}(x_i, y_j) & ۰ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(x_i, y_j) & \frac{\partial y}{\partial v}(x_i, y_j) & ۰ \end{pmatrix} \right| \Delta u_i \Delta v_j$$

برای سادگی قرار می‌دهیم $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$. به این ترتیب:

$$\Delta D_{i,j}^* \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(x_i, y_j)\right| \Delta u_i \Delta v_j$$

بنابر این مجموع ریمان $\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$ بر حسب متغیرهای u و v تقریباً برابر $\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(x_i, y_j)\right|\Delta u_i \Delta v_j$ خواهد بود. پس در حد، قضیه‌ی زیر به دست می‌آید.



شکل ۵–۱۲ تغییر متغیر $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$.

قضیه ۴–۲–۱ فرض کنیم D^* ناحیه‌ای در صفحه‌ی uv و D تصویر آن تحت نگاشت یک به یک و پوشای $S : D^* \to D$ با ضابطه‌ی $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ باشد. همچنین فرض کنیم S و T هر دو مشتق‌پذیرند. در این صورت اگر f روی D انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $f \circ S$ روی D^* انتگرال‌پذیر است و

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \mid \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mid dudv$$

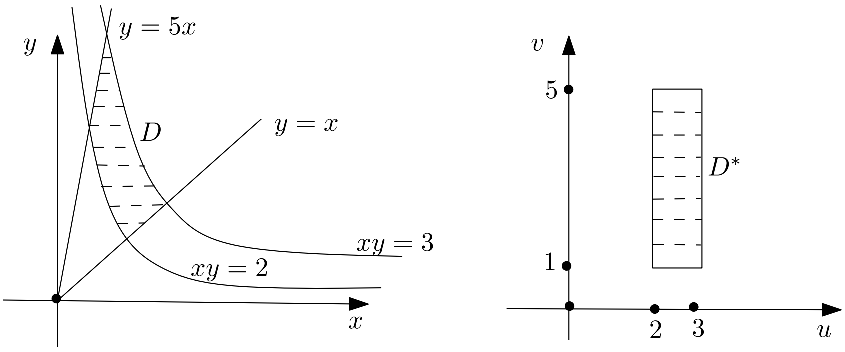
لازم به ذکر است، $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ که **ژاکوبین** S نامیده می‌شود همان دترمینان ماتریس ژاکوبی S است. چون نگاشت S وارون T، یعنی $T\circ S$ نگاشت همانی است، بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای به ازای $\mathbf{a}=(x_\circ,y_\circ)$ و $\mathbf{b}=(u_\circ,v_\circ)$ داریم $D_{\mathbf{a}}T\ D_{\mathbf{b}}S=I$ که I ماتریس یکانی است. بنابر این $(\det D_{\mathbf{a}}T)\ (\det D_{\mathbf{b}}S)=۱$. در نتیجه $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(x_\circ,y_\circ)\ \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(u_\circ,v_\circ)=۱$ یا به طور خلاصه‌تر $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.

مثال ۴-۲-۲ انتگرال دوگانه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=x^۲y^۲$ را روی ناحیه‌ی D، محصور به هذلولی‌های $xy=۲$، $xy=۳$ و خطوط $y=x$ و $y=۵x$ محاسبه کنید.

قرار می‌دهیم $u=xy$ و $v=\dfrac{y}{x}$. در این‌صورت $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$، $y=\sqrt{uv}$،
$D^*=\{(u,v)\ :\ ۲\le u\le ۳\ ,\ ۱\le v\le ۵\}$,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{۱}{۲v\sqrt{\frac{u}{v}}} & \dfrac{-\frac{u}{v^۲}}{۲v\sqrt{\frac{u}{v}}}\\[2ex] \dfrac{v}{۲\sqrt{uv}} & \dfrac{u}{۲\sqrt{uv}}\end{pmatrix}=\frac{۱}{۲v}$$

$$\begin{aligned}\int\int_D x^۲y^۲dA &= \int_۱^۵\int_۲^۳ u^۲\ |\frac{۱}{۲v}|\ dudv\\ &= \frac{۱}{۶}\int_۱^۵\frac{u^۳}{|v|}\Big|_۲^۳dv=\frac{۱۹}{۶}\int_۱^۵\frac{dv}{v}=\frac{۱۹}{۶}\ln ۵\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۳ ناحیه‌ی D محصور به خم‌های $xy=۲$، $xy=۳$، $y=x$ و $y=۵x$

در این مثال می‌توانستیم $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ را به شکل دیگری هم محاسبه کنیم.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^{۲}} & \frac{۱}{x} \end{pmatrix} = ۲\frac{y}{x} = ۲v \quad , \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{۱}{۲v}$$

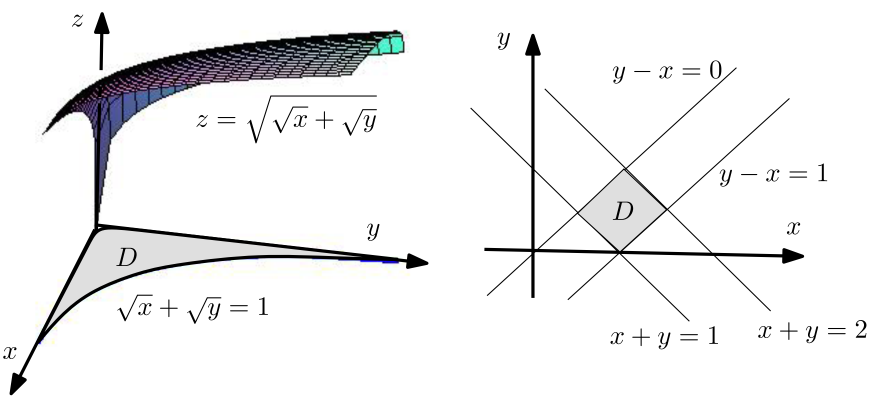
مثال ۴–۲–۳ مساحت ناحیه‌ی محدود به خطوط $x+y=۱$، $x+y=۲$، $y-x=\circ$ و $y-x=۱$ را به کمک انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

بدون استفاده از تغییر متغیر ناگزیر به تقسیم ناحیه‌ی مورد نظر به دو مثلث هستیم ولی اگر قراردهیم $u=x+y$ و $v=y-x$ آنگاه $x=\frac{u-v}{۲}$ و $y=\frac{u+v}{۲}$،

$$D^* = \{(u,v) \ : \ ۱ \le u \le ۲ \ , \ \circ \le v \le ۱\} \ , \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}$$

بنابر این مساحت مورد نظر عبارت است از:

$$\int\int_D dA = \int\int_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA = \int_\circ^۱ \int_۱^۲ \left|\frac{۱}{۲}\right| dudv = \frac{۱}{۲}\int_\circ^۱ dv \int_۱^۲ du = \frac{۱}{۲}$$



شکل ۵–۱۴ ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x+y=۱$، $x+y=۲$، $y-x=\circ$ و $y-x=۱$. نمودار تابع $f(x,y)=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ و ناحیه‌ی D، محصور به خطوط $x=\circ$، $y=\circ$ و خم به معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$.

مثال ۴–۲–۴ مقدار $\int\int_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ dA$ روی ناحیه‌ی D، محصور به خطوط $x=\circ$، $y=\circ$ و خم به معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ را محاسبه کنید.

قرار می‌دهیم $x=u\cos^۴ v$ و $y=u\sin^۴ v$.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq ۱ \Longleftrightarrow \sqrt{u\cos^۴ v}+\sqrt{u\sin^۴ v} \leq ۱ \Longleftrightarrow \sqrt{u} \leq ۱ \Longleftrightarrow u \leq ۱$$
$$D^* = \{(u,v) \ : \ ۰ \leq u \leq ۱ \ , \ ۰ \leq v \leq \frac{\pi}{۲}\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix} \cos^۴ v & -۴u\sin v\cos^۳ v \\ \\ \sin^۴ v & ۴u\cos v\sin^۳ v\end{pmatrix} \\ &= ۴u\cos^۳ v \ \sin^۳ v \ (\cos^۲ v+\sin^۲ v)\end{aligned}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\int\int_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}dA &= \int\int_{D^*} \sqrt[۴]{u} \ |۴u\cos^۳ v \ \sin^۳ v|dA \\ &= \int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱ ۴\sqrt[۴]{u^۵} \ |\cos^۳ v \ \sin^۳ v| \ dudv \\ &= \int_۰^۱ ۴\sqrt[۴]{u^۵}du\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۳ v \ \sin^۳ v \ dv = \frac{۴}{۲۷}\end{aligned}$$

۴-۳ انتگرال سه گانه

فرض کنیم تابع سه متغیره‌ی $f \ : \ \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ روی مکعب مستطیل $T := [a_۱,b_۱]\times[a_۲,b_۲]\times[a_۳,b_۳]$ کراندار باشد. افرازهای $P_x=\{x_۰,x_۱,...,x_n\}$ را برای بازه‌ی $[a_۱,b_۱]$، $P_y=\{y_۰,y_۱,...,y_m\}$ را برای $[a_۲,b_۲]$ و $P_z=\{z_۰,z_۱,...,z_p\}$ را برای $[a_۳,b_۳]$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم M_{ijk} کوچکترین کران بالای مقادیر $f(x,y,z)$ در مکعب مستطیل $T_{ijk} := [x_{i-۱},x_i]\times[y_{j-۱},y_j]\times[z_{k-۱},z_k]$ برای $i=۱,...,n$، $j=۱,...,m$ و $k=۰,...,p$ و m_{ijk} بزرگترین کران پایین مقادیر $f(x,y,z)$ در مکعب مستطیل‌های T_{ijk} باشند. اگر f پیوسته باشد این مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع در T_{ijk} هستند. قرار می‌دهیم:

$$U(f,P) := \sum_{k=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{n} M_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k \quad ,$$
$$L(f,P) := \sum_{k=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{n} m_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

همانند آنچه برای توابع حقیقی یک و دو متغیره گفتیم، در اینجا نیز مقادیر $U(f,P)$ و $L(f,P)$ به ترتیب مجموع‌های ریمان بالائی و پائینی تابع سه متغیره‌ی حقیقی f برای افراز $P_x\times P_y\times P_z$ نامیده می‌شوند. اگر بتوانیم با انتخاب افرازهای مناسب تفاضل این دو مقدار را به دلخواه کوچک کنیم بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، عدد حقیقی یکتائی

وجود دارد که از تمام مجموع‌های ریمان بالائی f برای افراز دلخواه کوچکتر و از تمام مجموع‌های ریمان پائینی تابع f برای افراز دلخواه بزرگتر است. این عدد یکتا را انتگرال سه‌گاانه‌ی f روی $[a,b]$ می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر، در صورتی که برای هر $\varepsilon > ۰$ افراز P_ε برای مکعب مستطیل $T := [a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$ وجود داشته باشد به قسمی که $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$، تابع f را روی مکعب مستطیل $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$ انتگرال‌پذیر می‌نامیم. در این صورت عدد منحصر به فردی مانند I وجود دارد به قسمی که برای افراز P از T داریم $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$. عدد I را انتگرال سه‌گانه‌ی f روی مکعب مستطیل $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$ نامیده و با نماد $\iiint_T f\ dV$ یا $\iiint_T f(x,y,z)\ dxdydz$ نمایش می‌دهیم.

در بسیاری از موارد تابع f روی نواحی پیچیده‌تری تعریف شده است. برای ناحیه‌ی دلخواه ولی کراندار T (محصور در مکعب مستطیلی مانند $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$)، به ازای افراز P از $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times [a_۳, b_۳]$ مجموع‌های بالایی و پایینی $U(f,P)$ و $L(f,P)$ را تنها برای مکعب مستطیل‌هایی به دست می‌آوریم که با T اشتراک دارند. به عبارت دیگر در این حالت قرار می‌دهیم

$$U(f,p) := \sum_k \sum_j \sum_i M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad ; \quad T_{ijk} \cap T \neq \emptyset$$

$$L(f,P) := \sum_k \sum_j \sum_i m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad ; \quad T_{ijk} \cap T \neq \emptyset$$

و به شکل مشابه مفهوم انتگرال سه‌گانه‌ی f روی ناحیه‌ی T تعریف و با نماد $\iiint_T f\ dV$ نمایش داده می‌شود. در حالت خاص اگر f تابع ثابت ۱ باشد، این مقادیر تقریب‌هائی از حجم ناحیه‌ی محدود به ناحیه‌ی T هستند. در این حالت خاص، $U(f,P)$ دارای مقداری بیشتر یا مساوی حجم این ناحیه و $L(f,P)$ دارای مقداری کوچک‌تر یا مساوی حجم این ناحیه است.

برای توابع سه متغیره نیز به دلیل پیچیدگی و گستردگی بحث تنها به ذکر این نکته می‌پردازیم که برای توابع سه متغیره، شرط انتگرال‌پذیری شرطی ضعیف‌تر از پیوستگی است. همانند انتگرال معین توابع حقیقی یک متغیره و انتگرال دوگانه، اطلاع از انتگرال‌پذیری یک تابع کمکی به محاسبه‌ی مقدار انتگرال آن نمی‌کند. در عمل انتگرال‌های چندگانه به روش‌های عددی تقریب زده می‌شوند ولی برای موارد خاص می‌توان از تعمیم قضیه‌ی فوبینی برای محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه استفاده کرد. قضیه‌ی زیر تعمیم قضیه‌ی مشابه برای انتگرال‌های دوگانه است.

قضیه ۴–۳–۱ الف) اگر توابع سه متغیره‌ی f و g روی ناحیه‌ی کران‌دار T انتگرال‌پذیر باشند، برای $k \in \mathbb{R}$ تابع $kf + g$ نیز روی T انتگرال‌پذیر است و

$$\iiint_T (k\ f(x,y,z) + g(x,y,z)\ dV = k\ \iiint_T f(x,y,z)\ dV + \iiint_T g(x,y,z)\ dV$$

ب) اگر تابع سه متغیره‌ی f روی ناحیه‌های کران‌دار T_1, T_2 انتگرال‌پذیر باشد و اشتراک T_1 و T_2 حداکثر یک رویه‌ی پیوسته باشد آنگاه f روی $T = T_1 \cup T_2$ نیز انتگرال‌پذیر است و

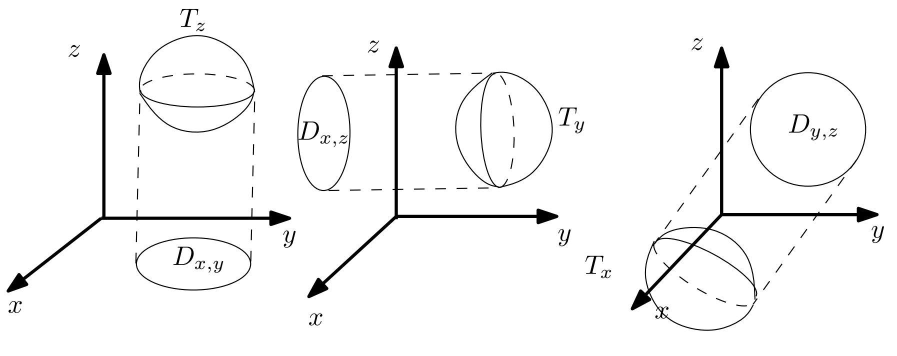
$$\iiint_T f(x,y,z)\ dV = \iiint_{T_1} f(x,y)\ dV + \iiint_{T_2} f(x,y,z)\ dV$$

به کمک قضیه‌ی فوبینی برای برخی از نواحی و حالت‌های خاص می‌توان محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه را به محاسبه‌ی انتگرال توابع یک متغیره تبدیل کرد. به همین دلیل در این قسمت به معرفی چند دسته از نواحی خاص در فضا می‌پردازیم.

۱) ناحیه‌ی $T_z \subseteq \mathbb{R}^3$ را z**—ساده** گویند (شکل ۵—۸) هرگاه یک ناحیه‌ی نرمال D_{xy} در صفحه‌ی xoy و توابع پیوسته‌ی دو متغیره‌ی g_1 و g_2 روی D_{xy} وجود داشته باشند به قسمی که $T_z = \{(x,y,z)\ :\ (x,y) \in D_{xy}\ ,\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$.

۲) ناحیه‌ی $T_y \subseteq \mathbb{R}^3$ را y**—ساده** گویند (شکل ۵—۸) هرگاه یک ناحیه‌ی نرمال D_{xz} در صفحه‌ی xoz و توابع پیوسته‌ی دو متغیره‌ی h_1 و h_2 روی D_{xz} وجود داشته باشند به قسمی که $T_y = \{(x,y,z)\ :\ (x,z) \in D_{xz}\ ,\ h_1(x,z) \le y \le h_2(x,z)\}$.

۳) ناحیه‌ی $T_x \subseteq \mathbb{R}^3$ را x**—ساده** گویند (شکل ۵—۸) هرگاه یک ناحیه‌ی نرمال D_{yz} در صفحه‌ی yoz و توابع پیوسته‌ی دو متغیره‌ی k_1 و k_2 روی D_{yz} وجود داشته باشند به قسمی که $T_x = \{(x,y,z)\ :\ (y,z) \in D_{yz}\ ,\ k_1(y,z) \le x \le k_2(y,z)\}$.



شکل ۵—۱۴ نواحی x—ساده ، y—ساده و z—ساده .

مثال ۴-۳-۲ ناحیه‌ی T محدود به کره‌ی $(x-۳)^۲+(y-۴)^۲+(z-۱)^۲=۱$ هم x-ساده، هم y-ساده وهم z-ساده است. در واقع

$$T=\{(x,y,z)\ :\ (x,y)\in D_{xy}\ ,\ f_۱(x,y)\leq z\leq f_۲(x,y)\}$$

به قسمی که:

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \{(x,y)\ :\ (x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۱\} \\ f_۱(x,y) &= ۱-\sqrt{۱-(x-۳)^۲+(y-۴)^۲} \\ f_۲(x,y) &= ۱+\sqrt{۱-(x-۳)^۲+(y-۴)^۲} \end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ (x,y)\in D_{xz}\ ,\ g_۱(x,z)\leq z\leq g_۲(x,z)\}\ , \\ D_{xz} &= \{(x,z)\ :\ (x-۳)^۲+(z-۱)^۲=۱\} \\ g_۱(x,z) &= ۴-\sqrt{۱-(x-۳)^۲+(z-۱)^۲} \\ g_۲(x,z) &= ۴+\sqrt{۱-(x-۳)^۲+(z-۱)^۲} \\ T &= \{(x,y,z)\ :\ (x,y)\in D_{yz}\ ,\ h_۱(y,z)\leq z\leq h_۲(y,z)\}\ , \\ D_{yz} &= \{(y,z)\ :\ (y-۴)^۲+(z-۱)^۲=۱\} \\ h_۱(y,z) &= ۳-\sqrt{۱-(y-۴)^۲+(z-۱)^۲} \\ h_۲(y,z) &= ۳+\sqrt{۱-(y-۴)^۲+(z-۱)^۲} \end{aligned}$$

قضیه ۴-۳-۳ اگر تابع سه متغیره‌ی f روی ناحیه‌ی T پیوسته باشد، روی T انتگرال‌پذیر است. در حالت خاص اگر تصویر T روی هر یک از صفحات xoy یا xoz یا yoz ساده باشد، برای نواحی x-ساده‌ی D_{zy} ، y-ساده‌ی D_{xz} و z-ساده‌ی T_{xy} داریم:

$$\iiint_T f(x,y,z)dV=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{g_۱(x,y)}^{g_۲(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dA$$

$$\iiint_T f(x,y,z)dV=\iint_{D_{xz}}\left(\int_{h_۱(x,z)}^{h_۲(x,z)} f(x,y,z)dy\right)dA$$

$$\iiint_T f(x,y,z)dV=\iint_{D_{yz}}\left(\int_{k_۱(y,z)}^{k_۲(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dA$$

همانند انتگرال‌های دوگانه، هر سه فرمول قضیه‌ی فوق به یک نتیجه منجر می‌شود ولی گاهی اوقات محاسبه‌ی با یکی از فرمول‌ها ساده‌تر است. در حالت خاص اگر به ازای توابع یک متغیره‌ی g,h,k داشته باشیم $f(x,y,z)=g(x)h(y)k(z)$ آنگاه

$$\int_{a_۱}^{b_۱}\int_{a_۲}^{b_۲}\int_{a_۳}^{b_۳} g(x)h(y)k(z)\;dz\;dy\;dx=\Big(\int_{a_۱}^{b_۱} g(x)\;dx\Big)\;\Big(\int_{a_۲}^{b_۲} h(y)\;dy\Big)\Big(\int_{a_۳}^{b_۳} k(z)\;dz\Big)$$

مثال ۴–۳–۴ مقدار $\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱(xy+yz+xz)dV$ را محاسبه کنید

$$\begin{aligned}\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱(xy+yz+xz)dV &= \int_۰^۱\int_۰^۱\Big(\int_۰^۱(xy+yz+xz)dx\Big)dA\\ &= \int_۰^۱\int_۰^۱(\tfrac{۱}{۲}x^۲(y+z)+xyz)|_۰^۱dA\\ &= \int_۰^۱\int_۰^۱(\tfrac{۱}{۲}(y+z)+yz)dA\\ &= \int_۰^۱(\int_۰^۱(\tfrac{۱}{۲}(y+z)+yz)dy)dz\\ &= \int_۰^۱(\tfrac{۱}{۴}y^۲+\tfrac{۱}{۲}y^۲z+\tfrac{۱}{۲}yz)|_۰^۱dz\\ &= \int_۰^۱(\tfrac{۱}{۴}+\tfrac{۱}{۲}z+\tfrac{۱}{۲}z)dz=\tfrac{۳}{۴}\end{aligned}$$

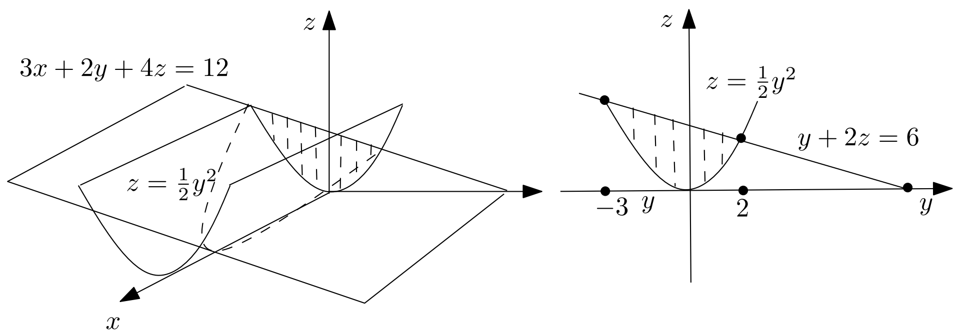
مثال ۴–۳–۵ مقدار $\iiint_T xyzdV$ را محاسبه کنید که در آن

$$T=\{(x,y,z)\;:\;۰\le x\le ۱,\;۰\le y\le x-۱,\;۰\le z\le ۱-x^۲\}$$

$$\begin{aligned}\iiint_T xyzdV &= \int_۰^۱\int_۰^{x-۱}\Big(\int_۰^{۱-x^۲}xyzdz\Big)dA\\ &= \int_۰^۱\int_۰^{۱-x}(\tfrac{۱}{۲}xyz^۲)\Big|_{z=۰}^{z=۱-x^۲}dA\\ &= \int_۰^۱\int_۰^{۱-x}\Big(\tfrac{۱}{۲}x(۱-x^۲)^۲ydy\Big)dx\\ &= \int_۰^۱\Big(\tfrac{۱}{۴}x(۱-x^۲)^۲y^۲\Big|_{y=۰}^{y=۱-x}\Big)dx\\ &= \int_۰^۱\tfrac{۱}{۴}x(۱-x^۲)^۲(۱-x)^۲dx=\tfrac{۴۷}{۳۳۶۰}\end{aligned}$$

در حالتی که $f(x,y,z)=۱$، مقدار $\Delta\overline{V_{ijk}} := \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ **اِلمان (عنصر)** حجم خواهد بود (شکل ۵–۱۰). در نتیجه $\iiint_T dV$ را می‌توان حجم محصور به ناحیه‌ی T در نظر گرفت.

مثال ۴–۳–۶ حجم ناحیه‌ی T محصور بین صفحه‌های به معادله‌ی $۳x+۲y+۴z=۱۲$ ، $x=۰$ و استوانه‌ی سهموی $z=\frac{۱}{۲}y^{۲}$ (شکل ۵–۱۰) را محاسبه کنید.



شکل ۵–۱۰ حجم ناحیه‌ی T در مثال ۴–۳–۶.

تصویر ناحیه‌ی T بر صفحه‌ی yoz ساده‌تر است. قرار می‌دهیم $h_۱(y,z)=۰$، $h_۲(y,z)=۴-\frac{۲}{۳}y-\frac{۴}{۳}z$ و $D_{yz}=\{(y,z)\ :\ -۳\le y\le ۲\ ,\ \frac{۱}{۲}y^{۲}\le z\le ۳-\frac{۱}{۲}y\}$. بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از $\iiint_T dV$ به قسمی که

$$T=\{(x,y,z)\ :\ (y,z)\in D_{yz}\ ,\ h_۱(y,z)\le x\le h_۲(y,z)\}.$$

به این ترتیب

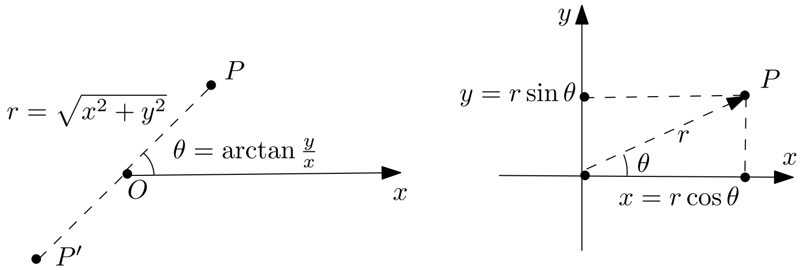
$$\begin{aligned}\iiint_T dV &= \iint_{D_{yz}}\left(\int_{۰}^{۴-\frac{۲}{۳}y-\frac{۴}{۳}z} dx\right)dA\\ &= \iint_{D_{yz}}(۴-\frac{۲}{۳}y-\frac{۴}{۳}z)dA\\ &= \int_{-۳}^{۲}\left(\int_{\frac{۱}{۲}y^{۲}}^{۳-\frac{۱}{۲}y}(۴-\frac{۲}{۳}y-\frac{۴}{۳}z)dz\right)dy=\frac{۶۲۵}{۳۶}\end{aligned}$$

پیش از مطرح کردن بحث تغییر متغیر برای انتگرال‌های دو و سه‌گانه به معرفی چند دستگاه مختصات غیر دکارتی در صفحه و فضا می‌پردازیم. خواهیم دید که با تغییر متغیر، در واقع یک دستگاه مختصات جدید وارد محاسبات می‌شود. به طور کلی در یک دستگاه

مختصات، به هر نقطه، مختصاتی نظیر می‌شود که به کمک آن می‌توان اشیای هندسی را با معادلات و نامعادلات جبری بیان کرد. با توجه به اهمیت تغییر متغیرهای قطبی، استوانه‌ای و کروی ابتدا به معرفی این دستگاه‌ها می‌پردازیم.

۴−۴ دستگاه مختصات قطبی در صفحه

یکی از روش‌های نمایش نقاط صفحه استفاده ازمختصات قطبی است. به این منظور ابتدا یک نیم‌خط جهت دار $\overrightarrow{Ox}$ در صفحه انتخاب می‌کنیم. می‌توانیم این نیم‌خط را نیمه‌ی نظیر اعداد مثبت از محور x بگیریم. نقطه‌ی O را **مبدأ یا قطب** و نیم خط $\overrightarrow{Ox}$ را **محور قطب** می‌نامند. اگر P نقطه‌ای درصفحه باشد به قسمی که $r = ||\overrightarrow{OP}||$ و زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{Ox}$ برابر θ باشد، (r,θ) را **مختصات قطبی** P می‌نامیم (شکل ۵−۱۱).



شکل ۵−۱۱ مختصات دکارتی و قطبی.

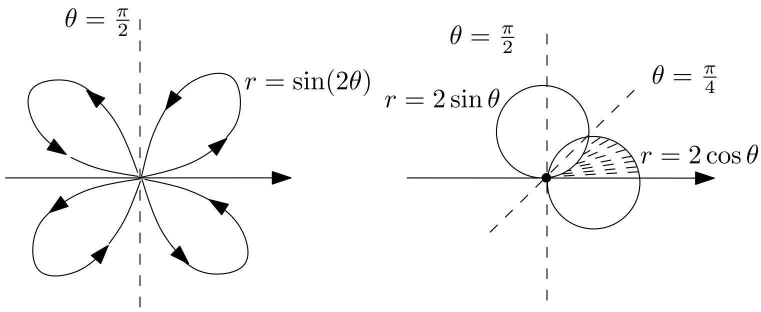
برای تعیین مختصات قطبی P ابتدا محور قطب را طوری دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی P روی آن قرار گیرد. سپس با توجه به جهت محور، r همان فاصله‌ی جبری P تا مبدأ خواهد بود. به این ترتیب می‌توان برای r مقادیر منفی نیز قائل شد. به عبارت دیگر اگر P دارای مختصات (r,θ) باشد آنگاه می‌توانیم برای آن مختصات $(-r,\theta-\pi)$ و $(-r,\pi+\theta)$ نیز قائل شویم. در این صورت P' منعکس نقطه‌ی P نسبت به O دارای مختصات $(-r,\theta)$ است. نقطه‌ی P' دارای مختصات $(r,\theta-\pi)$ نیز هست. باید توجه داشت که با این روش تناظر یک به یک بین نقاط صفحه و مختصات قطبی آنها وجود ندارد ولی مختصات قطبی نقطه‌ای یکتا را مشخص می‌کند. برای مبدأ مختصات، زاویه‌ی θ را دلخواه و r را برابر صفر در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی P با مختصات دکارتی (x,y) دارای مختصات قطبی $(r,\theta) = (\sqrt{x^۲+y^۲}, \arctan(\frac{y}{x}))$ و نقطه‌ی P با مختصات قطبی (r,θ) دارای مختصات دکارتی $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ است (شکل ۵−۱۱).

مثال ۴−۴−۱ الف) نقطه‌ی P با مختصات دکارتی $(۱,۱)$ دارای مختصات قطبی $(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴})$ و نقطه‌ی P' با مختصات دکارتی $(-۱,-۱)$ در دستگاه قطبی دارای مختصات

$(\sqrt{۲}, -\frac{۳\pi}{۴})$ یا $(\sqrt{۲}, \frac{۵\pi}{۴})$ است.

ب) برای تعیین معادله‌ی دایره‌های $C_۱ \ : x^۲+(y-۱)^۲ = ۴$ و $C_۲ \ : x^۲+(y-۲)^۲ = ۴$ در مختصات قطبی ابتدا معادله‌ی $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$ را می‌توان به صورت $x^۲+y^۲ = ۲y + ۳$ و معادله‌ی $x^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$ را می‌توان به صورت $x^۲+y^۲ = ۴y$ بیان کرد. با جایگزینی $x^۲+y^۲ = r^۲$ و $y = r\sin\theta$ داریم $C_۱ \ : r^۲ = ۲r\sin\theta + ۳$ و $C_۲ \ : r = ۴\sin\theta$.

ج) برای مشخص کردن ناحیه‌ی D، داخل دایره‌ی $C_۱ \ : x^۲+y^۲ = ۲x$ و خارج دایره‌ی $C_۲ \ : x^۲+y^۲ = ۲y$ واقع در ربع اول صفحه در مختصات قطبی (شکل ۵–۱۲) با جایگزینی $x^۲+y^۲ = r^۲$ ، $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ داریم $C_۱ \ : r = ۲\cos\theta$ و $C_۲ \ : r = ۲\sin\theta$ و $D = \{(r,\theta) \ : \ ۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۴} \ , \ ۲\sin\theta \leq r \leq ۲\cos\theta\}$.



شکل ۵–۱۲ ناحیه‌ی D در قسمت (ب) مثال ۴–۴–۱ و نمودار $r = \sin(۲\theta)$.

مثال ۴–۴–۲ نمودار $r = f(\theta) = \sin(۲\theta)$ را در دستگاه مختصات قطبی رسم کنید.

با مشتق‌گیری نسبت به θ نتیجه می‌شود $r' = ۲\cos(۲\theta)$. جدول تغییرات تابع برای $۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}$ داده شده است. علاوه بر این:

$$f(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \sin(۲(\theta + \frac{\pi}{۲})) = -\sin(۲\theta) = -f(\theta)$$

نمودار تابع در شکل ۵–۱۲ داده شده است.

جهت روی نمودار بیانگر پیمایش r بر حسب افزایش θ می‌باشد. مثلاً به ازای $\frac{\pi}{۲} \leq \theta \leq \pi$ نقطه‌ی $(\theta, f(\theta))$ در ربع چهارم است.

θ	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$
$f(\theta)$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
$f'(\theta)$	$+$	$+$	$+$	۰	$-$	$-$	$-$

۴–۵ دستگاه مختصات استوانه‌ای در فضا

برای نمایش یک نقطه در فضا می‌توان از مختصات استوانه‌ای استفاده کرد. این دستگاه به نوعی تعمیم دستگاه مختصات قطبی به فضا است. اگر P نقطه‌ای در فضا با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد، مختصات استوانه‌ای P عبارت است از (r,θ,z)، که در آن z سومین مولفه‌ی مختصات دکارتی P و (r,θ) مختصات قطبی نقطه‌ی (x,y)، تصویر P بر صفحه‌ی xoy هستند. پس نقطه‌ی با مختصات دکارتی (x,y,z) برای $x \neq ۰$ دارای مختصات استوانه‌ای $(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}, \arctan(\frac{y}{x}), z)$ است. به عکس، نقطه‌ی با مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) دارای مختصات دکارتی $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ است (شکل ۵–۱۳).

مثال ۴–۵–۱ الف) نقطه‌ی با مختصات دکارتی $(\sqrt{۳}, ۳, -۱)$ دارای مختصات استوانه‌ای $(۲\sqrt{۳}, \frac{\pi}{۳}, -۱)$ است.

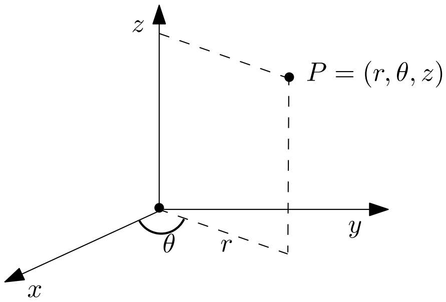
ب) معادله‌ی نیم مخروط $x^{۲}+y^{۲}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۰$ که $z \geq ۰$ در مختصات استوانه‌ای، با جایگزینی $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$ در معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۰$ به صورت $r^{۲}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۰$ یا $z = r|c|$ بیان می‌شود. معادله‌ی این مخروط به صورت $z = r\cot\varphi$ نیز قابل بیان است که $\varphi = \cot^{-۱}|c|$، زاویه‌ی بین مولد و محور مخروط است.

ج) معادله‌ی نیم‌کره‌ی $z \geq ۰$, $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=k^{۲}$ در مختصات استوانه‌ای، با جایگزینی $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$ در معادله‌ی نیم‌کره‌ی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=k^{۲}$ $(z \geq ۰)$ عبارت است از $z = \sqrt{k^{۲}-r^{۲}}$.

د) برای بیان ناحیه‌ی T، داخل سهمی‌گون $z = x^{۲}+y^{۲}$ و خارج مخروط $z = \sqrt{۳(x^{۲}+y^{۲})}$ در مختصات استوانه‌ای با جایگزینی $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$، معادله‌ی سهمی‌گون در مختصات استوانه‌ای به شکل $z = r^{۲}$ و معادله‌ی مخروط به صورت $z = \sqrt{۳}\,r$ بیان می‌شود. محل تلاقی این دو رویه از حل معادله‌ی $r^{۲} = z = \sqrt{۳}\,r$ به

دست می‌آید، پس $z = 3$ و $r = \sqrt{3}$. در نتیجه:

$$T = \{(r,\theta,z) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le \sqrt{3} \ , \ r^2 \le z \le \sqrt{3}\, r\}$$



شکل ۵—۱۳ مختصات استوانه‌ای.

۴—۶ دستگاه مختصات کروی

یکی دیگر از روش‌های نمایش نقاط در $\mathbb{R}^3$ استفاده از مختصات کروی است. اگر P نقطه‌ای در فضا با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد، مختصات کروی P عبارت است از (ρ,θ,φ) به قسمی که ρ فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مبدأ، $0 \le \theta \le 2\pi$ زاویه‌ی بین نقطه‌ی P' به مختصات (x,y) (تصویر P بر صفحه‌ی xoy) با جهت مثبت محور x و $0 \le \varphi \le \pi$ زاویه‌ی بین بردار مکان $\overrightarrow{OP}$ با جهت مثبت محور z است (شکل ۵—۱۴). به این ترتیب نقطه‌ی P با مختصات دکارتی (x,y,z) برای $x \neq 0$ دارای مختصات کروی $(\rho,\theta,\varphi) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2} \ , \ \arctan(\frac{y}{x}) \ , \ \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}))$ و نقطه‌ی P با مختصات کروی (ρ,θ,φ) دارای مختصات دکارتی به شکل $(x,y,z) = (\rho\cos\theta\sin\varphi \ , \ \rho\sin\theta\sin\varphi \ , \ \rho\cos\varphi)$ است (شکل ۵—۱۴).

مثال ۴—۶—۱ در مثال‌های زیر دستگاه مختصات کروی مطرح شده است.

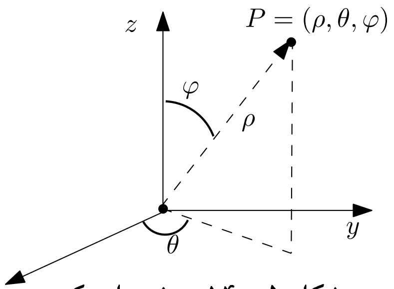
۱) نقطه‌ی P با مختصات دکارتی $(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ دارای مختصات کروی $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ است. به همین ترتیب نقطه‌ی P با مختصات دکارتی $(1,-1,\sqrt{2})$ دارای مختصات کروی $(2, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ است.

۲) برای مشخص کردن معادله‌ی مخروط $x^2+y^2-z^2 = 0$ $(z > 0)$ و نیم‌کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = k^2$ $(z \ge 0)$ در مختصات کروی با جایگزینی

$x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi$ و $z=\rho\cos\varphi$، معادله‌ی $x^2+y^2-z^2=0$ به صورت $\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi=0$ یا $\rho^2\cos(2\varphi)=0$ بیان می‌شود. بنابر این $\varphi=\frac{\pi}{4}$ معادله‌ی مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ $(z>0)$ است. با جایگزینی $x^2+y^2+z^2=\rho^2$، معادله‌ی نیم‌کره‌ی $x^2+y^2+z^2=k^2$ $(z\geq 0)$ را می‌توان به صورت $\rho=k$ بیان کرد.

۳) برای تعیین ناحیه‌ی T در فضا، داخل سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و خارج مخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ در مختصات کروی، با جایگزینی $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi$ و $z=\rho\cos\varphi$ معادله‌ی سهمی‌گون $\rho\cos\varphi=\rho^2\sin^2\varphi$ یعنی $\rho=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ و معادله‌ی مخروط $\rho\cos\varphi=\sqrt{3\rho^2\sin^2\varphi}$ یعنی $\cot\varphi=\sqrt{3}$ است که معادل است با $\varphi=\frac{\pi}{6}$. در نتیجه

$$T=\{(\rho,\theta,\varphi)\ :\ 0\leq\rho\leq\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\ \}$$



شکل ۵–۱۴ مختصات کروی.

۴–۷ تغییر متغیر قطبی در انتگرال‌های دوگانه

یک تغییر متغیر خاص در انتگرال‌های دوگانه، تغییر متغیر قطبی است. برای تغییر متغیر قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

مثال ۴–۷–۱ مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dA$ روی ناحیه‌ی D، محصور به دایره‌های $x^2+y^2=\pi^2$ و $x^2+y^2=4\pi^2$.

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. در این صورت

$$D^* = \{(r,\theta)\ :\ \pi \le r \le 2\pi\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

بنابر این

$$\int\int_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dA \;=\; \int\int_{D^*} r\sin r\ dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\pi^{2\pi} r\sin r\ dr = -6\pi^2$$

مثال ۴ـ۷ـ۲ مطلوب است $\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dA$ که D قرص $x^2+y^2 \le 1$ است.
قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. در این صورت:

$$D^* = \{(r,\theta)\ :\ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

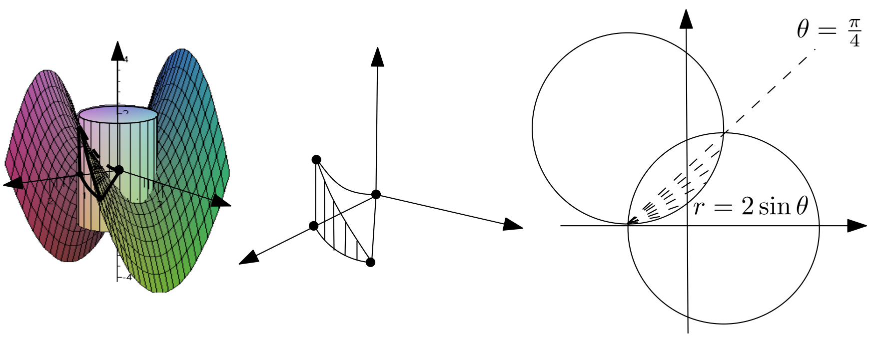
$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dA \;=\; \int\int_{D^*} \frac{r}{1+r^2}\ drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\ dr = \pi\ln 2$$

مثال ۴ـ۷ـ۳ مساحت ناحیه‌ی D در ربع اول صفحه، محصور به دایره‌های $C_1\ : x^2+y^2 = 2x$ و $C_2\ : x^2+y^2 = 2y$ را به کمک انتگرال دوگانه به دست آورید.

با جایگزینی $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ داریم $C_2\ : r = 2\sin\theta$. مساحت D دو برابر مساحت ناحیه‌ی D^* به شکل زیر است (شکل ۵ـ۱۶).

$$D^* = \{(r,\theta)\ :\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\ ,\ 0 \le r \le 2\sin\theta\}$$

$$2\int\int_{D^*} r\ drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\int_0^{2\sin\theta} 2r\ dr)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\ d\theta = \frac{\pi}{2} - 1$$



شکل ۵ـ۱۶ حجم محصور به زین اسبی، استوانه و صفحه‌ی xoy

مثال ۴ـ۷ـ۴ حجم محصور به زین اسبی $z = x^2 - y^2$، استوانه‌ی $x^2+y^2 = 1$ و صفحه‌ی xoy را در $\frac{1}{8}$ اول فضا به کمک انتگرال دوگانه به دست آورید (شکل ۵ـ۱۶).

برای $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $D = \{(r,\theta) \ : \ ۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۴} \ , \ ۰ \leq r \leq ۱\}$

حجم مورد نظر (شکل ۵–۱۶) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \int\int_D (x^۲ - y^۲) dA &= \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \int_۰^۱ (r^۲ \cos^۲\theta - r^۲ \sin^۲\theta) r \, d\theta dr \\ &= \int_۰^۱ r^۳ dr \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \cos ۲\theta d\theta = \frac{۱}{۸} \end{aligned}$$

۴–۸ تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه

برای توابع سه متغیره نیز به کمک تغییر متغیر می‌توان در حالت‌های خاص ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را به یک ناحیه‌ی ساده‌تر یا تابع را به تابعی ساده‌تر تبدیل کرد. با بحثی شبیه به آنچه در مورد توابع حقیقی دو متغیره گفته شد، قضیه‌ی زیر در مورد تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه قابل بیان است.

قضیه ۴–۸–۱ فرض کنیم D^* ناحیه‌ای در فضای دکارتی uvw و D تصویر آن در فضای دکارتی xyz تحت نگاشت یک به یک و پوشای $S : D^* \to D$ با ضابطه‌ی $S(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ باشد. همچنین فرض کنیم S و وارون آن هر دو مشتق‌پذیرند. در این صورت اگر f روی D انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $f \circ S$ روی D^* انتگرال‌پذیر است و

$$\int\int\int_D f(x,y,z) dxdydz = \int\int\int_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \, |J| \, dudvdw$$

که در آن منظور از $|J|$، قدر مطلق ژاکوبین S به شکل زیر است.

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

قابل ذکر است که شبیه به توابع دومتغیره، $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$.

مثال ۴–۸–۲ مطلوب است محاسبه‌ی حجم محدود به صفحات $x + y + ۲z = \pm ۳$، $x - ۲y + z = \pm ۲$ و $۴x + y + z = \pm ۶$ به کمک انتگرال سه‌گانه.

بدون استفاده از تغییر متغیر ناگزیر به تقسیم ناحیه‌ی مورد نظر به سه ناحیه هستیم ولی اگر قراردهیم $u = x + y + ۲z$، $v = x - ۲y + z$ و $w = ۴x + y + z$ داریم

$$T^* = \{(u,v,w) \ : \ -۳ \leq u \leq ۳ \ , \ -۲ \leq v \leq ۲ \ , \ -٦ \leq w \leq ٦\},$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} = ۱۸ \ \ , \ \ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{۱}{۱۸}$$

بنابر این حجم مورد نظر عبارت است از

$$\begin{aligned} \int\int\int_T dxdydz &= \int\int_{T^*} |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| dudvdw \\ &= \int_{-٦}^{٦}\int_{-۲}^{۲}\int_{-۳}^{۳} \frac{۱}{۱۸} \, dudvdw = ۱٦ \end{aligned}$$

۴-۹ تغییر متغیر استوانه‌ای در انتگرال‌های سه‌گانه

یکی از تغییر متغیرهای مهم در انتگرال‌های سه‌گانه، تغییر متغیر استوانه‌ای است. برای تغییر متغیر استوانه‌ای $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، $z = z$ داریم

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & r\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = r$$

مثال ۴-۹-۱ مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int\int_T x^۲y^۲ \, dV$ روی ناحیه‌ی T، محصور به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه‌ی $z = a$.

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $z = z$. خم تلاقی مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه‌ی $z = a$ عبارت است از دایره‌ی $\sqrt{x^۲ + y^۲} = a$، یا به عبارت دیگر $x^۲ + y^۲ = a^۲$. به این ترتیب

$$T = \{(r,\theta,z) \ : \ ۰ \leq r \leq a \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ r \leq z \leq a\}$$

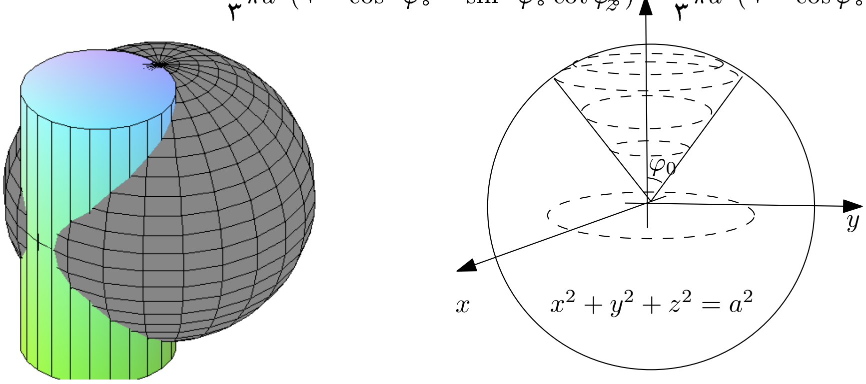
$$\begin{aligned} \int\int\int_T x^۲y^۲ dxdydz &= \int_۰^{۲\pi} (\int_۰^a (\int_r^a r^۵ \sin^۲\theta\cos^۲\theta \, dz) dr) d\theta \\ &= \int_۰^{۲\pi} \sin^۲\theta\cos^۲\theta \, d\theta \int_۰^a r^۵(a-r) \, dr \\ &= \frac{۱}{۱٦۸}\pi a^۷ \end{aligned}$$

مثال ۴–۹–۲ حجم ناحیه‌ی T، درون مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}\cot\varphi_0$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ را به کمک انتگرال سه‌گانه و با تغییر متغیر استوانه‌ای محاسبه کنید (شکل ۵–۱۶).

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $z = z$. در دستگاه مختصات استوانه‌ای معادله‌ی مخروط $z = r\cot\varphi_0$ و معادله‌ی کره $z = \sqrt{a^2-r^2}$ است. به این ترتیب

$$T = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le a\sin\varphi_0,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r\cot\varphi_0 \le z \le \sqrt{a^2-r^2}\}$$

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int\!\!\int_T dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{a\sin\varphi_0}\int_{r\cot\varphi_0}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a\sin\varphi_0}(\sqrt{a^2-r^2}-r\cot\varphi_0)r\, dr\Big)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sin\varphi_0}(\sqrt{a^2-r^2}-r\cot\varphi_0)r\, dr \\
&= 2\pi\Big(-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}-\frac{1}{3}r^3\cot\varphi_0\Big)\Big|_0^{a\sin\varphi_0} \\
&= \frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos^3\varphi_0-\sin^3\varphi_0\cot\varphi_0) = \frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\varphi_0)
\end{aligned}$$



شکل ۵–۱۷ حجم ناحیه‌ی T در مثال‌های ۴–۹–۲ و ۴–۹–۱.

مثال ۴–۹–۳ حجم ناحیه‌ی T، محصور به استوانه‌ی $x^2+y^2=ax$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ را به کمک انتگرال سه‌گانه محاسبه کنید (شکل ۵–۱۷).

قرار می‌دهیم $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $z = z$. در دستگاه مختصات استوانه‌ای معادله‌ی کره $z = \sqrt{a^2-r^2}$ است. بنا بر تقارن شکل، حجم مورد نظر ۴ برابر حجم ناحیه‌ی T_1 به شکل زیر است.

$$T_1 = \{(r,\theta,z)\ :\ 0 \le r \le a\cos\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le z \le \sqrt{a^2-r^2}\}$$

بنابر این

$$\begin{aligned}\int\int\int_T dxdydz &= ۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{a\cos\theta}\int_۰^{\sqrt{a^۲-r^۲}} r\ dzdrd\theta\\ &= ۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{a\cos\theta} r\sqrt{a^۲-r^۲}dr\ d\theta\\ &= -\frac{۴}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{(a^۲-r^۲)^۳}\Big|_۰^{a\cos\theta}d\theta\\ &= \frac{۴}{۳}a^۳\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\sin^۳\theta)d\theta = \frac{۴}{۳}a^۳(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲}{۳})\end{aligned}$$

۴–۱۰ تغییر متغیر کروی در انتگرال‌های سه‌گانه

یکی دیگر از تغییر متغیرهای مهم در انتگرال‌های سه‌گانه، تغییر متغیر کروی است. برای تغییر متغیر کروی $x=\rho\cos\theta\sin\varphi$، $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z=\rho\cos\varphi$ داریم

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & ۰ & \rho\sin\varphi\end{pmatrix}\right| = \rho^۲\sin\varphi$$

مثال ۴–۱۰–۱ مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int\int_T \frac{dV}{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}$ روی ناحیه‌ی T، محصور به کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$.

قرار می‌دهیم $x=\rho\cos\theta\sin\varphi$، $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z=\rho\cos\varphi$. پس:

$$T=\{(\rho,\theta,\varphi)\ :\ ۱\le\rho\le۲\ ,\ ۰\le\theta\le۲\pi\ ,\ ۰\le\varphi\le\pi\}$$

$$\begin{aligned}\int\int\int_T\frac{dV}{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}} &= \int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\pi}\int_۱^{۲}\frac{\sin\varphi}{\rho}\ d\rho\ d\theta\ d\varphi\\ &= \Big(\int_۰^{\pi}\sin\varphi\ d\varphi\Big)\ \Big(\int_۰^{۲\pi}d\theta\Big)\ \Big(\int_۱^{۲}\frac{d\rho}{\rho}\Big) = ۴\pi\ln ۲\end{aligned}$$

مثال ۴–۱۰–۲ حجم ناحیه‌ی T، محصور به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}\cot\varphi_۰$ و کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ را به کمک انتگرال سه‌گانه (با تغییر متغیر کروی) محاسبه کنید و نتیجه را با مثال ۴–۹–۲ مقایسه کنید.

قرار می‌دهیم $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$، $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z = \rho\cos\varphi$. در دستگاه مختصات استوانه‌ای معادله‌ی مخروط مورد نظر $\varphi = \varphi_{\circ}$ و معادله‌ی کره‌ی مورد نظر $\rho = a$ است. به این ترتیب:

$$T = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ \circ \le \rho \le a \ , \ \circ \le \theta \le ۲\pi \ , \ \circ \le \varphi \le \varphi_{\circ}\}$$

$$\begin{aligned} \int\!\!\int\!\!\int_T dV &= \int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\varphi_{\circ}}\int_{\circ}^{a} \rho^{۲}\sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \Big(\int_{\circ}^{\varphi_{\circ}} \sin\varphi \, d\varphi\Big)\Big(\int_{\circ}^{۲\pi} d\theta\Big)\Big(\int_{\circ}^{a} \rho^{۲} \, d\rho\Big) = \frac{۲}{۳}\pi a^{۳}(۱-\cos\varphi_{\circ}) \end{aligned}$$

بر اساس هر دو روش به نتیجه‌ی یکسان دست یافتیم ولی تغییر متغیر کروی محاسبات را کمی کوتاهتر کرده است.

مثال ۴–۱۰–۳ به کمک انتگرال سه‌گانه حجم کره‌ی به شعاع k را به دست آورید.

می‌توان مرکز کره را مبدأ در نظر گرفت. قرار می‌دهیم $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$، $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z = \rho\cos\varphi$. به این ترتیب ناحیه‌ی T، مشخص‌کننده‌ی درون کره، در دستگاه مختصات کروی عبارت است از:

$$T = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ \circ \le \rho \le k \ , \ \circ \le \theta \le ۲\pi \ , \ \circ \le \varphi \le \pi\}$$

$$\begin{aligned} \int\!\!\int\!\!\int_T dV &= \int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{k} \rho^{۲}\sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \Big(\int_{\circ}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi\Big)\Big(\int_{\circ}^{۲\pi} d\theta\Big)\Big(\int_{\circ}^{k} \rho^{۲} \, d\rho\Big) = \frac{۴}{۳}\pi k^{۳} \end{aligned}$$

مثال ۴–۱۰–۴ $\int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{۴-x^{۲}}}^{\sqrt{۴-x^{۲}}}\int_{\circ}^{\sqrt{۴-x^{۲}-y^{۲}}} (x^{۲}+y^{۲})dzdydx$ را محاسبه کنید.

قرار می‌دهیم $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$، $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z = \rho\cos\varphi$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \circ \le z \le \sqrt{۴ - x^{۲} - y^{۲}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \circ \le x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \le ۴ \\ &\Longleftrightarrow \quad \circ \le \rho^{۲} \le ۴ \Longleftrightarrow \circ \le \rho \le ۲ \end{aligned}$$

و

$$x^{۲}+y^{۲} = \rho^{۲} - z^{۲} = \rho^{۲} - \rho^{۲}\cos^{۲}\varphi = \rho^{۲}\sin^{۲}\varphi$$

به این ترتیب:

$$T = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ ۰ \leq \rho \leq ۲ \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ ۰ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲}\}$$

$$\begin{aligned}\int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{۴-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}}\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}(x^۲+y^۲)dzdydx &= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۲}\rho^۴\sin^۳\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ &= \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۳\varphi\, d\varphi\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\int_{۰}^{۲}\rho^۴\, d\rho \\ &= \frac{۱۲۸}{۱۵}\,\pi\end{aligned}$$

مثال ۴−۱۰−۵ مقدار انتگرال $\int\int\int_T e^{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}\, dV$ را محاسبه کنید که در آن $T = \{(x,y,z) \ : \ x^۲+y^۲+z^۲ \leq ۱\}$.

قرار می‌دهیم $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$، $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ و $z = \rho\cos\varphi$. در نتیجه

$$T = \{(\rho,\theta,\varphi) \ : \ ۰ \leq \rho \leq ۱ \ , \ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \ , \ ۰ \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$\begin{aligned}\int\int\int_T e^{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}\, dV &= \int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱} e^{\rho^۳}\rho^۲\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ &= \left(\int_{۰}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\right)\left(\int_{۰}^{۱}e^{\rho^۳}\rho^۲\, d\rho\right) \\ &= \frac{۴}{۳}\,\pi(e-۱)\end{aligned}$$

در پایان این فصل به کاربردهایی از انتگرال چندگانه در فیزیک کلاسیک می‌پردازیم.

یکی از دستاوردهای مهم گالیله و نیوتن که توسط ریاضیدان‌هایی مانند لاگرانژ، لاپلاس و $\cdots$ به شکل دقیق‌تری مطرح شد، استفاده از فضای دکارتی برای مدل کردن رخدادهای جهان فیزیکی بود. بنابر قانون بنیانی نیوتن در فیزیک کلاسیک، اگر شئ به جرم m که مسیر آن توسط تابع برداری $\mathbf{r}$ و پارامتر زمان t توصیف می‌شود تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ قرار گیرد آنگاه $\mathbf{F} = m\frac{d^۲\mathbf{r}}{dt^۲}$. در عمل یک شئ فیزیکی را نمی‌توان یک نقطه در نظر گرفت. بنابر این باید با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، این شئ را با یک نقطه جایگزین کنیم که همان جرم را دارد. به عبارت دیگر برای استفاده‌ی درست از فرمول نیوتن مفهوم **مرکز جرم** مطرح می‌شود. برای درک بهتر این ایده بهتر است با یک شئ فیزیکی شامل n جزء شروع کنیم. هر یک از این اجزا دارای جرم m_i است، تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}_i$ قرار دارد و مسیر آن توسط تابع برداری $\mathbf{r}_i$ با پارامتر زمان t توصیف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=۱}^{n}F_i, \qquad M = \sum_{i=۱}^{n}m_i, \qquad \bar{\mathbf{r}} = \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_i\mathbf{r}_i$$

به این ترتیب برای این مجموعه داریم:

$$\mathbf{F}=\sum_{i=۱}^{n}\mathbf{F}_i=\sum_{i=۱}^{n}m_i\frac{d^۲\mathbf{r}_i}{dt^۲}=\frac{d^۲}{dt^۲}\sum_{i=۱}^{n}m_i\mathbf{r}_i=M\ \ \frac{d^۲}{dt^۲}\Big(\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_i\mathbf{r}_i\Big)=M\frac{d^۲\bar{\mathbf{r}}}{dt^۲}$$

در نتیجه یک تعریف منطقی برای مرکز جرم این مجموعه، نقطه‌ای است که بردار مکان آن توسط تابع برداری $\bar{\mathbf{r}}$ مشخص می‌شود. اگر داشته باشیم $\mathbf{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ آنگاه

$$\bar{\mathbf{r}}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\Big(\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_ix_i,\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_iy_i,\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_iz_i\Big)$$

در فیزیک کلاسیک، مقادیر $\sum_{i=۱}^{n}m_ix_i$، $\sum_{i=۱}^{n}m_iy_i$ و $\sum_{i=۱}^{n}m_iz_i$ را **گشتاورهای اول** این مجموعه از نقاط نسبت به صفحات yoz، xoz و xoy می‌نامند و با نمادهای M_{yz}، M_{xz} و M_{xy} نمایش می‌دهند.

اکنون می‌توانیم به کمک ایده‌ی بنیانی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی تقسیم یک ناحیه به قطعات بی‌نهایت کوچک، مختصات مرکز جرم یک جسم فیزیکی را محاسبه کنیم. فرض کنیم چگالی نقاط یک جسم T در دستگاه مختصات دکارتی بر حسب مختصات آن نقطه توسط تابع حقیقی سه متغیره‌ی $\rho=\rho(x,y,z)$ مشخص شده باشد. از این پس ناحیه‌ی شامل این جسم را هم با T نمایش می‌دهیم. این جسم را می‌توان محدود به یک مکعب مستطیل $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ در نظر گرفت. به کمک افرازهای منظم $P_۱=\{a=x_۰,x_۱,\cdots,x_n=b\}$ ، $P_۲=\{c=y_۰,y_۱,\cdots,y_m=d\}$ و $P_۳=\{e=z_۰,z_۱,\cdots,z_p=f\}$ ناحیه‌ی T را به شبکه‌ای از T_{ijk} قطعه افراز می‌کنیم. بنابر این می‌توانیم T را مجموعه‌ای شامل $m\times n\times p$ جزء، هر کدام با حجم ΔV_{ijk} در نظر بگیریم. با توجه به تعریف جرم حجمی، جرم یک جزء برابر $\Delta m_{ijk}=\rho(x_i,y_j,z_k)\Delta V_{ijk}$ خواهد بود. در نتیجه تقریبی از جرم کل این مجموعه عبارت است از مجموع ریمان

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\Delta m_{ijk}=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}\rho(x_i,y_j,z_k)\Delta V_{ijk}$$

بنابر این اگر اعداد m,n,k به بی‌نهایت میل کنند آنگاه برای جرم کل این جسم انتگرال سه‌گانه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$M=\int\int\int_T\rho(x,y,z)dV$$

به همین ترتیب گشتاور مجموعه‌ی T_{ijk} ها نسبت به صفحه‌ی xoy عبارت است از:

$$M_{xy}=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}z_i\Delta m_{ijk}=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{p}z_i\rho(x_i,y_j,z_k)\Delta V_{ijk}$$

پس اگر اعداد m,n,k به بی‌نهایت میل کنند، برای گشتاور T نسبت به صفحه‌ی xoy انتگرال سه‌گانه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$M_{xy}=\int\int\int_T z\rho(x,y,z)dV$$

به شکل مشابه داریم:

$$M_{xz}=\int\int\int_T y\rho(x,y,z)dV \quad , \quad M_{yz}=\int\int\int_T x\rho(x,y,z)dV$$

مثال ۴-۱۰-۶ چگالی نقطه‌ی دلخواه از یک نیم‌کره‌ی توپر به شعاع a متناسب با فاصله‌ی آن تا مرکز کره است، یعنی در دستگاه کروی $\rho(x,y,z)=k\rho$.

الف) جرم نیم‌کره را به دست آورید.

ب) گشتاورهای مرتبه‌ی اول و مرکز جرم نیم کره را به دست آورید.

الف) می‌توانیم فرض کنیم که مرکز نیم‌کره‌ی T، مبدأ مختصات و تصویر آن روی صفحه‌ی xoy قرصی به شعاع R است. اگر جرم نیم‌کره را با M نمایش دهیم آنگاه:

$$\begin{aligned} M &= \int\int\int_T \rho(x,y,z)dV \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a (k\rho)(\rho^2\sin\varphi)d\rho d\theta d\varphi \\ &= k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a \sin\varphi d\theta d\varphi \\ &= k\frac{a^4}{4}\Big(\int_0^{2\pi}d\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\Big)=\frac{1}{2}k\pi a^4 \end{aligned}$$

با توجه به تقارن شکل، اگر $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ مختصات مرکز جرم نیم‌کره باشد آنگاه $\bar{x}=\bar{y}=0$. برای محاسبه‌ی $\bar{z}$ از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. نیم‌کره‌ی T عبارت است از:

$$T=\{(r,\theta,z)\ :\ 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ 0\le r\le a\ ,\ r^2\le z\le\sqrt{k^2-r^2}\}$$

با توجه به این که $\rho(x,y,z)=k\rho=k\sqrt{r^2+z^2}$، داریم:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int\int\int_T z\rho(x,y,z)dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z(k\sqrt{r^2+z^2})rdzdrd\theta \\ &= \frac{1}{5}k\pi a^5 \end{aligned}$$

پس $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{2}{5}a$، یعنی نقطه‌ی با مختصات $(0,0,\frac{2}{5}a)$ مرکز جرم این نیم‌کره است.

تمرین‌های فصل چهارم

۱) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^۱\int_۱^۲ \frac{y}{x^۴}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy + \int_۱^۴\int_{\sqrt{y}}^۲ \frac{y}{x^۴}\sin(\frac{\pi x}{۲})dxdy$.

ب) $\int_۰^۲\int_۰^{۴-x^۲}\frac{xe^{۲y}}{۴-y}dxdy$.

ج) $\int\int_A \sqrt{x^۲+y^۲}\; dA$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲; ۱\le x^۲+y^۲\le ۲\}$.

د) $\int_۰^۱\int_۰^x \frac{dydx}{(۱+x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \int_۱^{\sqrt{۲}}\int_۰^{\sqrt{۲-x^۲}}\frac{dydx}{(۱+x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$

ه) $\int\int_A (x-y)\sin(x^۲-y^۲)\; dA$، A ناحیه‌ی بین خطوط $x+y=۲$، $y-x=۱$، $y-x=-۱$ و $x+y=۰$ است.

و) $\int\int_A e^{\frac{y}{x+y}}\; dA$، A ناحیه‌ی بین خطوط $x+y=۱$، $y=۰$ و $x=۰$ است.

ز) $\int\int_G x\; dA$، G ناحیه‌ی بین خم‌های $xy=۱$، $xy=۳$، $x(۱-y)=۲$ و $x(۱-y)=۱$ است.

ح) $\int\int_D \frac{dA}{(xy)^{\frac{۲}{۳}}}$، D ناحیه‌ی محصور به خم $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=۱$ است.

۲) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین کنید.

الف) ناحیه‌ی داخل دایره‌ی $x^۲+y^۲=۴$ و سمت راست خط $x=۱$.

ب) ناحیه‌ی محصور بین خم‌های $xy=۱$، $xy=۲$ و خطوط $x=۱$ و $x=۲$.

ج) ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x=۴-۳y^۲$ و $x=y^۲$.

۳) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^۲ dx\int_۰^{\ln x} e^y dy$ ب) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} dx\int_{\sin x}^۱ y^۳ dy$

ج) $\int_۰^۲\int_۰^{۴-x^۲}\frac{xe^{۲y}}{۴-y}dydx$ د) $\int_۰^۸\int_{x^{\frac{۱}{۳}}}^۲ \frac{dydx}{y^۴+۱}$

۴) فرض کنید تابع f پیوسته است. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_۰^۳ dx\int_۰^x f(x,y)dy + \int_۳^۶ dx\int_۰^{۶-x} f(x,y)dy$$

۵) انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_R xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۱$ محاسبه کنید.

٦) مجموعه‌ی D را **همبند** می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی P و Q در D، یک خم پیوسته با معادلات پارامتری $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ به ازای $۰ \leq t \leq ۱$ وجود داشته باشد که $P = (x(۰), y(۰))$، $Q = (x(۱), y(۱))$ و برای هر $t \in [۰, ۱]$ نقطه‌ی $(x(t), y(t))$ در D قرار گیرد. به عبارت دیگر هر دو نقطه‌ی دلخواه در D با یک خم پیوسته در D به هم قابل وصل هستند.

نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a, b) در D وجود دارد به قسمی که:

$$\int\int_R f(x, y)\ dA = Af(a, b)$$

این گزاره قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه نامیده می‌شود.

۷) انتگرال $\int\int_D \frac{y}{x^۲ + y^۲}\ dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به سهمی $y = x^۲$ و خط $y = x$ به دست آورید.

۸) الف) نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^۲(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^۲(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\int\int_A (f(x)g(y) - f(y)g(x))^۲\ dA$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)

ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a, b]$ باشد، نشان دهید

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b - a)^۲$$

۹) مقدار انتگرال ناسره‌ی $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx$ را به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید تساوی $\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx \int_۰^\infty e^{-y^۲}dy = \int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy$ برای انتگرال‌های ناسره برقرار است. سپس سمت راست را به کمک مختصات قطبی محاسبه کنید.)

۱۰) انتگرال $\int_۰^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ استفاده کنید.)

۱۱) انتگرال‌های زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \frac{x^{۲}\sin xy}{y}\, dA$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^{۲} = \pi y$، $x^{۲} = \frac{\pi y}{۲}$، $y^{۲} = x$ و $y^{۲} = \frac{x}{۲}$ است.

ب) $\int\int_D \cos\frac{x-y}{x+y}\, dA$ که در آن D محدود است به خطوط $y = ۰$، $y = x$ و $x + y = \frac{\pi}{۲}$.

ج) $\int\int\int_T yz\, dV$ که T محدود به صفحات $x+y+z = ۲$، $x+y+z = -۲$، $x-y+z = ۳$، $x-y+z = -۳$، $x+y-z = ۱$ و $x+y-z = -۱$ است.

۱۲) با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) سطح داخل کاردیوئید $r = a(۱ - \cos\theta)$ و خارج دایره‌ی $r = a$.

ب) سطح محصور بین دوایر $x^{۲} + y^{۲} = x$ و $x^{۲} + y^{۲} = ۲x$ و خطوط $y = ۰$ و $y = x$.

ج) سطح بین مارپیچ‌های $r = \theta$ و $r = ۲\theta$ به ازای $۰ \leq \theta \leq ۴\pi$.

۱۳) حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$، از زیر به مخروط $z^{۲} = (x^{۲} + y^{۲})\cot^{۲}\beta$ و از دو طرف به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = ۰$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت و $۰ < \alpha, \beta < \frac{\pi}{۲}$ هستند.)

۱۴) ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{۲} : \pi^{۲} \leq x^{۲} + y^{۲} \leq ۴\pi^{۲}\}$ و تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y) = \sin\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ مفروضند. مقدار $\int\int_D f(x,y)\, dA$ را به‌دست آورید.

۱۵) فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم $g(t) = \int\int\int_{D_t} f(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\, dV$, $D_t = \{(x,y,z) : x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \leq t^{۲}\}$.
مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dg}{dt}$.

۱۶) مساحت ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x^{۲} = y$, $x^{۲} = ۲y$, $x^{۳} = y^{۲}$, $x^{۳} = ۲y^{۲}$ را به دست آورید.

۱۷) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\int\int_T z\, dV$ که در آن T ناحیه‌ی بین صفحه‌ی z و نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱$ است.

ب) $\int_{\circ}^{1}\int_{\circ}^{\cos^{-1}y} e^{\sin x}dxdy$.

۱۸) مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$ و خطوط $y=x$ و $y=\circ$ را به دست آورید.

۱۹) حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌های $y^2=3x-4$ و $y^2=x$ و صفحات $z=9$ و $z=-9$ را به دست آورید.

۲۰) حجم ناحیه‌ای را به دست آورید که توسط سه رویه‌ی $z^2=2xy$، $x+y=2$ و $x+y=1$ مشخص می‌شود.

۲۱) با استفاده از تغییر متغییرهای $u=x^2-y^2$ و $v=2xy$، انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_D x^2y^2(x^2+y^2)\ dA$ را به دست آورید که D ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به هذلولی‌های $x^2-y^2=1$، $x^2-y^2=9$، $xy=1$ و $xy=2$ است.

۲۲) مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_{\circ}^{2}(\int_{y/2}^{1}\cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx)dy$.

۲۳) انتگرال دوگانه $\int\int_D |x-y|e^{x-y}\ dA$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x-y=\circ$، $x-y=-4$ ، $x+y=\circ$ و $x+y=4$ است.

۲۴) تابع $f(x,y)=\frac{y}{x^4}\sin\frac{\pi x}{2}$ مفروض است. انتگرال $\int_{\circ}^{1}\int_{1}^{2}f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی D از صفحه‌ی xy و انتگرال $\int_{1}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2}f(x,y)dxdy$ روی ناحیه‌ی E از صفحه‌ی xy تعریف شده‌اند.

الف) نواحی D و E را در صفحه‌ی xy مشخص کنید.

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_{D\cup E} f(x,y)dydx$.

۲۵) G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy=1$ و $xy=3$ و $x(1-y)=2$ و $x(1-y)=1$ است. مطلوب است انتگرال $\int\int_G x\ dA$.

۲۶) انتگرال $\int\int_D \cos(\frac{x-y}{x+y})\ dA$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x=\circ$ و $y=\circ$ و $x+y=2$ بیابید.

۲۷) با استفاده از انتگرال دوگانه در مختصات قطبی حجم ناحیه‌ی T را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) T محدود به سهمیگون $az = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = a$ است $(a > ۰)$.

ب) T ناحیه‌ی محصور به کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و سهمی‌گون $x^۲ + y^۲ = ۴(۱ - z)$ است.

ج) T درون مخروط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و خارج کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ است.

۲۸) با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی $\int\int_D \sqrt{\frac{۱ - x^۲ - y^۲}{۱ + x^۲ + y^۲}}\, dA$ را محاسبه کنید که در آن D قرص واحد $\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$ است.

۲۹) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\int_۰^۱ \int_۰^۱ \int_۰^۱ (xy + yz + zx) dx dy dz$

ب) $\int_۰^۱ dx \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} dy \int_۰^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} \frac{dz}{\sqrt{۱ - x^۲ - y^۲ - z^۲}}$

۳۰) مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T \subseteq \mathbb{R}^۳$، که حجم آن برابر V است توسط $\frac{۱}{V}\int\int\int_T f(x,y,z) dV$ تعریف می‌شود. مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید. آیا می‌توان روی T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۳۱) مطلوب است انتگرال $\int\int\int_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dV$ که در آن T ناحیه‌ای در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^۲ = \frac{۱}{۴}x^۲ + \frac{۱}{۹}y^۲$ و صفحات $x = ۰$ ، $y = ۰$ و $z = ۱$ است.

۳۲) انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را با تبدیل مختصات دکارتی به قطبی محاسبه کنید.

الف) $\int\int_D \sqrt{x^۲ + y^۲}\, dA$ ، $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۹\}$

ب) $\int\int_D \frac{\sin\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}\, dA$ ، $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : \frac{\pi^۲}{۱۶} \leq x^۲ + y^۲ \leq \frac{\pi^۲}{۹}\}$

ج) $\int\int_D \tan^{-۱}(\frac{y}{x})\, dA$ ، $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : ۱ \leq x^۲+y^۲ \leq ۴, \frac{x}{\sqrt{۳}} \leq y \leq \sqrt{۳}x\}$

۳۳) معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ را به معادله‌ای در مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

۳۴) انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

الف) $\int\int\int_T x^۲y^۲ \; dV$ که در آن T محدود است به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه‌ی $z = a$ ($a > ۰$).

ب) $\int\int\int_T (x^۳ + y^۳) \; dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = y$، سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = ۰$.

۳۵) با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولی‌گون $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ و کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳$ را پیدا کنید.

۳۶) معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = z^۲$ را در مختصات کروی بنویسید.

۳۷) مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر کروی پیدا کنید.

الف) $\int\int\int_T \frac{۱}{x^۲ + y^۲ + z^۲} \; dV$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ و مخروط $x^۲ + y^۲ = z^۲$.

ب) $\int\int\int_T \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + (z - ۲)^۲}} \; dV$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است.

ج) $\int\int\int_T \frac{۱}{\sqrt{((x^۲ + y^۲ + z^۲)^۳}} \; dV$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = e$ قرار دارد.

۳۸) با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی مشترک بین کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴z - ۳$ و مخروط $z^۲ = ۴(x^۲ + y^۲)$ را پیدا کنید.