Geometriae Dedicata **74:** 73–78, 1999.

Ceva-Transitivität

(*Ceva Transitivity*)

GÜNTER PICKERT
Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Universität, Arndtstr. 2, D-35392 Gießen, Germany

(Received: 28 October 1997)

Abstract. In Moufang planes, the theorem of Pappos is shown to be equivalent with a configuration theorem stating a sort of transitivity for the Cevian property (concurrence of transversals through the vertices of a triangle).

Mathematics Subject Classification (1991): 51A20.

Key words: Moufang–Ebenen, Satz von Pappos, Sechseckbedingung.

1. Einleitung

Als *Ceva-Transitivität* (CT) wird aus naheliegenden Gründen die folgende Aussage* der ebenen projektiven Geometrie bezeichnet:

Sind die Punkte $P_i (i = 1, 2, 3)$ nicht kollinear und ebenso die Punkte $Q_i (i = 1, 2, 3)$ mit $Q_i \in P_{i+1}P_{i+2} \backslash \{P_{i+1}, P_{i+2}\}$ (Indizes mod. 3) und kopunktalen Ceva–Geraden $P_iQ_i (i = 1, 2, 3)$, so gilt für Punkte $R_i \in Q_{i+1}Q_{i+2} \backslash \{Q_{i+1}, Q_{i+2}\} (i = 1, 2, 3)$

$$Q_iR_i \ \ (i = 1, 2, 3) \ \text{ kopunktal } \ \Rightarrow P_iR_i \ \ (i = 1, 2, 3) \ \text{ kopunktal.}$$

2. Bemerkungen

(1) CT läßt sich auch als Transitivität von Dreiecksperspektivitäten formulieren ($\Delta, \Delta', \Delta''$ bezeichnen im folgenden die Dreiecke der P_i bzw. Q_i, R_i):

Ist Δ' dem Δ einbeschrieben und Δ'' den Δ', so folgt aus der Perspektivität von Δ, Δ' und der von Δ', Δ'' diejenige von Δ, Δ''.

Diese Fassung ähnelt einem bekannten, in jeder desarguesschen Ebene gültigen Satz, bei dem zusätzlich Δ als dem Δ'' einbeschrieben vorausgesetzt wird, dafür aber die Perspektivität von Δ', Δ'' in der Behauptung auftritt (s. [1]; S. 266/7).**

* Ich verdanke diese einer Mitteilung von Prof. Gülicher (Münster), der verschiedene affine und metrische Sonderfälle dieser Aussage untersucht hat.

** Diesen Hinweis verdanke ich einer Mitteilung von Prof. Coxeter (Toronto).

(2) Wegen der Nichtkollinearität der Q_i hat man $R_i \neq Q_i$. Nach den Voraussetzungen über die P_i, Q_i geht $Q_{i+1}Q_{i+2}$ nicht durch P_i, so daß $R_i \neq P_i$ sein muß.

(3) Ist S der gemeinsame Punkt der P_iQ_i, so sind die Q_i die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $P_1P_2P_3S$. Eine Anti–Fano–Ebene (d.h. eine solche, bei der die Diagonalpunkte jedes vollständigen Vierecks kollinear sind) erfüllt also CT trivialerweise.

(4) Aus CT folgt die Verschärfung mit '$\Leftrightarrow$' statt '$\Rightarrow$': Mit S als dem gemeinsamen Punkt der $P_iR_i (i = 1, 2, 3)$, S' als dem Schnittpunkt von Q_1R_1, Q_2R_2 und R'_3 als dem von Q_3S', Q_1Q_2 sind nach CT die P_1R_1, P_2R_2, $P_3R'_3$ kopunktal, d.h. $P_3R'_3$ geht durch S und ist somit $= P_3R_3$; daraus folgt $R'_3 = R_3$, so daß alle Q_iR_i durch S' gehen.

Im folgenden wird CT nur für Moufang–Ebenen betrachtet, d.h. für projektive Ebenen in denen der kleine Satz von Desargues gilt. Eine Moufang–Ebene ist entweder eine Anti–Fano–Ebene, oder sie erfüllt das Fano–Axiom, d.h. die Nichtkollinearität der Diagonalpunkte vollständiger Vierecke (s. [2] und [3], S. 193). In Anbetracht der Bemerkung 3 wird deshalb das Fano–Axiom vorausgesetzt, d.h. es werden nur Moufang–Ebenen einer Charakteristik $\neq 2$ betrachtet. Man erhält

SATZ 1. *In einer Moufang–Ebene mit Charakteristik* $\neq 2$ *ist* CT *äquivalent mit dem Satz von Pappos.*

Zum Beweis werden zuerst Ausartungsfälle durch die zusätzliche Voraussetzung

$$R_1 \notin P_2P_3, \quad R_2 \notin P_3P_1 \tag{1}$$

ausgeschlossen. Man wählt ein affines Koordinatensystem mit P_1 als Nullpunkt, P_2, P_3 als den uneigentlichen Punkten der Koordinatenachsen und dem Schnittpunkt S der P_iQ_i als Einheitspunkt (s. Figur 1).

Der Koordinatenbereich ist ein Alternativkörper (s. z.B. [3], S. 188) mit Charakteristik $\neq 2$. Die Punkte P_1, S, Q_2, Q_3 haben die Koordinatenpaare $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, und Q_1 ist der uneigentliche Punkt der Geraden P_1S mit der Gleichung $y = x$. Aus der Gleichung $x + y = 1$ von Q_2Q_3 ergibt sich für den (wegen (1) eigentlichen) Punkt R_1 ein Koordinatenpaar $(a, 1 - a)$ mit $a \neq 0, 1$. R_2, R_3 sind eigentliche Punkte auf den Geraden Q_3Q_1 bzw. Q_2Q_1, deren Gleichungen $y = x - 1$ bzw. $y = x + 1$ lauten. Sie haben daher Koordinatenpaare $(b, b - 1)$ bzw. $(c, c + 1)$ mit $b \neq 1$, $c \neq 0$ sowie wegen (1) $b \neq 0$. Für die Q_iR_i erhält man dann die Gleichungen

$$y = x + 1 - 2a, \tag{2.1}$$

$$y = (b - 2)b^{-1}x + 1, \tag{2.2}$$

$$(c - 1)y = (c + 1)(x - 1); \tag{2.3}$$

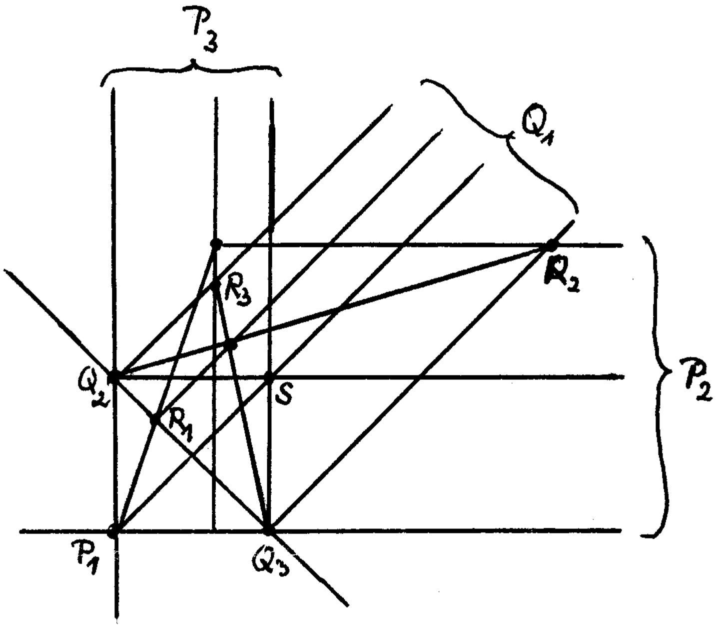

Figure 1.

im Fall $c \neq 1$ ist nach den in Alternativkörpern gültigen Rechenregeln (2.3) äquivalent mit $y = (c+1)(c-1)^{-1}(x-1)$, wobei man ebenso wie in (2.2) bei dem dreigliedrigen Produkt keine Klammern zu setzen braucht. Für das Koordinatenpaar (x, y) des Schnittpunktes von Q_1R_1, Q_2R_2 ergibt sich aus (2.1,2)

$$x = ba, \qquad y = ba - 2a + 1.$$

Einsetzung in (2.3) liefert daraus für die Kopunktalität der Q_iR_i die Bedingung

$$ba = c + a - ca. \tag{3}$$

a, b lassen sich unter der einzigen Bedingung

$$a, b \notin \{0, 1\} \tag{4}$$

beliebig wählen, und durch (3) wird dann

$$c = (ba - a)(1-a)^{-1} \quad (\neq 0) \tag{5}$$

bestimmt. Die Gleichungen

$$y = \left(a^{-1} - 1\right)x, \qquad y = b - 1, \qquad x = c,$$

für die P_iR_i ergeben als Bedingung für die Kopunktalität dieser drei Geraden

$$(a^{-1} - 1)c = b - 1, \tag{6}$$

also, nach Multiplikation von links mit $(1-a)^{-1}a$

$$c = (1-a)^{-1}(ab-a).$$

Wegen (5) besagt die Implikation in CT daher

$$(1-a)^{-1}(ab-a) = (ba-a)(1-a)^{-1},$$

was durch Multiplikation von rechts und links mit $1-a$ in $ab = ba$ übergeht. Da diese Gleichung auch bei Verletztsein von (4) gilt, hat sich damit die Kommutativität des koordinatisierenden Alternativkörpers als äquivalent mit CT (mit (1)) erwiesen. Diese Kommutativität besagt aber bekanntlich (s. z.B. [3], S. 188) den Satz von Pappos.

Bei Verletztsein der Einschränkung (1) gilt CT auch ohne Gültigkeit des Satzes von Pappos. Das ist (bei entsprechender Indexpermutation) enthalten in

SATZ 2. *Die Ausartung von* CT*, bei der $R_3 \in P_1P_2$ vorausgesetzt wird, gilt in jeder Moufang–Ebene.*

Beim Beweis kann wegen Bemerkung 3 das Fano–Axiom vorausgesetzt werden. Wird (1) vorausgesetzt, bleiben die Herleitungen im Beweis von Satz 1 gültig und zwar mit $c = -1$. (3) wird zu $ba = 2a - 1$. Multiplikation von rechts mit a^{-1} formt diese Gleichung um zu $b = 2 - a^{-1}$, was dasselbe besagt wie

$$b - 1 = \left(a^{-1} - 1\right)(-1),$$

also (6). Damit ist die Implikation in CT bewiesen. Der noch ausstehende Fall, bei dem (1) verletzt, also o.B.d.A. $R_2 \in P_3P_1$ ist, wird erledigt durch.

SATZ 3. *Die zweifache Ausartung von* CT*, bei der $R_2 \in P_3P_1$, $R_3 \in P_1P_2$ vorausgesetzt wird, folgt für jede projektive Ebene aus der Sechseckbedingung und hat umgekehrt die Sechseckbedingung zur Folge, wenn noch das Fano–Axiom vorausgesetzt wird.*

Die Herleitung der zweifachen CT-Ausartung aus der Sechseckbedingung ergibt sich folgendermaßen (s. Figur 2).

R_2 ist der Schnittpunkt von P_3P_1, Q_3Q_1 und R_3 der von P_1P_2, Q_1Q_2. Die Voraussetzung der Implikation in CT besagt, daß Q_1R_1 durch den Schnittpunkt von $Q_2R_2(= P_3P_1)$ und $Q_3R_3(= P_1P_2)$, also durch P_1 geht. Damit hat man $P_1R_1 = P_1Q_1 = P_1S$, und die Folgerung der Implikation besagt, daß diese Gerade durch den Schnittpunkt S' von P_2R_2, P_3R_3 geht. Das wird gerade durch die Sechseckbedingung (s. [3], S. 54, 156) gesichert. Sie besagt bekanntlich, daß in der additiven Loop jedes koordinatisierenden Ternärkörpers Links- und Rechtsinverses bei jedem Element übereinstimmen, und darüber hinaus, daß die Loop potenzassoziativ ist, also jedes Element in einer Untergruppe liegt (s. [3], S. 244). Insbesondere ist die Sechseckbedingung daher in jeder Moufangebene erfüllt.

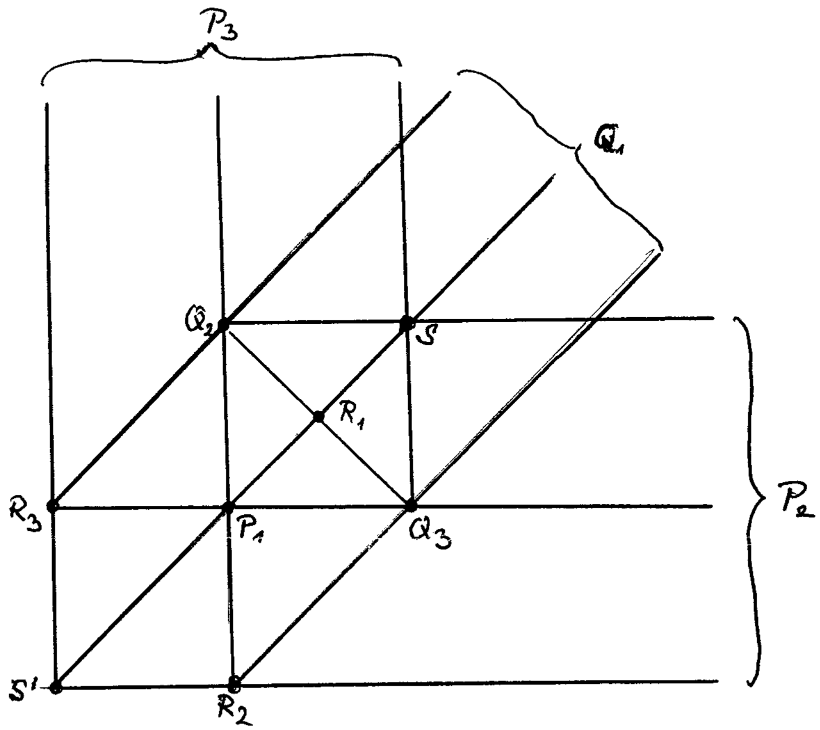

Figure 2.

Um umgekehrt aus der CT-Ausartung unter Voraussetzung des Fano–Axioms die Sechseckbedingung herzuleiten, muß man zu gegebenem Sechseck $S'R_2Q_3SQ_2R_3$ mit P_1 als Schnittpunkt von Q_2R_2, Q_3R_3 und

$$Q_1 \in Q_3R_2, \quad P_1S, \quad Q_2R_3, \qquad P_2 \in S'R_2, \quad Q_3R_3, \quad Q_2S,$$
$$P_3 \in Q_3S, \quad Q_2R_2, \quad R_3S'$$

zuerst sicherstellen, daß die Q_i nicht kollinear sind. Das ergibt sich aber gerade aus dem Fano–Axiom, angewandt auf das Viereck $P_1P_2P_3S$. Bestimmt man nun $R_1(\neq Q_2, Q_3)$ als Schnittpunkt von Q_2Q_3 mit P_1Q_1, so sind alle Voraussetzungen der CT-Ausartung erfüllt, und ihre Folgerung lautet $S' \in P_1S$, womit die Sechseckbedingung bewiesen ist.

Aus den Voraussetzungen der zweifachen CT-Ausartung (einschließlich der Kopunktalität der Q_iR_i) ergibt sich – wie bei der Herleitung der Sechseckbedingung – R_1 als Schnittpunkt von P_1S mit Q_2Q_3. Dieser liegt nicht auf P_2P_3, da sonst Q_2Q_3 durch Q_1 gehen würde. Bei dreifacher Ausartung, also mit $R_i \in P_{i+1}P_{i+2}$ $(i = 1, 2, 3)$ sind also die Voraussetzungen von CT nicht erfüllbar.

References

1. Coxeter, H. S. M.: The Pappus configuration and the self-inscribed octagon I. *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch., ser. A* **80**(4) (1977), S. 256–269.
2. Pickert, G.: Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalpunkten, *Math. Zeitschrift* **56** (1952), 131–133.
3. Pickert, G.: *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin, 1975.