

بسمه تعالی

آزمون جبرخطی کاربردی

دانشگاه صنعتی اصفهان، تیرماه ۱۴۰۱

بارم کل آزمون: ۱۶، مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه

۱. دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = 2 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \end{cases}$$

الف) فرم پلکانی سطری تحویل یافته را برای ماتریس افزوده این دستگاه محاسبه کنید.

ب) با توجه به قسمت قبل، کدام متغیرها آزاد و کدام یک پایه‌ای (وابسته) هستند؟

ب) مجموعه جواب‌های این دستگاه را به صورت برداری پارامتری توصیف کنید.

۲. الف) تجزیه LU را برای ماتریس زیر به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) کاربرد تجزیه LU را در حل دستگاه معادلات خطی با ذکر یک مثال ساده بیان کنید.

۳. الف) مفهوم بعد و پایه‌ی یک فضای برداری را تعریف کنید.

ب) رتبه‌ی یک ماتریس و فضاها‌ی سطری و ستونی و پوچ آن را تعریف کنید.

د) با محاسبه فرم پلکانی سطری ماتریس زیر، یک پایه برای فضای پوچ و فضای ستونی این ماتریس ارائه کنید. رتبه‌ی این ماتریس چند است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

۴. فضاها‌ی برداری V و W و تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$V = \{(x, y, z, t) : x+y = z+t\} \subset \mathbb{R}^4, \quad W = \{(x, y, z) : x+y = z\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$T(x, y, z, t) = (x, y, z + t).$$

- الف) یک پایه B_1 برای V و یک پایه B_2 برای W ارائه کنید.
 ب) ماتریس نمایش تبدیل خطی T را نسبت به پایه‌های B_1 و B_2 به دست آورید.
 ج) بعد فضای پوچ و فضای برد T را بیابید.
۵. الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی متناظر ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- ب) کدام یک از ماتریس‌های بالا قطری پذیر است؟
 ج) برای هر کدام از ماتریس‌های قطری‌پذیر در قسمت (الف)، یک نمایش به فرم PDP^{-1} ارائه کنید که D ماتریسی قطری است.
۶. الف) برای فضای برداری زیر یک پایه ارائه کنید.

$$V = \{(x, y, z, t) : x + 2y = z + t\} \subset \mathbb{R}^4.$$

- ب) با اعمال روش گرام-اشمیت روی پایه‌ی قسمت قبل، یک پایه‌ی متعامد و یکه برای فضای V بیابید.
 ج) برداری در V بیابید که کمترین فاصله‌ی اقلیدسی را از بردار $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ داشته باشد.
۷. الف) تجزیه QR را تعریف کنید.
 ب) تجزیه QR را برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ج) برای $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4)$ ، جواب کمترین مربعات را برای دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ محاسبه کنید.
 موفق باشید.