

## سئوالات زیر بسزفته

۱) اگر  $R$  یک حلقه نیکار و جابجایی،  $M, N \gg R$  -مدول ساده باشد،

نشان دهید  $M \otimes_R N \neq 0$

۲) فرض کنید  $R$  یک حلقه نیکار و جابجایی،  $M \gg R$  -مدول نامفر بطوریکه

$\text{Hom}_R(M, X) \neq 0$  برای  $X \neq 0$ ، نشان دهید

$\forall X \neq 0, M \otimes_R X \neq 0$

۳) فرض کنید  $F$  یک زیر میدان از میدان  $E$  باشد. نشان دهید

$F[X] \otimes_F E \simeq E[X]$  (به عنوان  $F$ -مدول)

۴) مثالی از  $R$ -مدول  $M, N, L$  ارائه دهید بطوریکه

$N \subseteq M_R$  و  $L \otimes_R M \rightarrow L \otimes_R N$  قرار نگیرد.

۵) فرض کنید  $R$  یک PID،  $Q$  میدان کسری  $R$  باشد،  $A$  یک

$R$ -مدول متناهی تولید شده نشان دهید برای عدد طبیعی  $n$

$A \otimes_R Q \simeq Q^{(n)}$  دارد.

۶) فرض کنید  $R$  یک حلقه نیکار و جابجایی،  $M \gg R$  -مدول دوری

بطوریکه  $M \otimes_R X \neq 0$  برای  $X \neq 0$ ، نشان دهید  $\text{ann}_R(M) \subseteq \text{rad}(R)$ .

⑦ فرض کنید  $R$  یک حلقه کددار و جابجایی،  $M_R \neq 0$  بطوریکه

$$\forall X_R \neq 0 \quad (M \otimes_R X \neq 0 \text{ or } \text{ann}_R(X) \neq 0)$$

نشان دهید  $R$  دامناست یا  $(\forall X_R \neq 0, M \otimes_R X \neq 0)$

⑧ فرض کنید  $I, J$  در  $R$ -مدول تقویر در حلقه کددار و جابجایی

$R$  باشد، نشان دهید  $I \otimes_R J$  نیز یک  $R$ -مدول تقویری است

⑨  $\{A_i\}_{i \in I}$  را به  $R$ -مدول  $B$  بچند  $R$ -مدول  $A_i$  بچند

درست است که  $\text{Hom}_R(\prod_{i \in I} A_i, B) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(A_i, B)$  در صورتی که  $B$  یک  $R$ -مدول تقویری است

⑩ اگر  $P$  یک  $R$ -مدول تقویر و متناهی تولید شده باشد

و  $N_1, N_2 \subseteq P$  نشان دهید

$$\text{Hom}_R(P, N_1 + N_2) = \text{Hom}_R(P, N_1) + \text{Hom}_R(P, N_2)$$