

بسمه تعالی

آزمون جبر پیشرفته

دانشگاه صنعتی اصفهان، دی ماه ۱۴۰۱

۱. مفاهیم زیر را تعریف کنید:
عدد صحیح جبری، نرم یک عنصر در یک میدان عددی، ایده‌آل اول، عنصر اول (یک حلقه)، دامنه تجزیه یکتا، گروه رده‌ای (برای یک میدان عددی)، عدد رده‌ای
۲. فرض کنید d یک عدد صحیح غیرمربع کامل باشد و $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. حلقه اعداد صحیح جبری در K را به دست آورید.
۳. زیرمیدان $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$ از میدان اعداد مختلط را در نظر بگیرید:
(آ) درجه توسیع K/\mathbb{Q} را به دست آورید.
(ب) همه نشاندهای K در \mathbb{C} را توصیف کنید.
(ج) چندجمله‌ای مینیمال $1 - \sqrt{2} + i$ را روی دو میدان $\mathbb{Q}[i]$ و \mathbb{Q} به دست آورید.
(د) حلقه \mathbb{Z}_K را توصیف کنید و D_K (مبین K) را محاسبه کنید.
۴. (آ) نشان دهید هر ایده‌آل ماکسیمال در یک حلقه جابجایی، ایده‌آل اول است.
(ب) فرض کنید K میدانی عددی است. نشان دهید هر ایده‌آل اول ناصفر در \mathbb{Z}_K ، ماکسیمال است.
۵. فرض کنید K یک میدان عددی دلخواه است.
(آ) نشان دهید برای هر مجموعه از ایده‌آل‌های اول متمایز $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ در \mathbb{Z}_K و اعداد صحیح نامنفی m_1, \dots, m_n ، عنصر α در \mathbb{Z}_K وجود دارد که توان هر یک از \mathfrak{p}_i ‌ها در تجزیه $\langle \alpha \rangle$ برابر m_i است.
(ب) (امتیازی) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید هر ایده‌آل \mathbb{Z}_K با حداکثر دو عضو تولید می‌شود.
۶. فرض کنید $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
(آ) نشان دهید عدد 3 یک عنصر تحویل‌ناپذیر و غیراول در R است.
(ب) تجزیه ایده‌آل $\langle 3 \rangle$ را به ایده‌آل‌های اول در R بیابید.

- (ج) (امتیازی) آیا می‌توانید عدد رده‌ای میدان $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ را به دست آورید؟
- (د) (امتیازی) محاسبه قسمت قبل چه رابطه‌ای با توصیف مجموعه‌ی همه اعداد طبیعی قابل نمایش به صورت $x^2 + 5y^2$ دارد؟ ($x, y \in \mathbb{Z}$)

موفق باشید.