



باسمه تعالی

امتحان میان ترم دوم مبانی ترکیبیات

تاریخ: ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۱

مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

۱. فرض کنید a_n تعداد رشته‌های به طول n با ارقام ۱، ۲، ۰ باشد که بعد از یک رقم ۲ هیچ رقم ۱ ظاهر نشود. مثلاً ۰۱۲۰۲ و ۰۱۲۰۰ مجاز و ۰۱۲۰۱ و ۱۱۲۰۱ غیر مجاز هستند. یک رابطه بازگشتی برای a_n به دست آورید.

(۵ نمره)

۲. با استفاده از تابع مولد، رابطه بازگشتی زیر را حل کرده و دنباله b_n را به دست آورید.

(۱۰ نمره)

$$b_n = 6b_{n-1} - 9b_{n-2} + 3^{n-1}, \quad n \geq 2,$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 6.$$

۳. فرض کنید a_n تعداد راه‌های پرداخت هزینه n دلاری پست یک نامه با استفاده از تمبرهای ۱، ۵ و ۱۰ دلاری است، به طوری که حداقل یک تمبر ۱ دلاری و حداکثر ۴ تمبر ۵ دلاری استفاده شود (ترتیب چیدن تمبرها مهم نیست). تابع مولد دنباله a_n را به دست آورید. (نیازی به محاسبه ضابطه a_n نیست).

(۶ نمره)

۴. با استفاده از دنباله تفاضلی، سری $\sum_{n=0}^p n^4$ را محاسبه کنید. (کافی است این سری را به صورت مجموع چند جمله از ضرائب دوجمله‌ای بنویسید و نیازی به محاسبه فرمول نهایی نیست). شش جمله اول دنباله n^4 برابر ۰، ۱، ۱۶، ۸۱، ۲۵۶، ۶۲۵ است.

(۶ نمره)

۵. مورچه‌ای (به نام فردی) در یک مثلث با رئوس $(0,0)$ ، (n,n) و $(n,0)$ محصور شده است. فردی باید از خانه $(0,0)$ شروع کرده و با n گام مورچه‌ای به خانه (n,n) رسیده و از این مثلث فرار کند. هر گام مورچه‌ای، حرکت یک واحد به راست یا یک واحد به بالا است. تعداد راه‌هایی که فردی می‌تواند خود را به خانه (n,n) برساند، را به دست آورید. (مغز فردی، مغز یک مورچه است، پس از هیچ قضیه‌ای استفاده نکنید!)

(۸ نمره)

۶. عدد استرلینگ نوع دوم $S(n, k)$ را تعریف کنید و با یک استدلال شمارشی تساوی زیر را نشان دهید.

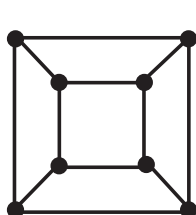
(۶ نمره)

$$S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i, k-1).$$

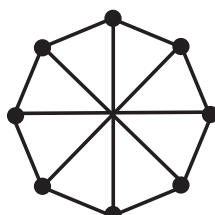
۷. تعداد راه‌های قرار دادن ۶ رخ یکسان در یک صفحه 6×6 را به دست آورید، به طوری که رخ‌ها همدیگر را نزنند و اگر یک رخ در سطر i و ستون j قرار گیرد، آنگاه $|i - j| \geq 2$.

(۸ نمره)

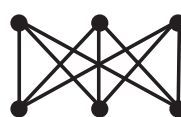
۸. با استدلال بیان کنید که آیا گراف‌های G_1 ، G_2 یک‌ریخت‌اند؟ همین سوال را برای G_3 ، G_4 جواب دهید. کدام یک از این گراف‌ها دوبخشی‌اند؟



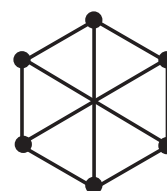
G_1



G_2



G_3



G_4

