



باسمه تعالی

امتحان میان ترم مبانی ترکیبیات

تاریخ: ۱۱ اسفند ۱۳۹۰
مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

۱. با استدلال شمارشی (شمارش دوگانه) تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

(۱۰ نمره)

الف) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$

ب) $\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$

۲. یک گله شیر آفریقایی در هر روز حداقل یک آهو شکار می‌کنند. آن‌ها در مدت ۱۱ هفته، هر هفته حداکثر ۱۲ آهو شکار کرده‌اند. ثابت کنید چند روز متوالی وجود دارد که در این چند روز، شیرها دقیقاً ترتیب ۲۱ آهو را داده‌اند.

(۱۰ نمره)

۳. رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ با شرایط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 3$ را حل کرده و جمله عمومی a_n را به دست آورید. به کمک آن ثابت کنید

(۱۰ نمره)

$$a_n = 1 + 2\binom{n+1}{2} + 2^2\binom{n+1}{4} + 2^3\binom{n+1}{6} + \dots$$

۴. الف) ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست برابر $\binom{n-k+1}{k}$ است.

(۶ نمره)

ب) فرض کنید a_n تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست. یک رابطه بازگشتی با شرایط اولیه برای a_n بیابید. به کمک آن ثابت کنید $a_n = f_{n+1}$ که f_n دنباله فیبوناچی است.

(۵ نمره)

ج) به کمک الف و ب ثابت کنید برای هر n ، $f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$. این تساوی را برای $0 \leq n \leq 5$ در مثلث خیام-پاسکال نشان دهید.

(۴ نمره)

۵. الف) فرض کنید n, k دو عدد صحیح مثبت باشند که $k \leq n$. از عدد صفر شروع می‌کنیم و هر بار به عدد قبلی یک واحد اضافه کرده یا از آن یک واحد کم می‌کنیم. این کار را $2n$ بار تکرار می‌کنیم. تعداد حالاتی را به دست آورید که در نهایت عدد $2k$ حاصل شود.

(۴ نمره)

ب) می‌خواهیم ۵ پسر و ۷ دختر را به همراه ۱ پدر و ۱ مادر دور یک میزگرد بنشانیم به طوری که هیچ دو دختری کنار هم ننشینند و هیچ دو پسری نیز کنار هم ننشینند. به چند طریق این کار ممکن است؟ اگر دخترها بتوانند کنار هم بنشینند ولی هیچ دو پسری کنار هم ننشینند، این کار به چند طریق ممکن است؟

(۶ نمره)

ج) تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 x_2 x_3 = 4000$ را محاسبه کنید.

(۵ نمره)