



باسمه تعالی

آزمون پایان ترم مبانی ترکیبیات

تاریخ: ۲۱ خرداد ۱۳۹۱
مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

۱. با استفاده از الگوریتم Gale-Shapley و با ذکر جزئیات، یک ازدواج پایدار پسر-بهینه و یک ازدواج پایدار دختر-بهینه برای ماتریس اولویت‌بندی زیر پیدا کنید (دخترها x و پسرها y هستند).

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	۱, ۳	۲, ۳	۳, ۲	۴, ۳
x_2	۱, ۴	۴, ۱	۳, ۳	۲, ۲
x_3	۲, ۲	۱, ۴	۳, ۴	۴, ۱
x_4	۴, ۱	۲, ۲	۳, ۱	۱, ۴

ثابت کنید با این ماتریس اولویت‌بندی، تنها یک ازدواج پایدار وجود دارد. (۱۰ نمره)

۲. الف) با ذکر دلیل، بیان کنید برای پارامترهای (v, k, λ) ، کدام یک از طرح‌های بلوکی زیر وجود دارد.
(یک) $(18, 4, 3)$ (دو) $(21, 6, 1)$ (سه) $(9, 3, 1)$ (چهار) $(9, 6, 5)$
ب) ثابت کنید شرط لازم برای وجود یک طرح بلوکی با پارامترهای $(v, k = 3, \lambda = 6k + 1)$ این است که باقیمانده تقسیم v بر ۶ برابر ۱ یا ۳ باشد. (۱۳ نمره)

۳. فرض کنید α, β دو عدد صحیح ثابت در $\mathbb{Z}_n$ باشند و $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ را دو ماتریس $n \times n$ با درایه‌های $a_{ij} = \alpha i + j$ و $b_{ij} = \beta i + j$ در نظر بگیرید (حساب در $\mathbb{Z}_n$ است). شرط لازم و کافی برای این‌که A, B مربع لاتین باشند را به دست آورید. شرط لازم و کافی برای این‌که A, B دو مربع لاتین متعامد باشند را به دست آورید. (۱۰ نمره)

۴. الف) یک شرط لازم و یک شرط کافی برای هامیلتونی بودن یک گراف را بیان کنید.
ب) ثابت کنید تعداد درخت‌های متمایز روی n راس برابر n^{n-2} است. (۱۰ نمره)

۵. الف) یک مربع لاتین از مرتبه n را خودتوان گوئیم، هرگاه درایه‌های روی قطر اصلی به ترتیب اعداد ۱ تا n باشند. برای هر n فرد، یک مربع لاتین خودتوان متقارن از مرتبه n بسازید. سپس بیان کنید که چگونه می‌توان به کمک این مربع لاتین جدول مسابقات یک لیگ با فرد تیم را طراحی کرد.
ب) اگر k مربع لاتین خودتوان دو به دو متعامد از مرتبه n داشته باشیم، ثابت کنید $k \leq n - 2$. (۱۰ نمره)

۶. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی نامنفی باشد که جمع درایه‌های هر سطر برابر یک و جمع درایه‌های هر ستون برابر یک است. ثابت کنید می‌توان n درایه غیرصفر از ماتریس را انتخاب کرد که هیچ‌کدام هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند. (راهنمایی: از SDR کمک بگیرید). (۷ نمره)