

۱- برای ماتریس زیر:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) مقادیر ویژه را بیابید و ماتریس S (بردارهای ویژه) را تشکیل دهید. دترمینان را نیز محاسبه کنید.

ب) e^A را محاسبه کنید.

ج) توان های مختلف A را محاسبه نمایید.

د) در مورد علامت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ چه می توان گفت؟

۲- نشان دهید ترانهاده و معکوس یک ماتریس اورتوگونال و حاصلضرب دو ماتریس اورتوگونال نیز اورتوگونال هستند.

۳- ماتریس هایی که در فرم SVD ماتریس قطری متناظر آن ها ماتریس همانی است چه خصوصیتی دارند؟

۴- در صورتی که مقادیر ویژه ماتریس A 4×4 برابر با $1, 2, 3, 4$ باشد و بردارهای ویژه نیز ستون های ماتریس S باشند

الف) رابطه ای برای ماتریس $(A+3I)^{-1}$ بر حسب S بنویسید.

ب) معین بودن دو ماتریس فوق را بررسی کنید.

۵- نشان دهید اگر ماتریسی با ماتریس های اورتوگونال قطری پذیر باشد متقارن است.

۶- ثابت کنید هر توانی از دو ماتریس مشابه، مشابه اند.

۷- اگر ستون های ماتریس A بردارهای اورتوگونال (عمود بر یکدیگر) باشند و به ترتیب دارای اندازه های l_1 تا l_n باشند فرم SVD را برای A بنویسید.

۸- فرم SVD را برای ماتریس های متقارن حقیقی بررسی کنید. (با محاسبه ماتریس های (U, V, Σ))

۹- نشان دهید اگر دو ماتریس متقارن و مثبت معین باشند مقادیر ویژه حاصلضرب آن ها نیز مثبت است.

۱۰- اگر یک تبدیل خطی تمامی بردارهای فضای سه بعدی را به موازات محور Z تصویر کند و در این تبدیل اندازه بردارهای یکانی e_i دو برابر شود:

الف) رابطه صریحی برای این تبدیل بر حسب مولفه های هر بردار در فضای سه بعدی بنویسید.

ب) در مورد فضای برد و فضای پوچ این تبدیل چه می توان گفت؟

ج) ماتریس معادل این تبدیل را بر اساس پایه های یکانی فضای سه بعدی بنویسید. ماتریس تبدیل را بر اساس بردارهای زیر نیز بدست آورید:

$$\mathbf{a} = [1 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{b} = [1 \ -1 \ 0], \quad \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 1]$$

نشان دهید با استفاده از هر دو ماتریس حاصل تبدیل بردار $[1 \ 1 \ 1]$ یکسان است.

د) بیان کنید آیا می توان برای این تبدیل دترمینان، تریس و مقادیر ویژه در نظر گرفت. و در صورت امکان این مقادیر را محاسبه کنید.

ه) آیا نتیجه این تبدیل با دو برابر ماتریس تصویر روی محور Z یکسان است؟

و) در مورد بردارهای ویژه این تبدیل بحث کنید و با بردارهای ویژه ماتریس تبدیل مقایسه کنید.

ز) یک به یک و پوششی بودن تبدیل را بررسی کنید.

۱۱- بررسی کنید ماتریس های زیر نرمال هستند یا خیر و فرم جردن هر یک را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۲- نشان دهید اگر ماتریس B معکوس پذیر باشد AB و BA مشابه هستند.

۱۳- نشان دهید مقادیر ویژه AB و BA یکسان هستند.

۱۴- یک ماتریس معکوس راست برای ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$