تهیه و تنظیم: سجاد ادریس آبادی

مبحث دو جلسه‌ی آخر

ص ۱

رگرسیون استوار "Robust Estimation"

وقتی توزیع ε_i‌ها دُم کلفت یا چوله باشد، از رگرسیون استوار بهره می‌بریم،

که نسبت به عدم برقراری فرض نرمال حساس نیست

پیش‌تر سری فرضیات داشتیم

(i) $E(\varepsilon_i) = 0$

$$E(Y_i \mid \underset{\sim}{x}_i) = \underset{\sim}{x}_i' \underset{\sim}{\beta}$$

(ii) $\forall i : \quad Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad , \quad Var(Y_i \mid \underset{\sim}{x}_i) = \sigma^2$

(iii) $\forall i \neq j : \quad Cov(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0$

$$\rightarrow Cov(Y_i , Y_j \mid \underset{\sim}{x}_i , \underset{\sim}{x}_j) = 0$$

مهم

(iv) $\varepsilon_i \sim Normal \quad , \quad Y_i \mid x_i \sim Normal$

اگر ε_i‌ها نرمال نباشند؟

دقت کنید

$$\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0 \implies \hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1} X' \underset{\sim}{Y} \qquad (1)$$

$E(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{\beta}$ برآوردی نقطه‌ای و نااریب (2)

ص ۲

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 I \qquad (3)$$

$$\hat{\beta} \text{ is BLUE for } \beta \qquad (4)$$

(1) ، (2) ، (3) ، (4) ← ربطی به نرمال بودن خطاها ندارند (توزیع آزاد)

اما وقتی می‌خواهیم آزمون فرض انجام دهیم و فاصله‌ی اطمینان ارائه دهیم نیاز به توزیع $\hat{\beta}$ داریم که به نرمال بودن خطاها مرتبط می‌شود؛ لذا

$$\hat{\beta}_{ML} = (X'X)^{-1}X'y$$

که تابع likelihood به توزیع خطاها مرتبط است، استفاده می‌کنیم.

* اگر توزیع نرمال باشد علاوه بر BLUE بودن UMVUE را نیز داریم.

حال فرض کنیم

$$Y_i = x_i'\beta + \varepsilon_i \quad s.t \quad \varepsilon_i \overset{i.i.d}{\sim} t(0, \sigma^2, \nu)$$

$$\Rightarrow Y_i \overset{ind}{\sim} t(x_i'\beta, \sigma^2, \nu)$$

$$E(Y_i) = E(x_i'\beta + \varepsilon_i) = x_i'\beta + \cancelto{0}{E(\varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y_i) = x_i'\beta}$$

مهم

likelihood برپایه

$\hat{\beta}_{ML} = \dots \longrightarrow$ (توزیع می‌خواهد ⇐ پارامتری)

$\hat{\beta}_{LS} = (X'X)^{-1}X'y \longrightarrow$ (یعنی توزیع ندارد ⇐ ناپارامتری)

نکته: اگر توزیع ε ها به صورت دقیق بدانیم مثلاً دقیقاً بدانیم $\varepsilon_i \sim t(0,\sigma^2,\nu)$

آن وقت برآورد پارامتری $\hat{\beta}_{ML}$ از دقت بیشتری برخوردار است.

برآوردی برای β از حداقل کردن

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\hat{\beta})^2$$

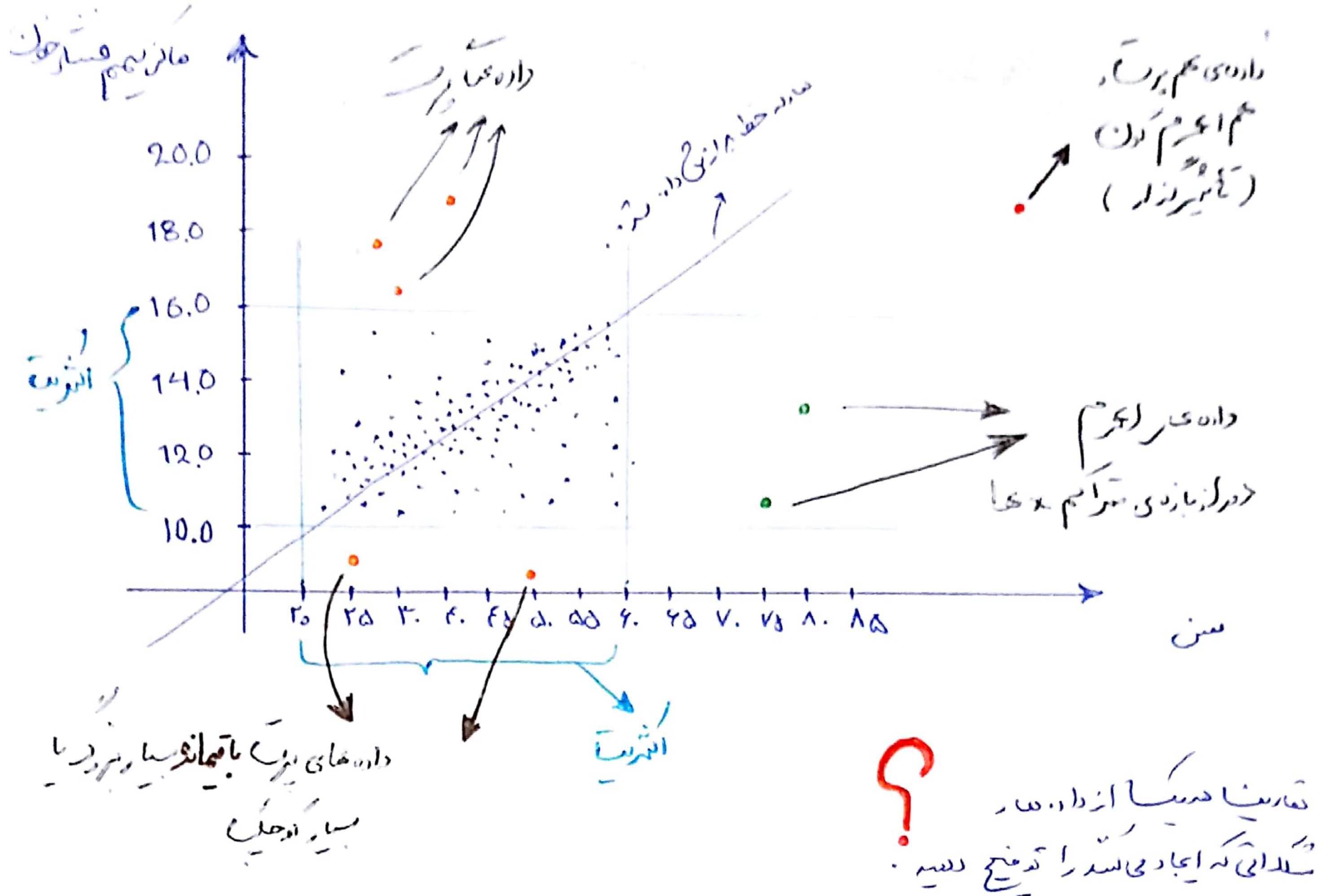
بدست آمده، لذا کافیست چند داده‌ی پرت داشته باشیم

(یعنی $\hat{\varepsilon}_i$ بسیار بزرگ یا بسیار کوچک می‌شود) در نتیجه مقدار $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$ خیلی بزرگ

یا خیلی کوچک می‌شود.

مشکل دقت روش LS برای برآورد کم است حال اگر داده‌ی پرت هم داشته باشیم

⇐ دقت $\hat{\beta}_{LS}$ بسیار بسیار کم می‌شود.



تمرین: همه این شکل‌هایی را که ایجاد می‌شد توضیح دهید.

(۱) داده‌ی پرت یا دورافتاده Outlier

(۲) داده‌های اهرم‌گون high leverage

(۳) داده‌های تأثیرگذار Influential

دسته‌بندی داده‌ها

در روش Robust Estimation درصدد آن هستیم تا تأثیر این داده‌ها را به صورت برآورد ناپارامتری کاهش دهیم لذا روش LSE را تغییر داده و از روش‌های دیگر مانند L_1، M، GM، LST استفاده می‌کنیم.

روش M Estimator

قبلاً $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$ را min می‌کردیم حالا می‌خواهیم $\sum \rho(\hat{\varepsilon}_i)$ را min کنیم

که اثر داده‌های پرت Outlier (تأثیرگذار) یا اهرمی high leverage را کاهش دهد.

$$\rho(\hat{\varepsilon}_i) \to |\hat{\varepsilon}_i|$$

$$\rho(\hat{\varepsilon}_i) \to \text{چندمعیاره Multi-criteria} \to \text{مثلاً} \begin{cases} -k & \hat{\varepsilon}_i < k \\ 0 & \hat{\varepsilon}_i = k \\ +k & \hat{\varepsilon}_i > k \end{cases}$$

$$\rho(\hat{\varepsilon}_i) \to \dots$$

هدف ← می‌خواهیم ببینیم فرم فرمول در حالتی که خطاها نرمال باشند چطوری است تا ایده بگیریم

let: $y_i = x_i'\beta + \varepsilon_i \quad s.t \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$\Rightarrow E(y_i) = x_i'\beta + \cancel{E(\varepsilon_i)}^{\,0}$$

$$\Rightarrow E(y_i) = x_i'\beta \ , \quad Var(y_i) = \sigma^2$$

$$\Rightarrow y_i \overset{ind}{\sim} N(x_i'\beta, \sigma^2) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

$$f_{Y_i}(y_i;\beta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}}_{u}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}\right)$$

$$\text{s.t} \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

$$\Rightarrow L(\beta,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i) = \sigma^{-n} \prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \ell = -n \ln\sigma + \sum_{i=1}^{n} \ln f\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}\right)$$

حال نام‌گذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} \ln f(\cdot) = \rho(\cdot) \longrightarrow \rho' = \psi = \dfrac{\partial}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)} \ln f\left(\dfrac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) \\[2ex] y_i - x_i'\beta = e_i(\beta) \end{cases}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\beta} = \frac{\partial\rho}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)}{\partial\beta}$$

قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\Rightarrow \ell = -n\ln\sigma + \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\ell}{\partial\beta} = 0 \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{-x_i'}{\sigma} \cdot \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \\[3ex] \dfrac{\partial\ell}{\partial\sigma} = 0 \longrightarrow \dfrac{-n}{\sigma} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{-e_i(\beta)}{\sigma^2} \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \end{cases}$$

معادله‌ی اول k معادله و معادله‌ی دوم را در σ^2 ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i' \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \\ -n\sigma + \sum_{i=1}^{n} -e_i(\beta) \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i' \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} e_i(\beta) \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = n\sigma \end{cases}$$

کاربردی ما

حال فرض میکنیم $\varepsilon_i \not\sim$ Normal ، اما توزیع‌های دم‌کلفت را در نظر بگیریم

مابین تفاوت

$$\psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = \rho'\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)} \ln f\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)^2\right\} \right]$$

که به جای توان دوم $\frac{e_i(\beta)}{\sigma}$ در توزیع‌ها هر قدر زیاد داده‌های پرت داشته باشیم وزن زیادی برگرده دارند

مثلاً از $\rho_{(u)} = |u|$ بهره میگیریم

$$\rho_{(u)} = \ln f(u) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u)^2}\right) = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}(u)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i' \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \\ -n\sigma + \sum_{i=1}^{n} -e_i(\beta)\, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i' \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} e_i(\beta)\, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = n\sigma \end{cases}$$

کریدوی ما

حال فرض نیستیم $\varepsilon_i \not\sim$ Normal ، اما فرمول‌های بالا را از ↑ کمک بگیریم

با این تفاوت

$$\psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = \rho'\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)} \ln f\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)^2 \right\} \right]$$

که به جای توان دوم $\frac{e_i(\beta)}{\sigma}$ در فرمول‌ها در اثر زیاد داده‌های پرت در محور گوشه روی برآمده دارید

مثلاً از $\rho_{(u)} = |u|$ بهره بگیریم

$$\rho_{(u)} = \ln f(u) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u)^2}\right) = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}(u)^2$$

حال می‌توان با توابع دیگر نیز جایگذاری کرد.

مثلاً

$$\rho = \begin{cases} -k \\ 0 \\ +k \end{cases}$$

در محاسبات به داده‌های پرت حساس هستند.

پس اگر فرض کنیم $\rho = |u|$ داریم

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} e_i(\beta) \, \psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = n\sigma \end{cases}$$

در اینجا

$$\psi\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right)}\left[-\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\left|\frac{e_i(\beta)}{\sigma}\right|\right]$$

حال $\hat{\beta}$ و $\hat{\sigma}^2$ را می‌یابیم.

(۱) نکته: اگر باقیمانده‌ها بزرگ باشند، از باقی‌مانده‌های استاندارد شده بهره می‌گیریم

$$? \leftarrow \hat{\varepsilon}_i = y_i - x_i' \beta$$

(2) نکته:

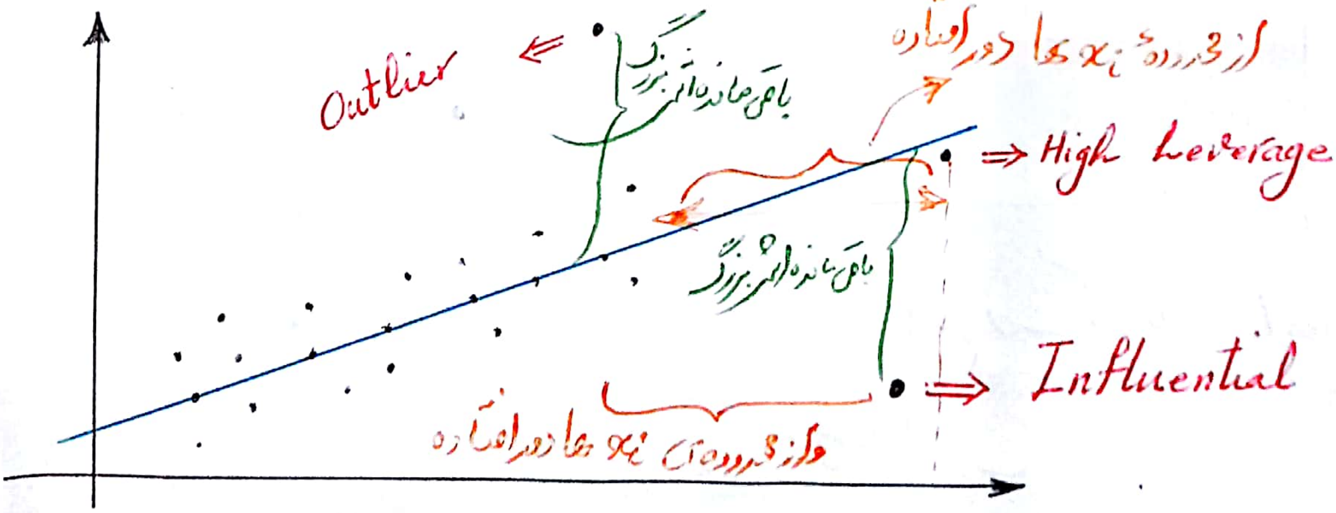
if $\hat{\varepsilon}_i \uparrow \Rightarrow$ تک داده‌ی پرت $\Rightarrow MSE \uparrow \Leftrightarrow S^2 \uparrow$

$\Rightarrow$ دقت $\downarrow$ $\Rightarrow$ مقدار S^2 در آزمون فرض‌ها و فاصله اطمینان‌ها نیز طبعاً $\uparrow$

(3) نکته: x_i ها را با هم مقایسه می‌کنیم اگر مثلاً x_i ای از همه‌ی x_i ها بسیار دور بود به آن High Leverage گوییم.

(4) نکته: یک راه نظر به اعضای قطر اصلی P (projection) است

$$\text{if } P_{ii} > \frac{2p}{n} \Longrightarrow \text{High Leverage}$$



(۱) prediction برای High leverage دار خوب نیست.

زیرا ممکن است خط رگرسیون در این ناحیه روند دیگری پیدا کرده باشد.

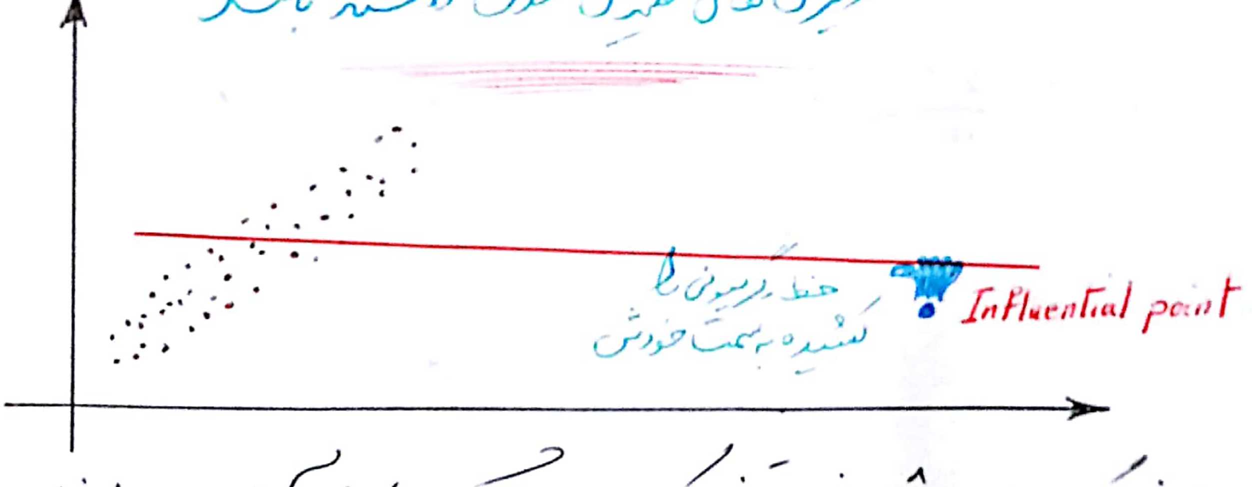
(۲) اگر High Leverage ، Out lier نباشد، جهت ثبات بخشیدن به خط رگرسیون مناسب است

(۳) اما اگر High Leverge ، Out lier هم باشد Ifluential تاثیرگذار

+

می شود و خط رگرسیون برازش داده شده Fitted مناسب نیست.

(۴) داده ی تاثیرگذار ← داده ای است به حذف کردن آن، تاثیر زیادی به برخی از ویژگی های کلیدی مدل داشته باشد



Influential point

اگر با حذف یک داده $\hat{\beta}$ خیلی تغییر کرد، پس ممکن است آن داده بوده

یکی از ویژگی های کلیدی

جهت تشخیص داده‌ی تأثیرگذاری در بر $\hat{\beta}$ تأثیرگذار است که از آماره آزمون Cook-D می‌توانیم بهره بگیریم، در این استاتیک سری آماره آزمون داریم که در کتاب مونت گمری بیان شدند DFBeta ، Covratio ...

DFBeta ← می‌پردازیم به منظور بررسی تأثیرگذار بودن داده بر روی ویژگی کلیدی خاصی از مدل می‌پردازد

Example:

	x_1 x_2 x_3	y	β_0 DFBeta	β_1 DFBeta	β_2 DFBeta ...
فرد اول	....	...			
فرد دوم	....	...			
⋮	⋮				

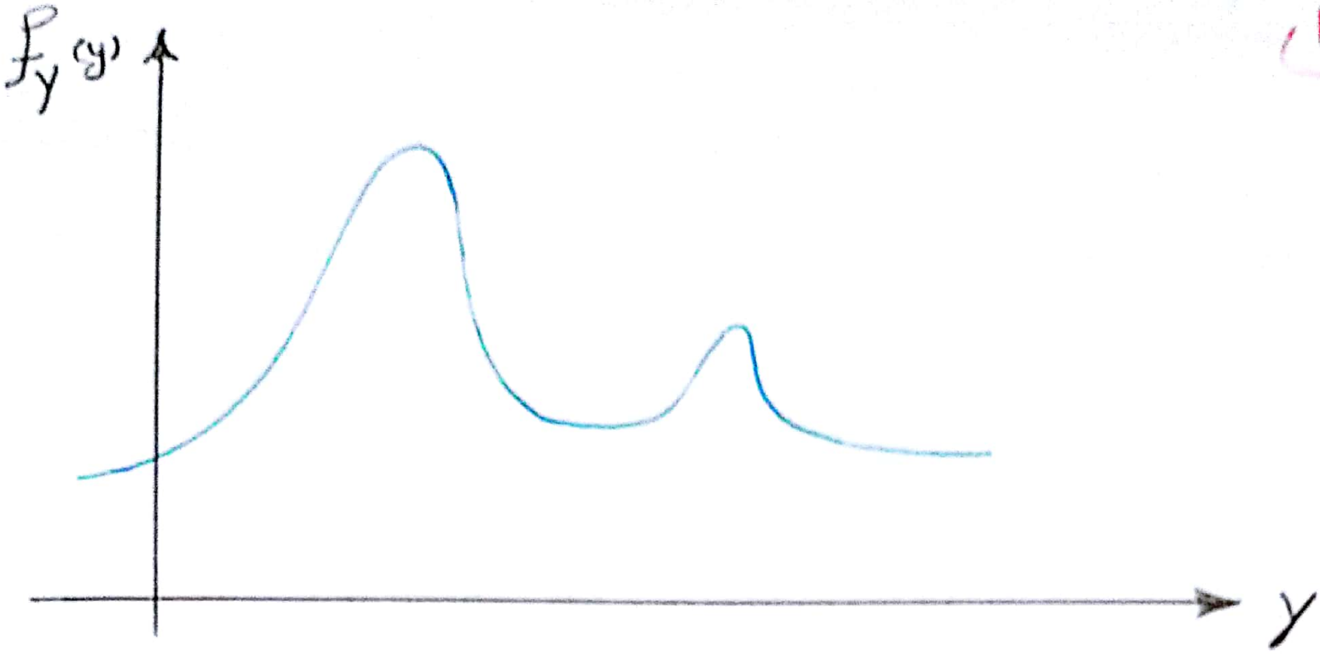
Conclusion:

راه حل همیشگی در برخورد با داده‌ی پرت حذف نیست

داده‌ی پرت →

- روش ML با در نظر گرفتن توزیع با دامنه مناسب برای داده‌ها
- روشهای ناپارامتری (مانند برآوردهای M، L_1 و ...) که کمتر تحت تأثیر داده‌ی پرت هستند Robust Estimation
- Quantile Regression

جل ۱۲

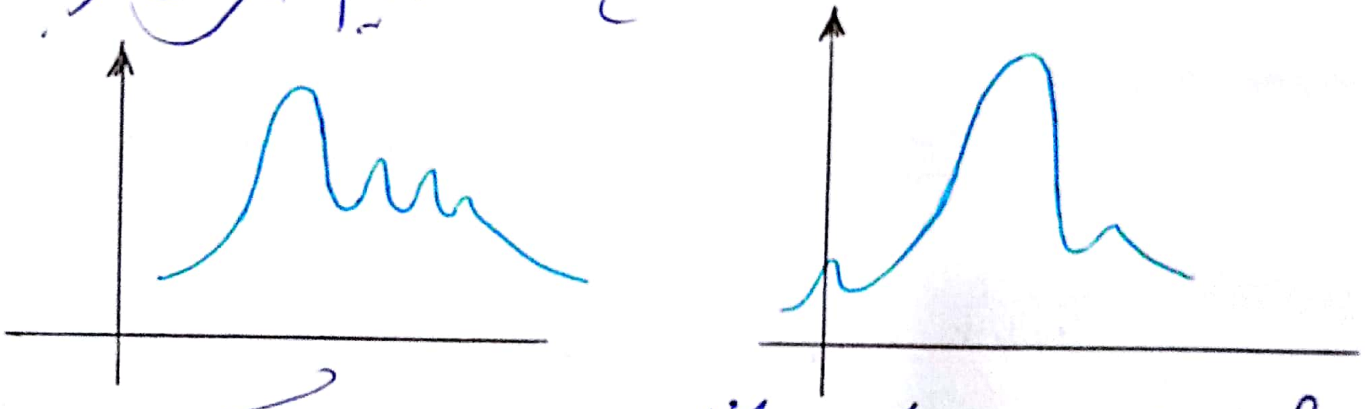


با این شرایط دقت کم روشهای ناپارامتری خیلی خیلی کم می‌شود

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}_{LS} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$$

LS روشی ناپارامتری ←

برای روشهای پارامتریک باید توزیع را حدس بزنیم مثلاً اگر به صورت



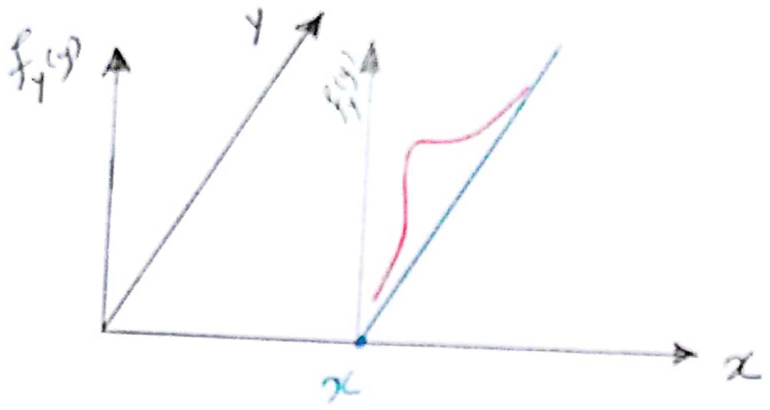
باشند، که توزیع t به دُم کلفت‌تر است استفاده می‌کنیم.

* بیشترین کیست در فرضیه‌ی ۴ اُم

$$(4) \quad e_i \sim Normal \equiv Y_i | x_i \sim N$$

ص ۱۳

دقت کنیم که نمودار زیر مهم است نه نمودار y − $f(y)$



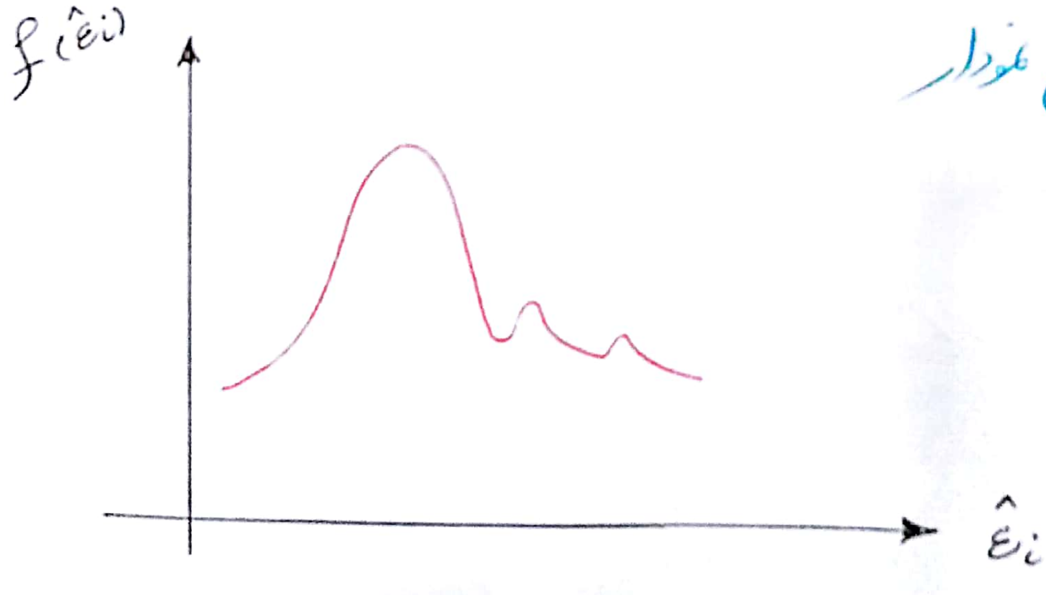
پس آیا این نرمال هست یا خیر؟! دقت کنیم که با یک داده مشاهده شده نمی‌توان فهمید

به شرط مشاهده شدن الگوهای $\underset{\sim}{X}$ ،
توزیع پاسخ در نرمال می‌باشد یا خیر!

فرض کنیم :

$$Y_i = x_i' \underset{\sim}{\beta} + \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i = Y_i - x_i' \underset{\sim}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \hat{\varepsilon}_i = Y_i - x_i' \hat{\underset{\sim}{\beta}}$$



حال از روی این نمودار
می‌توان فهمید

روش GM

در این روش وزن های زیر را در نظر می گیریم

$$w(x_i) = \min \left\{ 1 , \left[\frac{b}{(x_i - m)' C^{-1} (x_i - m)} \right]^{\alpha/2} \right\}$$

b ، α مقادیر ثابت (به ازای مقادیر مختلف نتایج مختلف بدست می دهد)

m را می توان میانگین در نظر گرفت $m = \bar{x}$ و C را S در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} b , \alpha \rightarrow \text{ثابت} \\ m = \bar{x} \\ C = S \end{cases} \quad s.t \quad S = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x_i} - \underset{\sim}{\bar{x}})' (\underset{\sim}{x_i} - \underset{\sim}{\bar{x}})$$

$\underset{\sim}{x_i} - \underset{\sim}{\bar{x}}$ بعد

به نوعی می گوید:

هر چه نقطه x_i از میانگین دورتر باشد $\Leftarrow$ مخرج $\uparrow$ $\Leftarrow$ کسر $\downarrow$ $\Leftarrow$ وزن w_i یا $w(x_i)$ $\downarrow$

$\Longrightarrow$ اثر آن مشاهده در مدل کمتر یعنی کم اثرتر

آخرین درس دکتر رحمت‌زاد

در مدل خطی مفروضات ذیل را داشتیم:

$$\text{مدل}: \quad Y_i = \underset{\sim}{x_i}' \underset{\sim}{\beta} + \varepsilon_i \qquad s.t \quad \varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

حال

(i) $E(Y_i) = \underset{\sim}{x_i}' \underset{\sim}{\beta}$

(ii) $\forall i : \; Var(Y_i) = \sigma^2$

(iii) $\forall i \neq j : \; Cov(Y_i, Y_j) = 0$

$$\left.\begin{matrix} \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{matrix}\right\} \quad Var\,\underset{\sim}{Y} = \sigma^2 I \qquad \underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

(iv) $Y_i \sim \text{Normal}$

بعداً گفتیم

(ii) $Var(\underset{\sim}{Y}) = \sigma^2 V$

$s.t \quad V$ is known & pd

(iii) دارای توزیع نرمال می‌باشند

تذکر: در مدل وزنی هم سایر مفروضات برقرار می‌شود.

(iii) $Var(\underset{\sim}{y}) = V$ s.t V is unknown

حالا چه کنیم؟

(۱) روش ML : فرض داشته باشیم $Y \sim N(X\underset{\sim}{\beta}, V)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \text{---} = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial V} = \text{---} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ مثلاً اگر $\underset{\sim}{\beta}_{p=k+1 \times 1}$ باشد یعنی p تا پارامتر مجهول داشته باشیم.

در اینجا هم داشته باشیم

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_n^2 \\ & \text{---} & \text{---} & \end{bmatrix}_{n \times n} \rightarrow$$ در اینجا نیز $\frac{n(n+1)}{2}$ پارامتر مجهول داریم.

پس باید از پارامترها کم کنیم تا کار محاسبه آسان شود.

مثلاً $V = \sigma^2 I$ در مسائل درجای به کار آید.

$$V = \begin{bmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix} \rightarrow$$ یک پارامتر شد. $\rightarrow$ پارامتر کاهش می‌یابد $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ به تا پارامتر

یا اینطور درنظر بگیریم:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^* & \cdots & \sigma^* \\ & \sigma^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

⇐ یک راه حل درنظر گرفتن فرم‌های مختلف برای V است (فرض‌های ساده‌تر روی V درنظر بگیریم در شامل کاهش تعداد پارامترها خواهد گردید)

۲) روش REML :

Restricted or Residual maximum likelihood

در این روش یک ماتریس مثل k درنظر می‌گیریم که

$$Kx = \underset{\sim}{0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow k\underset{\sim}{y} = \underbrace{y^*}_{\text{نامگذاری}} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, kVk')$$

حال likelihood را برای y^* می‌نویسیم

$$E(\underset{\sim}{y}) = X\underset{\sim}{\beta} \Rightarrow E(k\underset{\sim}{y}) = kE(\underset{\sim}{y}) = kX\underset{\sim}{\beta} \overset{(*)}{=} \underset{\sim}{0}\,\underset{\sim}{\beta} = 0$$

یعنی از شر β ها خلاص شدیم؟

$$\frac{\partial l}{\partial \left(\text{مولفه‌های } kVk'\right)} = 0$$

$$f_{y^*}(y^*) = (2\pi)^{-n/2} \det(kVk')^{-1/2} \exp\{y^{*\prime}(kVk')^{-1}y^*\}$$

بعد از این کار، برآورد مؤلفه‌های V حاصل می‌شود

یعنی V معلوم بدست می‌آید

V is known; now

از همان GLS موردی را داشتیم

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}X'\hat{V}^{-1}y$$

که به آن EGLS یا FGLS گوییم:

$$\boxed{\hat{\beta}_{EGLS} = \hat{\beta}_{FGLS} = (X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}X'\hat{V}^{-1}y}$$

تخمینی

تابع غیرخطی از y می‌باشد.

تذکر: دقت کنید چون اجزای $\hat{\beta}_{FGLS}$ تصادفی است لذا E و Var آن به راحتی بدست نمی‌آید. اما چون مجانبی می‌شود در فصول آخر کتاب زنجیر قابل محاسبه می‌شود به طور مجانبی!

⇐ REML روشی است که در آن می‌توان برآوردهای مؤلفه‌ی V را بدست آورده و در نظر بگیرند و آنها را بجای V قرار بدهیم و مسئله را به روش کمترین مربعات حل می‌کنیم.

برآوردهای [illegible] را به

⇐ REML روشی کاربردی و متداول می‌باشد.

⇐ نرم‌افزارها هم پکیج REML را دارند.

The End