آزمون های آماری:

الف- بررسی آزمون میانگین برای یک جمعیت نرمال (واریانس جامعه مجهول)

$$\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu_x \geq \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases}$$

(۱) دوطرفه — (۲) کمتر — (۳) بیشتر

آماره آزمون $\rightarrow T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2_n/n}} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$

$$\rightarrow \begin{cases} (1)\ \text{if} & |T_0| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1) \Rightarrow RH_0 \\ \ \text{if} & P\text{-Value} = 2P(T \geq |T_0|) < \alpha \Rightarrow RH_0 \\ (2)\ \text{if} & T_0 \geq t_{1-\alpha}(n-1) \Rightarrow RH_0 \\ \ \text{if} & P\text{-Value} = P(T \geq T_0) < \alpha \Rightarrow RH_0 \\ (3)\ \text{if} & T_0 \leq -t_{1-\alpha}(n-1) \Rightarrow RH_0 \\ \ \text{if} & P\text{-Value} = P(T \leq T_0) < \alpha \Rightarrow RH_0 \end{cases}$$

برای انجام آزمون های فوق در نرم افزار R، از تابع ( )t.test استفاده می کنیم.

t.test(x, mu = μ0, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), conf.level = 0,95)

★- آرگومان alternative فقط یکی از عناصر داخل بردار را می گیرد و نشان دهنده

alternative = "less" : آزمون (۳) را انجام می دهد.

alternative = "greater" : آزمون (۲) را انجام می دهد.

alternative = "two.sided" : آزمون (۱) را انجام می دهد.

همچنین آرگومان conf.level، فاصله اطمینان برای میانگین جامعه گزارش می دهد

مثال:

```
> x = c(11, 12, 13, 15, 19, 12)
> t.test (x, mu = 14, conf.level = 0.99)
```

این برنامه، آزمون $H_0: \mu_x = 14$ را انجام می‌دهد که در خروجی آن، مقدار آماره آزمون (T_0)، درجه آزادی آزمون، P_Value آزمون و همچنین فاصله اطمینان 99 درصد برای میانگین گزارش می‌شود.

```
> t.test (x, mu = 14, alternative = "less")
```

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \geq 14 \\ H_1: \mu_x < 14 \end{cases}$$

ب- بررسی آزمون اختلاف میانگین های دو جمعیت نرمال که به صورت زوجی هستند.

(واریانس ها نامعلوم)

$$\begin{cases} H_0: \mu_x - \mu_y = \delta \\ H_1: \qquad\quad \neq \delta \end{cases} \ (1) \qquad \begin{cases} H_0: \mu_x - \mu_y \leq \delta \\ H_1 \qquad\quad > \delta \end{cases} \ (2) \qquad \begin{cases} H_0: \mu_x - \mu_y \geq \delta \\ H_1 \qquad\quad < \delta \end{cases} \ (3)$$

$$D = X - Y$$

$$\mu_d = \mu_x - \mu_y \rightarrow \begin{cases} \mu_d = \delta \\ \mu_d \neq \delta \end{cases} \ (1) \qquad \begin{cases} H_0: \mu_d \leq \delta \\ \qquad > \delta \end{cases} \ (2) \qquad \begin{cases} H_0: \mu_d \geq \delta \\ \qquad < \delta \end{cases} \ (3)$$

$$T = \frac{\bar{D} - \delta}{\sqrt{S^2_d / n}} \overset{H_0}{\sim} t(n-1)$$

در اینجا استنباط مشابه حالت تک جمعیتی می‌شود.

این آزمون را به دو طریق با استفاده از تابع t.test( ) می‌توان انجام داد:

روش اول: t.test(x, y, mu = δ, paired = T, alternative = c( ))

یعنی متغیرهای مورد بررسی دو جمعیت زوجی هستند.

روش دوم: z = x − y

t.test(z, mu = δ, alternative = c( ))

مثال:

```
> A = c(12, 14, 13, 17, 16, 15.5)
> B = c(13.8, 14.5, 15, 19, 17, 18.5)
> t.test(A, B, paired = T)
```

$$\longrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_A - \mu_B = 0 \\ H_1: \qquad\quad \neq 0 \end{cases}$$

روش دوم:

```
> C = A - B
> t.test(C, mu = 0)
```

$$\longrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_C = 0 \\ H_1: \quad\ \neq 0 \end{cases}$$

ج - بررسی آزمون مقایسه میانگین بین دو جمعیت مستقل (جمعیت‌ها نرمال و واریانس نامعلوم)

۱- اگر $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد)

روش pooled

$$\begin{cases} H_0: \mu_x - \mu_y = \delta \\ H_1: \mu_x - \mu_y \neq \delta \end{cases} \longrightarrow T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{H_0}{\sim} t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\underbrace{S_p^2}_{\text{pooled}} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

۲- اگر $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ (فرض برابری واریانس‌ها برقرار نباشد)

روش Satterthwaite

$$H_0: \mu_x - \mu_y = \delta$$

آماره آزمون $\longrightarrow T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1} + \dfrac{S_y^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t(f)$

$$f = ?!$$

بنابراین برای انجام آزمون قسمت (ج) ابتدا نیاز است بررسی کنیم آیا واریانس دو جامعه مستقل باهم برابر هستند یا خیر:

$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$

برای این منظور باید از تابع Var.test استفاده کنیم.

```
Var.test (x, y, ratio = 1, alternative = c(      ), ...)
```

هدف انجام آزمون $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ که معادل آزمون $H_0: \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1$ است.

```
>Var.test (x, y, ratio = 1, alternative = "two.sided")
```

اگر P_Value* برای این قسمت بیشتر از α شد، از روش pooled استفاده می‌کنیم:

if P_Value* > α → $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

⇒ **Pooled** : $H_0: \mu_x - \mu_y = \delta$ $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

```
t.test (x, y, mu = δ, var.equal = T)
```

عبارتی که مشخص می‌کند واریانس دو جامعه مستقل، باهم برابر هستند.

if P_Value* < α → $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

⇒ **Satterthwaite** : $H_0: \mu_x - \mu_y = \delta$ $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

```
t.test (x, y, mu = δ, var.equal = F)
```

مثال:

```
>x=c(15, 9, 13, 17, 10, 12.5, 18, 14)

>y=c(13, 19, 11, 10, 16, 18, 16, 14, 13, 15)

>Var.test(x, y, ratio=1)
```

$P\text{-}Value = 0{,}79 > \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \sigma^2_x = \sigma^2_y$

```
>t.test(x, y, Var.equal=T)
```

$H_0: \mu_x = \mu_y$ or $H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

$P\text{-}Value = 0{,}51 > \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \mu_x = \mu_y$

همچنین اگر اطلاعات دو جمعیت در یک مجموعه داده قرار داشته باشد و با متغیر گروه بندی شده از هم جدا شده و معلوم باشد به صورت زیر عمل می کنیم:

مثال: فرض کنید یک مجموعه داده مانند M در R داریم که به صورت زیر است:

```
>M
        BP      Sexuality
        90          0
        110         1
        115         1
        120         0
        ⋮           ⋮
```

برای انجام آزمون اختلاف میانگین های دو دسته مختلف در جنسیت (Sexuality) به صورت زیر عمل می کنیم:

```
>Var.test(M$BP ~ M$sexuality)
```

در این قسمت متغیر گروه بندی شده قرار می گیرد.

آزمون $H_0: \sigma^2_0 = \sigma^2_1$

```
>t.test(M$BP ~ M$sexuality, var.equal=T)
```

در این قسمت متغیر گروه بندی شده قرار می گیرد.