

به نام پروردگار یگانه و یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان دانشکده علوم ریاضی

آزمون درس آنالیز عددی پیشرفته مورخ ۹۷/۹/۲۷

۱. فرض کنید T عملگری خطی و کران دار از فضای خطی نرم دار X به توی فضای خطی نرم دار Y باشد. نشان دهید اگر ثابت مثبت b وجود داشته باشد که

$$\|Tx\| \geq b\|x\|, \quad \forall x \in X \quad (۱)$$

آن گاه $T^{-1} : Y \rightarrow X$ موجود و کران دار است. نشان دهید $D = \frac{d}{dx} : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ که در آن $C^1[0, 1] = \{u \in C[0, 1] \mid u(0) = 0 = u(1)\}$ در شرط (۱) صدق می کند. D^{-1} را مشخص کرده، کران آن را بیابید.

۲. آ- خطای درونیابی هرمیت را بیان کنید.

ب- به ازای چه مقادیری از α چند جمله ای یکتای $p \in \mathbb{P}_3$ یافت می شود به طوری که $p(-1) = f(-1)$, $p(0) = f(0)$, $p''(0) = f''(0)$, $p(\alpha) = f(\alpha)$.

به ازای $\alpha = 2$ چند جمله ای p را مشخص کرده، کران واقع بینانه ای برای خطای $\|f - p\|_\infty$ به دست آورید.

۳. آ- برابری هولادی را بیان و اثبات کنید.

فرض کنید s تابع اسپلاینی باشد که تابع $x \in K^r[a, b]$ را روی گره های افراز $\Delta := \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$

درونیابی کند. تحت چه شرایطی (کمترین) برابری زیر برقرار است؟

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \int_a^b (x(t) - s(t))x^{(r)}(t)dt.$$

برای $a = 0$, $b = 1$ و $x(t) = t^4$ بدون محاسبه s نشان دهید

$$\int_0^1 s(t)dt = \frac{1}{6}s''(1) - \frac{1}{44}s'''(1) - 1.$$

۴. فرض کنید $x \in C^{(n)}[a, b]$. نشان دهید برای هر $\epsilon > 0$ داده شده چند جمله ای p چنان وجود دارد که

$$\|x^{(j)} - p^{(j)}\|_\infty \leq \epsilon, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

۵. مسئله ارزیابی تابع $y = \|x\|_2$ را در نظر بگیرید. دو الگوریتم (با توجه به وقوع پاریزیا سرریز) برای ارزیابی تابع طراحی کرده و پایداری و قابل اعتماد بودن آن دو را بررسی کنید.