فصل ۴

درون‌یابی و تقریب

در جمهوری اسلامی ایران هر ده سال یک بار سرشماری جمعیت انجام می‌شد و از سال ۱۳۸۵ این فرایند هر پنج سال یک بار انجام می‌شود. جدول ۱.۴ جمعیت کشور را در سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۵ نشان می‌دهد. در ارتباط با این جدول سوال‌های زیر مطرح می‌شوند

- در سال ۱۳۵۹ (آغاز جنگ تحمیلی ایران با عراق) جمعیت ایران چقدر بوده است؟
- در سال ۱۴۰۰ جمعیت ایران چقدر خواهد بود؟
- در سال ۱۳۳۰ جمعیت ایران چقدر بوده است؟
- در چه سالی جمعیت ایران حدود ۴۰ میلیون نفر بوده است؟

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۰	۱۳۹۵
میلیون نفر	۱۸/۹۵	۲۵/۷۹	۳۳/۷۱	۴۹/۴۵	۶۰/۰۶	۷۰/۴۷	۷۵/۱۵	۷۹/۹۳

جدول ۱.۴: جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۵

تعریف ۱.۴ *فرض کنید تابع $y = f(x)$ در دسترس نباشد (یا ضابطه‌ای پیچیده داشته باشد) ولی مقدار آن در $n+1$ نقطه $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ معلوم باشد. مسئله یافتن مقدار تابع f در نقطه x متعلق به بازه $[x_0, x_n]$ به مسئله* **درون‌یابی** *(سوال اول)، مسئله یافتن مقدار تابع f در نقطه x که به بازه $[x_0, x_n]$ تعلق ندارد به مسئله* **برون‌یابی** *(سوال دوم و سوم) و مسئله تعیین x زمانی که $f(x)$ معلوم باشد به مسئله* **درون‌یابی وارون** *(سوال چهارم) معروف است.*

۱.۴ درون‌یابی

در این بخش پس از بررسی حل‌پذیری مسئله درون‌یابی، به روش‌های حل این مسئله می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴ **(تقریب وایرشتراس)** *فرض کنید $f \in C[a,b]$. به ازای هر $\epsilon > 0$ چندجمله‌ای p چنان وجود دارد که*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

با توجه به این قضیه و با توجه به هموار‌ی چندجمله‌ای‌ها (مشتق و انتگرال یک چندجمله‌ای، چندجمله‌ای است)، چنین به نظر می‌رسد که ساده‌ترین روش برای حل مسئله درون‌یابی، ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f است.

تعریف ۲.۴ *فرض کنید مقدار تابع f در $n+۱$ نقطه $x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n$ معلوم باشد. چندجمله‌ای p را چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f نامند اگر شرایط (شرایط درون‌یابی) زیر برقرار باشند*

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = ۰, ۱, \ldots, n.$$

قضیه ۲.۴ *اگر مقدار تابع f در $n+۱$ نقطه متمایز $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ معلوم باشد، آن‌گاه یک و فقط یک چندجمله‌ای درون‌یاب با حداکثر درجه n وجود دارد.*

برهان. فرض کنید $p(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n$ چندجمله‌ای درون‌یاب (با ضرایب نامعین) تابع f در نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ باشد. بنابر شرایط درون‌یابی داریم

$$\begin{aligned}
p(x_۰) &= a_۰ + a_۱x_۰ + \cdots + a_nx_۰^n = f_۰,\\
p(x_۱) &= a_۰ + a_۱x_۱ + \cdots + a_nx_۱^n = f_۱,\\
&\vdots\\
p(x_n) &= a_۰ + a_۱x_n + \cdots + a_nx_n^n = f_n,
\end{aligned}$$

که در آن $f_i = f(x_i)$. این معادله‌ها را می‌توان به شکل فشرده $A\alpha = F$ نوشت که در آن

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & x_۰ & \cdots & x_۰^n \\ ۱ & x_۱ & \cdots & x_۱^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} f_۰ \\ f_۱ \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

ماتریس A به ماتریس واندرموند معروف است و $\det(A) = \prod_{۰\le i<j\le n}(x_j - x_i)$ (بررسی کنید). با توجه به متمایز بودن نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ واضح است که $\det(A) \neq ۰$ و بنابراین دستگاه $A\alpha = F$ جواب یکتا دارد. □

تذکر ۱.۴ *اثبات این قضیه دلالت دارد بر روش ضرایب نامعین برای تعیین چندجمله‌ای درون‌یاب که به تولید یک دستگاه پُر و بدحالت منجر می‌شود و برای nهای بزرگ کارایی ندارد. در ادامه روش‌های کاراتر بررسی می‌شوند.*

۱.۱.۴ روش لاگرانژ

فرض کنید L_j به ازای $j = ۰, ۱, \ldots, n$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد و قرار دهید

$$p(x) = f_۰L_۰(x) + f_۱L_۱(x) + \cdots + f_nL_n(x) = \sum_{j=۰}^{n} f_jL_j(x).$$

برای آن که p در شرایط درون‌یابی صدق کند، باید داشته باشیم $L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ یعنی L_j باید در n نقطه $x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ صفر شود. بنابراین

$$L_j(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n),$$

و چون $L_j(x_j) = 1$ پس

$$c = \frac{1}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)},$$

و در نتیجه

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} = \prod_{j \neq k = 0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

تذکر ۲.۴ *چندجمله‌ای‌های L_j به چندجمله‌ای‌های لاگرانژ معروف هستند و با معرفی چندجمله‌ای*

$$\psi_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

می‌توان نوشت $p(x) = \psi_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{f_j}{(x - x_j)\psi_n'(x_j)}$.

تمرین ۱.۴ *نشان دهید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مستقل خطی بوده و* $\sum_{j=0}^{n} L_j(x) = 1$.

الگوریتم ۱.۴ **الگوریتم روش لاگرانژ**

- **ورودی.** *نقاط* $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$
- **خروجی.** *چندجمله‌ای درون‌یاب* f

۱) *برای* $j = 0, 1, \dots, n$ *قرار دهید* $L_j(x) = \prod_{j \neq k = 0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$.

۲) *قرار دهید* $p(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)$.

مثال ۱.۴ *به کمک روش لاگرانژ چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را تعیین کنید.*

x_i	-1	0	2
f_i	1	1	7

به وضوح $n = 2$ *و با دنبال کردن مراحل الگوریتم ۱.۴ داریم*

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3},$$
$$L_1(x) = \frac{(x - (-1))(x - 2)}{(0 - (-1))(0 - 2)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2}, \quad L_2(x) = \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(2 - (-1))(2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

و بنابراین

$$p(x) = f_۰L_۰(x) + f_۱L_۱(x) + f_۲L_۲(x) = ۱ \times (\frac{x^۲ - ۲x}{۳}) + ۱ \times \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲} + ۷ \times (\frac{x^۲ + x}{۶}) = x^۲ + x + ۱$$

پس می‌توان به عنوان مثال $p(\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۷}{۴}$ را به عنوان تقریبی از $f(\frac{۱}{۲})$ پذیرفت. △

مثال ۲.۴ به کمک روش لاگرانژ چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

به وضوح داریم $L_۰(x) = \frac{(x-۰)(x-۱)(x-۲)}{(-۱-۰)(-۱-۱)(-۱-۲)} = \frac{x^۳-۳x^۲+۲x}{-۶}$، $L_۱(x) = \frac{x^۳-۲x^۲-x+۲}{۲}$، $L_۲(x) = \frac{x^۳-x^۲-۲x}{-۲}$ و $L_۳(x) = \frac{x^۳-x}{۶}$. بنابراین $p(x) = ۱ \times L_۰(x) + ۱ \times L_۱(x) + ۳ \times L_۲(x) + ۷ \times L_۳(x) = x^۲ + x + ۱$ و با آن که L_jها درجه ۳ هستند ولی p درجه ۲ است. △

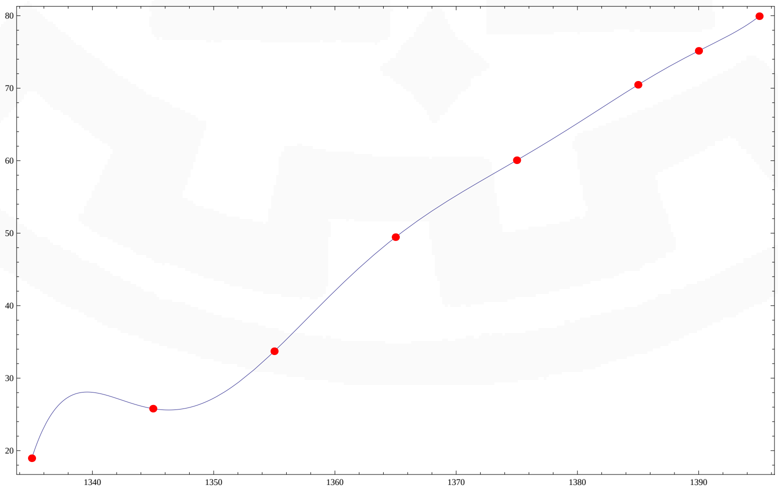
اشکالات روش لاگرانژ

- محاسبات حتی زمانی که n کوچک باشد زیاد است و برای nهای بزرگ روش کارایی چندانی ندارد؛
- با اضافه شدن یک نقطه به داده‌های قبلی، باید تمام عملیات را از سر گرفت و از محاسبات قبلی استفاده نمی‌شود؛
- قبل از اتمام عملیات، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب معلوم نیست.

مثال ۳.۴ چندجمله‌ای درون‌یاب داده‌های جمعیت ایران را ساخته و نمودار آن را در شکل ۱.۴ رسم کرده‌ایم. نتایج

$$p(۱۳۳۰) = -۴۴/۹۵,\ p(۱۳۴۰) = ۲۸/۰۴,\ p(۱۳۵۹) = ۴۰/۳۹,\ p(۱۳۶۸) = ۵۱/۹۲,\ p(۱۴۰۰) = ۹۳/۲۹$$

به دست می‌آیند که باید به دقت تفسیر شوند. △



شکل ۱.۴: نمودار جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۳۵

۲.۱.۴ روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

در این بخش روشی بررسی می‌شود که اشکالاتی که به روش لاگرانژ وارد است را برطرف می‌کند. قبل از هر چیز، چند تعریف و قضیه را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۳.۴ *مجموعه توابع $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ روی بازه $[a, b]$ وابسته خطی نامیده می‌شوند، هرگاه اعداد حقیقی $c_0, \dots, c_n$ با شرط $|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n| \neq 0$ چنان موجود باشند که داشته باشیم*

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, b].$$

به عبارتی حداقل یکی از آن‌ها را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت. در غیر این صورت مجموعه توابع $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ روی بازه $[a, b]$ مستقل خطی هستند. به عنوان مثال توابع $1, x, x^2, \dots, x^n$ روی $\mathbb{R}$ و توابع $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(nx), \sin(nx)$ روی $[a, b)$ یا $(a, b]$ که در آن $b - a = 2\pi$ مستقل خطی هستند.

قضیه ۳.۴ *مجموعه توابع $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ که در آن ϕ_j به ازای $j = 0, 1, \dots, n$ یک چندجمله‌ای درجه j است، روی هر بازه دلخواه $[a, b]$ مستقل خطی هستند.*

برهان. فرض کنید اعداد حقیقی $c_0, \dots, c_n$ چنان موجود باشند که

$$p(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{۱.۴}$$

چون p یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n است بنابراین حداکثر n ریشه دارد و (۱.۴) دلالت بر آن دارد که $p(x) \equiv 0$ و در نتیجه ضرایب $1, x, \dots, x^n$ در p یعنی $c_0, c_1, \dots, c_n$ باید صفر باشند. □

تعریف ۴.۴ *مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر n، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که آن را با $\mathbb{P}_n$ نمایش می‌دهیم. به وضوح $\mathbb{P}_n = \mathsf{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$، یعنی هر چندجمله‌ای از درجه حداکثر n را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $1, x, x^2, \dots, x^n$ نوشت.*

قضیه ۴.۴ *مجموعه مستقل خطی $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ از چندجمله‌ای‌های در $\mathbb{P}_n$، یک پایه برای فضای $\mathbb{P}_n$ تشکیل می‌دهد، به عبارت دیگر هر چندجمله‌ای در $\mathbb{P}_n$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی یکتایی از $\phi_0, \dots, \phi_n$ نوشت.*

تمرین ۲.۴ نشان دهید

$$\mathbb{P}_n = \mathsf{span}\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\}.$$

باید نشان دهید چندجمله‌ای‌های $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$ مستقل خطی هستند.

برای ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب، بر اساس تمرین ۲.۴، می‌توان هر چندجمله‌ای از درجه حداکثر n مانند p را به صورت زیر نوشت

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که p در شرایط درون‌یابی صدق کند. پس باید داشته باشیم

$$f_0 = p(x_0) = a_0, \qquad f_1 = p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

و از آنجا داریم $a_0 = f_0$ و $a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$. قبل از آن که این روند را ادامه دهیم، ابتدا تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵.۴ *فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاطی متمایز باشند. تفاضل تقسیم‌شده مرتبه اول f در نقاط x_i و x_{i+1} که با نماد $f[x_i, x_{i+1}]$ نمایش داده می‌شود به صورت $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$ و تفاضل تقسیم‌شده مرتبه j تابع f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}$ به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$f[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}.$$

بنابراین می‌توان نوشت $a_1 = f[x_0, x_1]$ و داریم

$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2,$$

و از آن‌جا خواهیم داشت

$$a_2 = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}}{(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{f_2 - f_1 + f_1 - f_0}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\frac{x_2 - x_1 + x_1 - x_0}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_0},$$

و یا

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

در نتیجه $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$. با یک روند استقرایی برای $j = 1, \ldots, n$ داریم $a_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$. پس

$$p(x) = f_0 + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j](x - x_0) \cdots (x - x_{j-1}).$$

الگوریتم ۲.۴ الگوریتم روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

- **ورودی.** *نقاط* $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$
- **خروجی.** *اعداد* $F_{0,0}, F_{1,1}, \ldots, F_{n,n}$ *به طوری که* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k)$

۱) *برای* $i = 0, 1, \ldots, n$ *قرار دهید* $F_{i,0} = f_i$.

۲) *برای* $i = 1, \ldots, n$ *و* $j = 1, \ldots, i$ *قرار دهید* $F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$.

مثال ۴.۴ به کمک روش *تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به جدول زیر را تعیین کنید.*

x_i	-1	0	2
f_i	1	1	7

برای ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب، جدولی معروف به جدول تفاضلات تقسیم‌شده به صورت زیر می‌سازیم

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
-1	1		
		$\frac{1-1}{0-(-1)} = 0$	
0	1		$\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$
		$\frac{7-1}{2-0} = 3$	
2	7		

و به کمک آن داریم $p(x) = 1 + (0)(x-(-1)) + (1)(x-(-1))(x-(0)) = x^2 + x + 1$. △

مثال ۵.۴ *مثال ۴.۴ را اگر داده* $(1, 3)$ *به جدول آن اضافه شود، دوباره حل کنید.*
به راحتی می‌توان جدول مثال ۴.۴ را به صورت زیر اصلاح کرد

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
-1	1			
		0		
			1	
0	1			
		3		$\frac{1-1}{1-(-1)} = 0$
2	7			
			$\frac{4-3}{1-0} = 1$	
		$\frac{3-7}{1-2} = 4$		
1	3			

و سپس می‌توان نوشت $q(x) = p(x) + 0(x+1)x(x-2) = p(x) = x^2 + x + 1$. △

مزیت‌های روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن

- حجم عملیات چندان زیاد نیست؛
- با اضافه شدن یک نقطه (نقاطی) به جدول، از محاسبات قبلی استفاده می‌شود؛
- چندجمله‌ای درون‌یاب به تدریج ساخته می‌شود و درجه آن، پس از ساختن جدول مشخص می‌شود.

تذکر ۳.۴ *تفاضل تقسیم‌شده به ترتیب نقاط بستگی ندارد، به بیان دیگر اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در مجموعه نقاط $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ و q چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در مجموعه نقاط $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ باشد و داشته باشیم $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ آن‌گاه بنابر یکتایی چندجمله‌ای درون‌یاب داریم $p = q$. با توجه به ضریب x^n در p و q داریم $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ یعنی تفاضل تقسیم‌شده به ترتیب نقاط بستگی ندارد.*

تذکر ۴.۴ *اگر p_n چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0, \ldots, x_n$ و p_{n+1} چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$ باشد، آن‌گاه رابطه بازگشتی زیر همواره برقرار است*

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, \ldots, x_{n+1}](x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

۳.۱.۴ روش‌های مبتنی بر نقاط هم‌فاصله

روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن برای نقاط $x_0, \ldots, x_n$ چه هم‌فاصله باشند و چه نباشند به کار برده می‌شود، اما اگر نقاط هم‌فاصله باشند چندجمله‌ای درون‌یاب به شکل ساده‌تری قابل بیان است که در ادامه با نحوه نمایش آن آشنا می‌شویم. فرض کنید

$$x_{i+1} - x_i = h, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

و یا $x_i = x_0 + ih$ برای $i = 0, 1, \ldots, n$.

تعریف ۶.۴ *عملگر انتقال که با E نمایش داده می‌شود به صورت $Ef_i = f_{i+1} = f(x_{i+1})$ تعریف می‌شود و برای هر k طبیعی داریم $E^k f_i = f_{i+k}$. با این فرض که به ازای هر α حقیقی داشته باشیم $x_{i+\alpha} = x_i + \alpha h$ و $f_{i+\alpha} = f(x_{i+\alpha})$ می‌توان تعریف کرد $E^\alpha f_i = f_{i+\alpha}$، به ویژه $E^{-1} f_i = f_{i-1}$.*

تعریف ۷.۴ *عملگر تفاضل پیشرو که با Δ نمایش داده می‌شود به صورت $\Delta = E - 1$ بیان می‌شود. بنابراین $\Delta f_i = (E - 1) f_i = f_{i+1} - f_i$ و برای هر k طبیعی داریم*

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta(\Delta^k f_i) = \Delta^k(\Delta f_i) = \Delta^k(f_{i+1} - f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i.$$

به عنوان مثال داریم $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$. به طور مشابه عملگر تفاضل پسرو که با ∇ نمایش داده می‌شود، به صورت $\nabla = 1 - E^{-1}$ بیان شده و در نتیجه $\nabla f_i = (1 - E^{-1}) f_i = f_i - f_{i-1}$ و برای هر k طبیعی داریم

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla(\nabla^k f_i) = \nabla^k(\nabla f_i) = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}.$$

به عنوان مثال $\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$.

تمرین ۳.۴ نشان دهید $E\Delta = \Delta E$، $E\nabla = \nabla E$، $\Delta\nabla = \nabla\Delta$، $\Delta f_i = \nabla f_{i+1}$، $\nabla f_i = \Delta f_{i-1}$ و $\Delta^k f_i = \nabla^k f_{i+k}$ برای $k \in \mathbb{N}$. *اگر* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$، *نشان دهید* $\Delta^n p_i = n! h^n a_n$ و $\Delta^m p_i = 0$ *برای* $m > n$.

لم ۱.۴ *اگر k عددی طبیعی باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح نامنفی i داریم*

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k} = \frac{\nabla^k f_{i+k}}{k! h^k}.$$

برهان. با استقرا روی k. برای $k = 1$ داریم $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f_i}{h}$. فرض کنید حکم برای $k = m$ برقرار باشد. برای $k = m + 1$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}]}{x_{i+m+1} - x_i} \\ &= \frac{\frac{\Delta^m f_{i+1}}{m! h^m} - \frac{\Delta^m f_i}{m! h^m}}{(m+1)h} = \frac{\Delta^{m+1} f_i}{(m+1)! h^{m+1}}. \end{aligned}$$

پس حکم برای هر k طبیعی برقرار است. □

قضیه ۵.۴ **(چندجمله‌ای درون‌یاب پیشروی نیوتن)** *چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط هم‌فاصله $x_0, x_1, \dots, x_n$ به صورت زیر است*

$$p(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 = f_0 + \sum_{l=1}^{n} \binom{\theta}{l} \Delta^l f_0,$$

که در آن $\theta = \frac{x - x_0}{h}$ و برای هر l در $\mathbb{N}$ و هر θ در $\mathbb{R}$ داریم $\binom{\theta}{l} = \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-l+1)}{l!}$.

برهان. چون $x - x_0 = \theta h$ پس $x - x_k = x - (x_0 + kh) = (\theta - k)h$. چندجمله‌ای درون‌یاب با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن به صورت زیر بیان می‌شود

$$p(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}),$$

و به کمک لم ۱.۴ می‌توان نوشت

$$p(x) = f_0 + \theta h \frac{\Delta f_0}{h} + \theta(\theta-1) h^2 \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2} + \dots + \theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1) h^n \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n},$$

و یا $p(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$. □

نتیجه ۱.۵.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب پیشروی نیوتن در نقاط هم‌فاصله $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ به صورت زیر بیان می‌شود*

$$p(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i, \qquad \theta = \frac{x - x_i}{h}.$$

قضیه ۶.۴ **(چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن)** *با فرض $\theta = \frac{x - x_n}{h}$، چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط هم‌فاصله $x_0, x_1, \dots, x_n$ به صورت زیر است*

$$p(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)}{n!} \nabla^n f_n = f_n + \sum_{l=1}^{n} \binom{\theta + l - 1}{l} \nabla^l f_n.$$

برهان. چندجمله‌ای درون‌یاب که با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن به دست آمد به صورت پیشرو بیان شده است. می‌توان نشان داد که شکل پسرو آن به صورت زیر است!؟

$$p(x) = f_n + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots$$
$$+ f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1).$$

ادامه اثبات با استفاده از لم ۱.۴، مشابه اثبات قضیه ۵.۴ است. □

نتیجه ۱.۶.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط هم‌فاصله $x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i$ به صورت زیر قابل بیان است*

$$p(x) = f_i + \theta \nabla f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_i + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+k-1)}{k!}\nabla^k f_i, \qquad \theta = \frac{x - x_i}{h}.$$

تذکر ۵.۴ *در عمل هنگام استفاده از نتایج ۱.۵.۴ و ۱.۶.۴، این سوال مطرح می‌شود که کدام انتخاب (پیشرو یا پسرو، انتخاب x_i و درجه چندجمله‌ای (k)) مناسب‌تر است؟ در پاسخ باید توجه داشت که x_i را چنان انتخاب می‌کنیم که $\theta = \frac{x - x_i}{h}$ (که در آن x نقطه‌ای است که می‌خواهیم درون‌یابی کنیم) کوچک باشد. اگر x به ابتدای جدول نزدیک باشد به صورت پیشرو و اگر x به انتهای جدول نزدیک باشد به صورت پسرو عمل می‌کنیم. برای پرهیز از افزایش حجم محاسبات، درجه چندجمله‌ای درون‌یاب را بی‌جهت اضافه نمی‌کنیم؛ البته این مطلب بستگی به h دارد (برای h کوچک درون‌یابی خطی (درجه یک) نیز جواب خوبی می‌دهد).*

مثال ۶.۴ *با توجه به جدول داده‌شده مطلوب است مقدار* $\sin(5^\circ)$، $\sin(25^\circ)$ و $\sin(45^\circ)$.

x_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°
$\sin(x_i)$	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

ابتدا جدولی به صورت زیر می‌سازیم و برای درون‌یابی در $x = 5^\circ$، *با انتخاب* $x_0 = 0^\circ$، $\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5^\circ - 0^\circ}{10^\circ} = \frac{1}{2}$ *و به کمک نتیجه ۱.۵.۴ خواهیم داشت*

$$\sin(5^\circ) \simeq f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-5+1)}{5!}\Delta^5 f_0.$$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
۰	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰	۰/۱۷۳۶		−۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		−۰/۰۰۵۲		
۲۰	۰/۳۴۲۰		−۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		−۰/۰۰۴۸		۰
۳۰	۰/۵		−۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		−۰/۰۰۴۴		
۴۰	۰/۶۴۲۸		−۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰	۰/۷۶۶۰					
x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$	$\nabla^5 f_i$

پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی $\sin(5^\circ)$ *به صورت زیر به دست می‌آیند*

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی
۰	۰
۱	۰ + ۰/۰۸۶۸ = ۰/۰۸۶۸
۲	۰ + ۰/۰۸۶۸ + ۰/۰۰۰۶ = ۰/۰۸۷۴
۳	۰ + ۰/۰۸۶۸ + ۰/۰۰۰۶ − ۰/۰۰۰۳ = ۰/۰۸۷۱
۴	۰ + ۰/۰۸۶۸ + ۰/۰۰۰۶ − ۰/۰۰۰۳ + ۰/۰۰۰۰ = ۰/۰۸۷۱
۵	۰ + ۰/۰۸۶۸ + ۰/۰۰۰۶ − ۰/۰۰۰۳ + ۰/۰۰۰۰ − ۰ = ۰/۰۸۷۱

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی $\sin 45^\circ$
۰	۰/۶۴۲۸
۱	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ = ۰/۷۱۴۲
۲	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ − ۰/۰۰۵۷ = ۰/۷۰۸۵
۳	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ − ۰/۰۰۵۷ − ۰/۰۰۱۵ = ۰/۷۰۷۰
۴	۰/۶۴۲۸ + ۰/۰۷۱۴ − ۰/۰۰۵۷ − ۰/۰۰۱۵ + ۰/۰۰۰۱ = ۰/۷۰۷۱

برای درون‌یابی در $x = 45^\circ$*، با انتخاب* $x_4 = 40^\circ$*،* $\theta = \frac{x-x_4}{h} = \frac{45^\circ-40^\circ}{10^\circ} = \frac{1}{2}$ *و به کمک نتیجه ۱.۶.۴ خواهیم داشت*

$$\sin(45^\circ) \simeq f_4 + \theta\nabla f_4 + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_4 + \cdots + \frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+4-1)}{4!}\nabla^4 f_4,$$

که پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی $\sin(45^\circ)$ *در جدول اخیر به دست می‌آیند. برای درون‌یابی در* $x = 25^\circ$ *اگر از* $x_2 = 20^\circ$ *به صورت پیشرو استفاده کنیم آن‌گاه* $\theta = \frac{x-x_2}{h} = \frac{25^\circ-20^\circ}{10^\circ} = \frac{1}{2}$ *و به کمک نتیجه ۱.۵.۴ داریم* $\sin(25^\circ) \simeq f_2 + \theta\Delta f_2 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_2 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_2$*. پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی* $\sin(25^\circ)$ *به*

صورت زیر به دست می‌آیند

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی
۰	۰/۳۴۲۰
۱	۰/۳۴۲۰ + ۰/۰۷۹۰ = ۰/۴۲۱۰
۲	۰/۳۴۲۰ + ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۹ = ۰/۴۲۲۹
۳	۰/۳۴۲۰ + ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۹ − ۰/۰۰۰۳ = ۰/۴۲۲۶

و اگر برای درون‌یابی در $x = ۲۵°$ از $x_۳ = ۳۰°$ به صورت پسرو استفاده کنیم آن‌گاه $\theta = \frac{۲۵°-۳۰°}{۱۰°} = -\frac{۱}{۲}$ و به کمک نتیجه۴.۶.۱ داریم $\sin(۲۵°) \simeq f_۳ + \theta\nabla f_۳ + \frac{\theta(\theta+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_۳ + \frac{\theta(\theta+۱)(\theta+۲)}{۳!}\nabla^۳ f_۳$. پس از جای‌گذاری، مقادیر تقریبی $\sin(۲۵°)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

k(درجه چندجمله‌ای درون‌یاب)	مقدار تقریبی
۰	۰/۵۰۰۰
۱	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ = ۰/۴۲۱۰
۲	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۳ = ۰/۴۲۲۳
۳	۰/۵۰۰۰ − ۰/۰۷۹۰ + ۰/۰۰۱۳ + ۰/۰۰۰۳ = ۰/۴۲۲۶

$\triangle$

ممکن است چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو (پسرو) نیوتن برای درون‌یابی f زمانی که x در اواسط جدول قرار دارد مناسب نباشد، زیرا از تمام اطلاعات جدول استفاده نمی‌شود. در این صورت بهتر است از چندجمله‌ای درون‌یاب مرکزی استفاده شود. در ادامه ابتدا با عملگر تفاضل مرکزی آشنا می‌شویم.

تعریف ۸.۴ *عملگر تفاضل مرکزی که با δ نمایش داده می‌شود به صورت $\delta = E^{\frac{۱}{۲}} - E^{-\frac{۱}{۲}}$ بیان می‌شود. بنابراین $\delta f_i = f_{i+\frac{۱}{۲}} - f_{i-\frac{۱}{۲}}$ و برای هر k طبیعی تعریف می‌کنیم $\delta^{k+۱} f_i = \delta^k f_{i+\frac{۱}{۲}} - \delta^k f_{i-\frac{۱}{۲}}$؛ به عنوان مثال داریم*

$$\delta^۲ f_i = \delta f_{i+\frac{۱}{۲}} - \delta f_{i-\frac{۱}{۲}} = (f_{i+۱} - f_i) - (f_i - f_{i-۱}) = f_{i+۱} - ۲f_i + f_{i-۱}.$$

همچنین عملگر مقدار میانگین که با μ نمایش داده می‌شود به صورت $\mu = \frac{۱}{۲}(E^{\frac{۱}{۲}} + E^{-\frac{۱}{۲}})$ بیان می‌شود. بنابراین $\mu f_i = \frac{۱}{۲}(f_{i+\frac{۱}{۲}} + f_{i-\frac{۱}{۲}})$.

تمرین ۴.۴ *نشان دهید $f[x_i, x_{i+۱}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\delta^k f_{i+\frac{k}{۲}}}{k!h^k}$ که در آن $k \in \mathbb{N}$ و $i \in \mathbb{N}_۰ := \mathbb{N} \cup \{۰\}$.*

برای ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب مرکزی، فرض کنید نقاطی هم‌فاصله در اختیار داریم. $x_۰$ را نقطه‌ای نزدیک به x (در اواسط جدول) انتخاب کرده و نقاط واقع در بالای $x_۰$ را با $x_{-۱}$، $x_{-۲}$، ... و نقاط واقع در پایین آن را با $x_۱$، $x_۲$، ... اندیس‌گذاری می‌کنیم (به جدول ۲.۴ نگاه کنید).

اگر نقاط را به صورت $x_۰$، $x_۱$، $x_{-۱}$، $x_۲$، $x_{-۲}$، ... در نظر گرفته و چندجمله‌ای درون‌یاب را به کمک روش تفاضلات

x_i	f_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم
x_{-2}	f_{-2}				
		$\delta f_{-\frac{3}{2}}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$			
x_2	f_2				

جدول ۲.۴: جدول تفاضلات مرکزی

تقسیم‌شده نیوتن بنویسیم، آن‌گاه

$$\begin{aligned} p(x) = f_0 &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_{-1}] + \\ &(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})f[x_0,x_1,x_{-1},x_2] + \\ &(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})(x-x_2)f[x_0,x_1,x_{-1},x_2,x_{-2}] + \cdots . \end{aligned} \tag{2.4}$$

تفاضلات با مرتبه زوج را می‌توان به صورت $f[x_{-p},\dots,x_0,\dots,x_p]$ در نظر گرفت و با فرض $i=-p$ و $i+k=p$، به کمک تمرین ۴.۴ داریم $f[x_{-p},\dots,x_0,\dots,x_p] = \frac{\delta^{2p} f_0}{(2p)!h^{2p}}$. به طور مشابه برای تفاضلات با مرتبه فرد خواهیم داشت

$$f[x_{-p},\dots,x_0,\dots,x_p,x_{p+1}] = \frac{\delta^{2p+1} f_{\frac{1}{2}}}{(2p+1)!h^{2p+1}}, \qquad f[x_{-p-1},x_{-p},\dots,x_0,\dots,x_p] = \frac{\delta^{2p+1} f_{\frac{-1}{2}}}{(2p+1)!h^{2p+1}}.$$

پس از جای‌گذاری در (۲.۴) و با فرض $\theta = \frac{x-x_0}{h}$ می‌توان نوشت

$$p(x) = f_0 + \frac{\theta}{1!}\delta f_{\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)}{3!}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)(\theta-2)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots . \tag{3.4}$$

این رابطه بیان‌گر روش درون‌یابی پیشروی گاوس است. به طور مشابه، اگر نقاط را به صورت x_0، x_{-1}، x_1، x_{-2}، x_2، ... در نظر گرفته و چندجمله‌ای درون‌یاب را به کمک روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن بنویسیم، آن‌گاه خواهیم داشت

$$p(x) = f_0 + \frac{\theta}{1!}\delta f_{-\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta+1)(\theta-1)}{3!}\delta^3 f_{-\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta+1)(\theta-1)(\theta+2)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots \tag{4.4}$$

که به درون‌یاب پسروی گاوس معروف است. با میانگین گرفتن از روابط (۳.۴) و (۴.۴) رابطه زیر به دست می‌آید

$$p(x) = f_0 + \frac{\theta}{1!}\left(\frac{\delta f_{-\frac{1}{2}} + \delta f_{\frac{1}{2}}}{2}\right) + \frac{\theta^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta^2-1)}{3!}\left(\frac{\delta^3 f_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 f_{\frac{1}{2}}}{2}\right) + \frac{\theta^2(\theta^2-1)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots ,$$

x_i	f_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم	مرتبه پنجم
۰٫۵	۰٫۴۷۹۴۳					
		۰٫۱۶۴۷۹				
۰٫۷	۰٫۶۴۴۲۲		−۰٫۰۲۵۶۸			
		۰٫۱۳۹۱۱		−۰٫۰۰۵۵۵		
۰٫۹	۰٫۷۸۳۳۳		−۰٫۰۳۱۲۳		۰٫۰۰۱۲۵	
		۰٫۱۰۷۸۸		−۰٫۰۰۴۳۰		۰٫۰۰۰۱۶
۱٫۱	۰٫۸۹۱۲۱		−۰٫۰۳۵۵۳		۰٫۰۰۱۴۱	
		۰٫۰۷۲۳۵		−۰٫۰۰۲۸۹		
۱٫۳	۰٫۹۶۳۵۶		−۰٫۰۳۸۴۲			
		۰٫۰۳۳۹۳				
۱٫۵	۰٫۹۹۷۴۹					

جدول ۳.۴: جدول تفاضلات متناهی

که به درون‌یاب استرلینگ معروف است و می‌توان آن را به صورت زیر نیز بازنویسی کرد

$$p(x) = f_0 + \theta\mu\delta f_0 + \frac{\theta^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta^2-1)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{\theta^2(\theta^2-1)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots.$$

مثال ۷.۴ *۰٫۴۷۹۴۳، ۰٫۶۴۴۲۲، ۰٫۷۸۳۳۳، ۰٫۸۹۱۲۱، ۰٫۹۶۳۶۵ و ۰٫۹۹۷۴۹ مقادیر تابع f به ترتیب در نقاط ۰٫۵، ۰٫۷، ۰٫۹، ۱٫۱، ۱٫۳ و ۱٫۵ هستند. تقریبی برای $f(1.08)$ به دست می‌آوریم. ابتدا جدول تفاضلات ۳.۴ را ساخته سپس با انتخاب $x_0 = 1.1$ داریم $\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.08-1.1}{0.2} = -0.1$ و در نتیجه خواهیم داشت*

$$f(1.08) \simeq 0.89121 + \frac{-0.1}{1!}\left(\frac{0.10788+0.07235}{2}\right) + \frac{(-0.1)^2}{2!}(-0.03553) + \frac{-0.1((-0.1)^2-1)}{3!}\left(\frac{-0.00430-0.00289}{2}\right) + \frac{(-0.1)^2((-0.1)^2-1)}{4!}(0.00141).$$

پس $f(1.08) \simeq 0.89121 - 0.00901 - 0.00018 - 0.00006 - 0.0000006 = 0.8819594$ و بنابراین با دقت $4D$ خواهیم داشت $f(1.08) \simeq 0.8820$. △

تذکر ۶.۴ *اگر در داده‌های اولیه یعنی $f(x_0),\dots,f(x_n)$ خطایی به اندازه ε وجود داشته باشد، ممکن است در ستون بعدی جدول تفاضلات خطایی به اندازه 2ε و در ستون بعدی خطایی به اندازه 4ε تولید شود و به همین صورت در ستون‌های بعدی نیز رشد خطا داشته باشیم. بنابراین هنگام استفاده از جدول‌های تفاضلی، بهتر است تا آنجا که امکان دارد داده‌ها را با دقت بیشتری وارد کنیم.*

۴.۱.۴ خطای چندجمله‌ای درون‌یاب

در این بخش خطای چندجمله‌ای درون‌یاب بررسی می‌شود و به کمک چندجمله‌ای‌های چبیشف[1] کرانی کمینه برای آن به دست می‌آید.

[1] Chebyshev

قضیه ۷.۴ *فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط متمایز $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ باشد. اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$ آن‌گاه به ازای هر x در $[a,b]$ عدد $\xi(x)$ در (a,b) چنان وجود دارد که*

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

برهان. اگر به ازای مقداری از i داشته باشیم $x = x_i$، چون $p(x_i) = f(x_i)$ آن‌گاه رابطه داده‌شده به ازای هر $\xi(x_i)$ در (a,b) برقرار است. حال فرض کنید برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$ داشته باشیم $x \neq x_i$. برای هر t در $[a,b]$ تابع $g(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(t) = f(t) - p(t) - [f(x)-p(x)]\frac{(t-x_0)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)\cdots(x-x_n)} = f(t) - p(t) - [f(x)-p(x)]\prod_{k=0}^{n}\frac{t-x_k}{x-x_k}.$$

واضح است که $g \in C^{n+1}[a,b]$ زیرا $p \in C^{\infty}[a,b]$ و $f \in C^{n+1}[a,b]$ و به ازای $i = 0, 1, \ldots n$ داریم

$$g(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - [f(x)-p(x)]\prod_{k=0}^{n}\frac{x_i-x_k}{x-x_k} = 0 - [f(x)-p(x)] \times 0 = 0.$$

همین‌طور $g(x) = f(x) - p(x) - [f(x)-p(x)]\prod_{k=0}^{n}\frac{x-x_k}{x-x_k} = f(x)-p(x)-[f(x)-p(x)] = 0$. یعنی g در $n+2$ نقطه $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ صفر می‌شود و بنابر تعمیم قضیه رُل، $\xi(x)$ در $[a,b]$ وجود دارد که $g^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$، پس

$$0 = g^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - p^{(n+1)}(\xi(x)) - [f(x)-p(x)] \times \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{t-x_k}{x-x_k}\right)\Big|_{t=\xi(x)}.$$

اما p یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است و بنابراین مشتق مرتبه $n+1$ آن صفر است و از طرف دیگر

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{t-x_k}{x-x_k} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}t^{n+1} + (\text{جملاتی با درجه کمتر یا برابر } n \text{ نسبت به } t).$$

بنابراین $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{t-x_k}{x-x_k}\right)\Big|_{t=\xi(x)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}$. در نتیجه $0 = f^{(n+1)}(\xi(x)) - 0 - [f(x)-p(x)] \times \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}$ و یا $f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$. □

تذکر ۷.۴ *بنابر شرایط قضیه ۷.۴، به ازای هر x در $[a,b]$ داریم*

$$|f(x)-p(x)| \le \frac{M_1 M_2}{(n+1)!},$$

که در آن $M_1 = \max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$ و $M_2 = \max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$. واضح است که برای nهای بزرگ، یافتن M_2 مقدور نیست و در چنین حالتی از کران بدبینانه $M_2 \le (b-a)^{n+1}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۸.۴ *چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $y = f(x) = \cos(\frac{\pi x}{8})$ را در نقاط $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 3$ به دست آورده و سپس کران بالای خطای درون‌یابی را تعیین نموده و آن را با خطای واقعی در نقطه $x = 1$ مقایسه کنید (محاسبات را با سه رقم اعشار دنبال کنید).*

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
0	1		
		$\frac{0.707-1}{2-0} = -0.147$	
2	0.707		$\frac{-0.324+0.147}{3-0} = -0.059$
		$\frac{0.383-0.707}{3-2} = -0.324$	
3	0.383		

پس چندجمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر است

$$p(x) = 1 - 0.147x - 0.059x(x-2) = 1 - 0.029x - 0.059x^2.$$

چون $n = 2$ و $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{8})$ داریم

$$f'(x) = -\frac{\pi}{8}\sin(\frac{\pi x}{8}), \qquad f''(x) = -\frac{\pi^2}{64}\cos(\frac{\pi x}{8}), \qquad f'''(x) = \frac{\pi^3}{512}\sin(\frac{\pi x}{8}).$$

بنابراین

$$M_1 = \max_{0 \le x \le 3} |f'''(x)| = \frac{\pi^3}{512}|\sin(\frac{\pi x}{8})| \le \frac{\pi^3}{512} \simeq 0.061, \quad M_2 = \max_{0 \le x \le 3} |x(x-2)(x-3)| \le 3^3 = 27.$$

در نتیجه $|f(x) - p(x)| \le \frac{M_1 M_2}{6} \le \frac{0.061 \times 27}{6} = 0.273$. اما این کران بالای خطا بدبینانه است و در ادامه کران بالای واقع‌بینانه‌تری به دست می‌آوریم. چون تابع $y = \sin(\frac{\pi x}{8})$ در بازه $[0, 3]$ صعودی است!؟ پس داریم

$$M_1 = \max_{0 \le x \le 3} |f'''(x)| = \frac{\pi^3}{512} \max_{0 \le x \le 3} |\sin(\frac{\pi x}{8})| \le \frac{\pi^3}{512}|\sin(\frac{3\pi}{8})| \simeq 0.056.$$

هم‌چنین با فرض $g(t) = t(t-2)(t-3)$ داریم $g'(t) = 3t^2 - 10t + 6$ و بنابراین از $g'(t) = 0$ نتیجه می‌شود $t_1 = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$ و $t_2 = \frac{5-\sqrt{7}}{3}$. حال چون t_1 و t_2 به بازه $[0, 3]$ تعلق دارند، خواهیم داشت

$$M_2 = \max\{|g(0)|, |g(t_1)|, |g(t_2)|, |g(3)|\} = \{0, 2.113, 0.631, 0\} = 2.113.$$

پس

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{M_1 M_2}{6} \le \frac{0.056 \times 2.113}{6} = 0.020.$$

از طرفی داریم $|f(1) - p(1)| = |0.924 - 0.912| = 0.012 < 0.020 < 0.273$. △

تذکر ۸.۴ *اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ با روش تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن باشد، آن‌گاه*

چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط $x_0,\dots,x_n,t$ با همان روش به صورت زیر به دست می‌آید

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t](x - x_0)\cdots(x - x_n),$$

و چون $f(t) = q(t)$ بنابراین $f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t](t - x_0)\cdots(t - x_n)$ که با مقایسه با قضیه خطای چندجمله‌ای درون‌یاب خواهیم داشت $f[x_0, \dots, x_n, t] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!}$ و می‌توان نوشت $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

تمرین ۵.۴ *نشان دهید تحت شرایط قضیه ۷.۴ اگر نقاط هم‌فاصله باشند (با اندازه گام h) آن‌گاه به ازای هر x در $[a,b]$ داریم $|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_1 h^{n+1}}{4(n+1)}$.*

کمینه کردن خطای درون‌یابی

با توجه به خطای چندجمله‌ای درون‌یاب چنین به نظر می‌رسد که با افزایش n، خطای چندجمله‌ای درون‌یاب کاهش یابد و چندجمله‌ای درون‌یاب p به تابع f همگرا شود (نزدیک شود) ولی مثال زیر این مطلب را نقض می‌کند.

مثال ۹.۴ *(پدیده رانگ) خطای درون‌یابی تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ در نقاط هم‌فاصله متعلق به بازه $[-a,a]$ ($a > 5$) با افزایش تعداد نقاط بی‌کران می‌شود (برنامه* runge.nb *بررسی شود).* $\triangle$

در ادامه قصد داریم نشان دهیم که اگر انتخاب نقاط درون‌یابی در اختیار ما باشد، انتخاب مناسبی از $x_0,\dots,x_n$ وجود دارد که $\max|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|$ را کمینه می‌کند. این مسئله به مسئله اقل اکثر[2] معروف است.

تعریف ۹.۴ *چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند*

$$T_n : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], \qquad T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)).$$

اگر قرار دهیم $x = \cos(\theta)$ آن‌گاه $cos^{-1}(x) = \theta$ و بنابراین $T_n(x) = \cos(n\theta)$ و بنابر اتحاد مثلثاتی

$$\cos((n + 1)\theta) + \cos((n - 1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta),$$

خواهیم داشت

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \geq 1.$$

به کمک این رابطه بازگشتی مرتبه دو و مقادیر آغازی $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$ می‌توان T_nها را تعیین نمود. به عنوان مثال داریم

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

و

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x.$$

---

[2] Minimax problem

تمرین ۶.۴ *به کمک استقرا نشان دهید*

آ) T_n یک چندجمله‌ای درجه n با ضریب جمله پیشرو $۲^{n-۱}$ است؛

ب) اگر n زوج باشد T_n تابعی زوج و اگر n فرد باشد، T_n تابعی فرد است.

در ادامه قصد داریم ریشه‌ها و نقاط برگشت (اکسترمم‌های درونی) تابع T_n را به دست آوریم. اگر $T_n(x) = \cos(n\theta) = ۰$ آن‌گاه $n\theta = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و یا $\theta = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲n}$ که در آن $k = ۰, ۱, \dots, n-۱$. در نتیجه ریشه‌های T_n عبارتند از

$$x_k = \cos(\theta) = \cos(\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n}), \quad k = ۰, ۱, \dots, n-۱.$$

حال چون

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{d}{d\theta}\cos(n\theta)\frac{d\theta}{dx} = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)},$$

بنابراین در نقاط برگشت باید داشته باشیم $\sin(n\theta) = ۰$ که نتیجه می‌دهد $\theta = \frac{k\pi}{n}$ که در آن $k = ۱, ۲, \dots, n-۱$ و بلافاصله می‌توان نقاط برگشت T_n را به صورت زیر معرفی کرد

$$z_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), \quad k = ۱, ۲, \dots, n-۱.$$

هم‌چنین در نقاط انتهایی $x = -۱$ و $x = ۱$ یا $\theta = \pi$ و $\theta = ۰$، مقادیر T_n به ترتیب عبارتند از $(-۱)^n$ و ۱. بنابراین T_n در $n+۱$ نقطه زیر اکسترمم‌های خود را اختیار می‌کند

$$z_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), \quad k = ۰, ۱, \dots, n.$$

قضیه ۸.۴ *اگر $x_۰, \dots, x_n$ صفرهای $T_{n+۱}$ اختیار شوند آن‌گاه $\max\limits_{-۱\le x\le ۱}|(x-x_۰)(x-x_۱)\cdots(x-x_n)|$ کمترین مقدار را نسبت به انتخاب‌های مختلف $x_۰, \dots, x_n$ خواهد داشت که برابر $\frac{۱}{۲^n}$ است.*

برهان. به مرجع [۱] مراجعه شود. □

نتیجه ۱.۸.۴ *اگر p چندجمله‌ای درون‌یاب مبتنی بر صفرهای $T_{n+۱}$ برای تابع f باشد (نقاط درون‌یابی صفرهای $T_{n+۱}$ انتخاب شوند) آن‌گاه داریم*

$$\max_{-۱\le x\le ۱}|f(x)-p(x)| \le \frac{M_۱}{۲^n(n+۱)!}.$$

بنابراین برای آن دسته از توابع که $M_۱$ آن‌ها با سرعتی کمتر از $۲^n(n+۱)!$ افزایش یابد همگرایی چندجمله‌ای درون‌یاب به تابع f تضمین شده است.

مثال ۱۰.۴ *برنامه* chebyshev.nb *بررسی شود.* △

۵.۱.۴ درون‌یابی هموار اسپلاین

در بخش‌های قبل با روش‌های ساختن چندجمله‌ای درون‌یاب با درجه حداکثر n برای یک تابع دلخواه با مقادیر معلوم در $n+۱$ نقطه (گره) آشنا شدیم. رفتار نوسانی چندجمله‌ای‌های با درجه بالا و این خاصیت که هر تغییر کوچک

در بخش کوچکی از بازه می‌تواند تغییرات زیادی را روی کل بازه موجب شود، از محدودیت‌های این نوع درون‌یابی (سراسری[3]) به شمار می‌رود. روش دیگری که می‌توان برای به دست آوردن تابع درون‌یاب به کار برد آن است که بازه را به تعدادی زیربازه تقسیم نمود و در هر زیربازه یک چندجمله‌ای درون‌یاب ساخت. این نوع درون‌یابی به درون‌یابی موضعی[4] معروف است و تقریب با استفاده از چنین توابعی به تقریب با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای[5] شهرت دارد.

تعریف ۱۰.۴ *یک تابع اسپلاین درجه k ($k \in \mathbb{N}_0$) در نقاط $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ تابعی مانند s است به گونه‌ای که*

- *s در هر زیربازه $[x_j, x_{j+1}]$ یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر k باشد؛*
- *s در $[x_0, x_n]$ تا مشتق مرتبه $(k-1)$اُم پیوسته داشته باشد.*

در شکل ۲.۴ مشاهده می‌شود که اسپلاین درجه صفر پیوسته نیست حال آن که اسپلاین درجه یک پیوسته است ولی در گره‌ها شکستگی دارد (مشتق‌پذیر نیست). با درون‌یابی به وسیله اسپلاین درجه یک (قطعه‌ای خطی) در درس‌های مقدماتی آشنا می‌شویم (محاسبه دستی توابع مثلثاتی و لگاریتمی از روی جدول) و به دلیل سادگی در عمل زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که هموار کمی مورد نظر باشد.

شکل ۲.۴: اسپلاین‌های درجه صفر و یک

یکی از متداول‌ترین روش‌های درون‌یابی به صورت موضعی، درون‌یابی به وسیله اسپلاین درجه سه است زیرا این نوع توابع تا مشتق مرتبه دوم پیوسته دارند و این نوع هموار برای بسیاری از مقاصد مانند حل عددی معادلات دیفرانسیل و پردازش تصویر کافی است.

تعریف ۱۱.۴ *فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد و $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ افرازی از $[a,b]$ باشد. درون‌یاب اسپلاین مکعبی f تابعی مانند s با ضابطه*

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

است به طوری که در خواص زیر صدق کند

آ) برای $j = 0, 1, \ldots, n$ داشته باشیم $s(x_j) = f(x_j)$؛

[3] Global interpolation
[4] Local interpolation
[5] Piecewise polynomials

ب) s_j برای $j=0,1,\ldots,n-1$ یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر سه باشد؛

پ) برای $j=0,1,\cdots,n-2$ داشته باشیم؛

۱) $s_{j+1}(x_{j+1})=s_j(x_{j+1})$؛

۲) $s'_{j+1}(x_{j+1})=s'_j(x_{j+1})$؛

۳) $s''_{j+1}(x_{j+1})=s''_j(x_{j+1})$؛

ت) یکی از دو شرط زیر

۱) $s''(x_0)=s''(x_n)=0$ (شرط مرزی آزاد یا طبیعی)؛

۲) $s'(x_0)=f'(x_0)$ و $s'(x_n)=f'(x_n)$ (شرط مرزی مقید).

البته می‌توان شرایط مرزی دیگری نیز استفاده کرد ولی دو شرط منظور شده متداول‌تر و پرکاربردتر هستند. اگر از شرط مرزی آزاد استفاده شود عبارت «اسپلاین طبیعی» را به کار می‌بریم و اصطلاح «اسپلاین مقید» زمانی به کار برده می‌شود که از شرط مرزی مقید استفاده کرده باشیم و در این صورت علاوه بر مقادیر تابع در دو انتها به مقادیر (تقریبی) مشتق تابع در آن نقاط نیز نیاز است و این موجب می‌شود که در حالت کلی اسپلاین مقید در نزدیکی مرز (دو انتها) تقریب‌های بهتری به دست دهد. برای تعیین درون‌یاب اسپلاین مکعبی برای تابع معلوم f، باید تابع s صادق در خواص آ، ب و پ ساخته شود. به همین منظور به ازای $j=0,1,\ldots,n-1$ قرار دهید

$$s_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2+d_j(x-x_j)^3,$$

که در آن ضرایب a_j، b_j، c_j و d_j مجهول هستند. پس یک دستگاه با $4n$ مجهول و $4n=2+3(n-1)+n+1$ معادله داریم و برای حل آن ابتدا از شرط آ برای $j=0,\ldots,n-1$ داریم $s_j(x_j)=a_j=f(x_j)$. حال برای $j=0,\ldots,n-1$ قرار دهید $h_j=x_{j+1}-x_j$ و فرض کنید $a_n=f(x_n)$. از شرط پ۱ به ازای $j=0,\ldots,n-2$ نتیجه می‌شود

$$a_{j+1}=s_{j+1}(x_{j+1})=s_j(x_{j+1})=a_j+b_jh_j+c_jh_j^2+d_jh_j^3. \tag{۵.۴}$$

به طور مشابه با فرض $b_n=s'(x_n)$ از شرط پ۲ برای $j=0,1,\ldots,n-2$ خواهیم داشت

$$b_{j+1}=s'_{j+1}(x_{j+1})=s'_j(x_{j+1})=b_j+2c_jh_j+3d_jh_j^2. \tag{۶.۴}$$

در آخر با فرض $c_n=\frac{s''(x_n)}{2}$ از شرط پ۳ برای $j=0,1,\ldots,n-2$ نتیجه می‌شود

$$c_{j+1}=s''_{j+1}(x_{j+1})/2=s''_j(x_{j+1})/2=c_j+3d_jh_j. \tag{۷.۴}$$

اگر از رابطه (۷.۴)، d_j را به دست آورده و در روابط (۵.۴) و (۶.۴) قرار دهیم برای $j=0,1,\ldots,n-2$ داریم

$$a_{j+1}=a_j+b_jh_j+\frac{h_j^2}{3}(2c_j+c_{j+1}), \tag{۸.۴}$$

$$b_{j+1}=b_j+h_j(c_j+c_{j+1}). \tag{۹.۴}$$

از رابطه (۸.۴) می‌توان b_j را به صورت زیر به دست آورد

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}). \qquad (10.4)$$

با محاسبه b_j و b_{j+1} از (۱۰.۴) و قرار دادن در (۹.۴) با کاهش اندیس برای $j = 1, \dots, n-1$ خواهیم داشت

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}). \qquad (11.4)$$

اما (۱۱.۴) بیان‌گر دستگاهی با $n-1$ معادله و $n+1$ مجهول است و برای حل آن به دو معادله دیگر نیاز است.

قضیه ۹.۴ **(اسپلاین طبیعی)** *اگر f در نقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تعریف شده باشد آن‌گاه درون‌یاب اسپلاین طبیعی منحصر به فردی برای f در نقاط داده‌شده وجود دارد.*

برهان. شرایط مرزی طبیعی $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ دلالت دارند بر این که $0 = s''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0)$ و یا $c_0 = 0$ و $c_n = \frac{s''(x_n)}{2} = 0$. پس با توجه به (۱۱.۴) می‌توان دستگاهی به صورت $Ax = F$ ساخت که در آن

$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

و چون A ماتریسی غالب قطری اکید است این دستگاه جواب یکتا دارد. □

قضیه ۱۰.۴ **(اسپلاین مقید)** *اگر f در نقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تعریف شده باشد آن‌گاه درون‌یاب اسپلاین مقید منحصر به فردی برای f در نقاط داده‌شده وجود دارد.*

برهان. چون $f'(a) = s'(a) = s'(x_0) = b_0$ از (۱۰.۴) خواهیم داشت $f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$ و یا $2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$ و به طور مشابه داریم $f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n)$ که با استفاده از (۱۰.۴) با تغییر اندیس $j = n-1$ داریم

$$f'(b) = \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) - h_{n-1}(c_{n-1} - c_n),$$

و یا

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}).$$

پس با توجه به (۱۱.۴) می‌توان دستگاهی به صورت $Ax = F$ ساخت که در آن

$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix},$$

و

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

و چون A ماتریسی غالب قطری اکید است این دستگاه جواب یکتا دارد. □

قضیه ۱۱.۴ *فرض کنید* $f \in C^4[a,b]$ *و* $\max_{a \le x \le b}|f^{(4)}(x)| = M$. *اگر* s *درون‌یاب اسپلاین مقید* f *در نقاط* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *باشد آن‌گاه*

$$\max_{a \le x \le b}|f(x) - s(x)| \le \frac{5M}{384} \max_{0 \le j < n}(x_{j+1} - x_j)^4.$$

از حل دستگاه معادلات (۱۱.۴) c_jها به دست می‌آیند و سپس به کمک (۱۰.۴)، $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ و از (۷.۴)، $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ تعیین می‌شوند و در آخر چندجمله‌ای‌های درجه سوم $\{s_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ مشخص می‌شوند.

مثال ۱۱.۴ *برنامه* spline.nb *را بررسی کنید.* △

تمرین ۷.۴ *مقدارهای* a، b *و* c *را چنان بیابید که تابع زیر یک اسپلاین مکعبی در گره‌های ۰، ۱ و ۲ باشد.*

$$s(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2, & x \in [0, 1], \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

تمرین ۸.۴ *اسپلاین مکعبی طبیعی و مقید* $(f'(0) = 1,\ f'(\pi) = -1)$ *متناظر با جدول زیر را به دست آورید.*

x_i	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
f_i	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

۶.۱.۴ برون‌یابی و درون‌یابی وارون

در حالت کلی برای برون‌یابی ابزارهای پیشرفته‌تری نیاز است ولی برای برون‌یابی در نقاطی که نزدیک دو انتهای بازه داده شده $[a,b]$ باشند می‌توان از همان چندجمله‌ای درون‌یاب استفاده کرد و با توجه به مشکلات درون‌یابی باید توجه داشت که هرچه از دو انتها دور شویم اعتبار نتایج کمتر می‌شود. اما برای درون‌یابی وارون می‌توان از ابزارهای درون‌یابی به خوبی سود برد.

تعریف ۱۲.۴ (**مسئله درون‌یابی وارون**) *فرض کنید مقدار تابع f در $n+1$ نقطه $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ معلوم باشد. می‌خواهیم نقطه $\bar{x}$ متعلق به بازه $[x_0, x_n]$ را به گونه‌ای تعیین کنیم که مقدار تابع f در آن نقطه یعنی $f(\bar{x})$ معین باشد.*

در ادامه دو ایده برای حل این مسئله مطرح می‌گردد. ایده اول آن است که فرض کنید p چندجمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ باشد. با به کار بردن یکی از روش‌های فصل ریشه‌یابی مانند نیوتن یا تکرار ساده در حل معادله $p(\bar{x}) = f(\bar{x})$، تقریبی از $\bar{x}$ به دست می‌آید.

مثال ۱۲.۴ *با توجه به جدول داده شده مطلوب است مقدار $\bar{x}$ به قسمی که $\sinh(\bar{x}) = 5$.*

x_i	۱	۲	۳	۴
$\sinh(x_i)$	۱/۱۷۵۲	۳/۶۲۶۹	۱۰/۰۱۷۹	۲۷/۲۸۹۹

ابتدا جدولی به صورت

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۱/۱۷۵۲			
		۲/۴۵۱۷		
۲	۳/۶۲۶۹		۳/۹۳۹۳	
		۶/۳۹۱۰		۶/۹۴۱۷
۳	۱۰/۰۱۷۹		۱۰/۸۸۱۰	
		۱۷/۲۷۲۰		
۴	۲۷/۲۸۹۹			

ساخته و به کمک نتیجه ۱.۵.۴ می‌توان نوشت $p(\bar{x}) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0$ *که در آن با انتخاب $x_0 = 1$ داریم* $\theta = \frac{\bar{x}-x_0}{h} = \bar{x}-1$ *و در نتیجه*

$$p(\bar{x}) = 1/1752 + 2/4517(\bar{x}-1) + \frac{3/9393}{2}(\bar{x}-1)(\bar{x}-2) + \frac{6/9417}{6}(\bar{x}-1)(\bar{x}-2)(\bar{x}-3),$$

و یا $p(\bar{x}) = 1/1570\bar{x}^3 - 4/9721\bar{x}^2 + 9/2692\bar{x} - 4/2789$. *بنابراین $\bar{x}$ از حل معادله $p(\bar{x}) = 5$ به دست می‌آید. جدول زیر تکرارهای روش نیوتن را برای تابع* $g(t) = p(t) - 5 = 1/1570t^3 - 4/9721t^2 + 9/2692t - 9/2789$

نشان می‌دهد

n	۰	۱	۲	۳
t_n	۲٫۳	۲٫۳۳۸۹	۲٫۳۳۸۰	۲٫۳۳۸۰

پس با دقت $۳D$ *داریم* $\bar{x} = ۲٫۳۳۸$ و $g(۲٫۳۳۸) = ۰٫۰۰۰۰$ *اما* $\sinh(۲٫۳۳۸) - ۵ = ۰٫۱۳۲۰$!؟ $\triangle$

اما ایده دوم آن است که فرض کنید تابع $y = f(x)$ در بازه‌ای شامل x_iها وارون‌پذیر است و جدول زیر را در نظر بگیرید.

y_i	$y_۰$	$y_۱$	$\cdots$	y_n
x_i	$x_۰$	$x_۱$	$\cdots$	x_n

اگر $x = q(y)$ چندجمله‌ای درون‌یاب صادق در جدول باشد که با یکی از روش‌های درون‌یابی به دست آمده باشد آن‌گاه داریم $\bar{x} \simeq q(f(\bar{x}))$. یعنی $x = q(y)$ را به عنوان تقریبی از تابع وارون $y = f(x)$ می‌پذیریم.

مثال ۱۳.۴ *یک کاربرد جالب از درون‌یابی وارون در ریشه‌یابی است. تقریبی از ریشه تابعی که از آن تابع فقط اطلاعات زیر در دسترس است بیابید. سپس جواب خود را آزمایش کنید.*

$$f(۰) = -۱, \qquad f(۰٫۵) = -۰٫۳۷۷۶, \qquad f(۱) = ۰٫۴۵۹۷, \qquad f(۱٫۵) = ۱٫۴۲۹۳.$$

ابتدا جدول تفاضلات تقسیم‌شده را ساخته و از $f(\alpha) = ۰$ *داریم*

$$\alpha \simeq ۰ + ۰٫۸۰۳۳(۱) - ۰٫۱۴۱۲(۱)(۰٫۳۷۷۶) + ۰٫۰۳۹۶(۱)(۰٫۳۷۷۶)(-۰٫۴۵۹۷).$$

پس $\alpha \simeq ۰٫۷۴۳۱$.

f_i	x_i	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم
-۱	۰			
		$\frac{۰٫۵-۰}{-۰٫۳۷۷۶-(-۱)} = ۰٫۸۰۳۳$		
$-۰٫۳۷۷۶$	۰٫۵		$-۰٫۱۴۱۲$	
		$\frac{۱-۰٫۵}{۰٫۴۵۹۷-(-۰٫۳۷۷۶)} = ۰٫۵۹۷۲$		۰٫۰۳۹۶
۰٫۴۵۹۷	۱		$-۰٫۰۴۵۱$	
		$\frac{۱٫۵-۱}{۱٫۴۲۹۳-۰٫۴۵۹۷} = ۰٫۵۱۵۷$		
۱٫۴۲۹۳	۱٫۵			

برای آزمایش جواب به جدول زیر نیاز داریم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$
۰	-۱			
		۰/۶۲۲۴		
۰/۵	$-$۰/۳۷۷۶		۰/۲۱۴۹	
		۰/۸۳۷۳		$-$۰/۰۸۲۶
۱	۰/۴۵۹۷		۰/۱۳۲۳	
		۰/۹۶۹۶		
۱/۵	۱/۴۲۹۳			

به کمک نتیجه ۱.۵.۴ می‌توان نوشت

$$p(x) = f_۰ + \theta \Delta f_۰ + \frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰ + \frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰.$$

که در آن با انتخاب $x_۰ = ۰$ *داریم* $\theta = \frac{x-x_۰}{h} = \frac{۰/۷۴۳۱-۰}{۰/۵} = ۱/۴۸۶۲$ *و در نتیجه*

$$p(۰/۷۴۳۱) = -۱ + ۰/۶۲۲۴(۱/۴۸۶۲) + \frac{۰/۲۱۴۹}{۲}(۱/۴۸۶۲)(۰/۴۸۶۲) + \frac{-۰/۰۸۲۶}{۶}(۱/۴۸۶۲)(۰/۴۸۶۲)(-۰/۵۱۳۸),$$

و بنابراین $p(۰/۷۴۳۱) \simeq ۰/۰۰۷۸$ *که بیانگر آن است که* ۰/۷۴۳۱ *تقریبی از* α *است.* $\triangle$

۲.۴ تقریب

در فصل ۱ با چندجمله‌ای تیلور درجه n حول نقطه $x_۰$ آشنا شدیم که تقریب خوبی برای یک تابع $n+۱$ بار مشتق‌پذیر در همسایگی کوچکی از $x_۰$ است. از چندجمله‌ای درون‌یاب نیز می‌توان به عنوان تقریبی از یک تابع استفاده نمود ولی این چندجمله‌ای فقط در نقاط معلوم دقیق است (صرف نظر از خطای گرد کردن) و در سایر نقاط ممکن است حتی جوابی دور از انتظار تولید کند. در این فصل، قصد داریم یک چندجمله‌ای بسازیم که تقریب مناسبی! برای یک تابع مجهول (معلوم) باشد. در اینجا با یکی از دو مسئله کلی زیر مواجه هستیم

- در جستجوی تابعی (چندجمله‌ای) هستیم که برای داده‌های یک جدول مناسب! باشد؛
- تابعی با ضابطه پیچیده در دسترس است و می‌خواهیم به جای کار کردن با آن، از نوع ساده‌تری از توابع مانند چندجمله‌ای‌ها استفاده کنیم که تقریب مناسبی! برای تابع باشد.

۱.۲.۴ تقریب کم‌ترین مربعات گسسته

فرض کنید از تابع f فقط داده‌های جدولی

x_i	x_1	$\cdots$	x_m
f_i	f_1	$\cdots$	f_m

در دسترس باشد و بخواهیم چندجمله‌ای $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ را چنان بیابیم که تقریب مناسبی برای تابع نامعلوم f باشد. برای مفهوم دادن به واژه «تقریب مناسب»، ابتدا به نظر می‌رسد باید ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ را به گونه‌ای یافت که عبارت

$$E_\infty(a_0, \ldots, a_n) = \max_{1 \le k \le m} |f_k - p_n(x_k)|$$

کمینه شود. این مسئله از نوع اقل‌اکثر بوده و در اینجا قادر به حل آن نخواهیم بود. ایده دیگری که به ذهن می‌رسد آن است که برای تعیین ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ تابع

$$E_1(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{m} |f_k - p_n(x_k)|$$

کمینه شود و به همین منظور بنابر آن چه که از حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم باید عبارت $\frac{\partial E_1}{\partial a_i}$ را یافته و برابر صفر قرار دهیم که مشکلات مشتق‌پذیری تابع قدرمطلق مانع از ادامه کار می‌گردد. اما می‌توان برای تعیین ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ تابع

$$E_2(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{m} (f_k - p_n(x_k))^2$$

را کمینه کرد. این مسئله به مسئله کم‌ترین مربعات[۶] گسسته معروف است و برای حل آن برای $i = 0, 1, \ldots, n$ باید داشته باشیم $\frac{\partial E_2}{\partial a_i} = 0$ و در نتیجه

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^{m} \left(f_k - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j \right)^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial a_i} \left(f_k - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j \right)^2$$

و یا $-2 \sum_{k=1}^{m} x_k^i \left(f_k - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j \right) = 0$ و از آن جا

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j} \right) a_j = \sum_{k=1}^{m} f_k x_k^i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

این دستگاه $(n+1) \times (n+1)$ به دستگاه معادلات نرمال معروف است و از حل آن ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ به دست می‌آیند. می‌توان با قرار دادن $\alpha = [a_i]_{(n+1)\times 1}$ و برای $i, j = 0, 1, \ldots, n$

$$\beta = [\beta_i]_{(n+1)\times 1}, \quad \beta_i = \sum_{k=1}^{m} f_k x_k^i, \qquad S = [s_{ij}]_{(n+1)\times(n+1)}, \qquad s_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j},$$

---

[۶] least squares

دستگاه معادلات نرمال را به صورت $S\alpha = \beta$ (ثابت می‌شود جواب یکتا دارد) و یا به شکل گسترده زیر نیز بیان کرد

$$\begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdots & s_{0n} \\ s_{10} & s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{n0} & s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

مثال ۱۴.۴ *یک چندجمله‌ای درجه دو (سهمی) مناسب داده‌های جدولی زیر بسازید.*

x_i	۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰
f_i	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳

دراینجا $m = ۵$ و $n = ۲$ و دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است

$$\begin{aligned} ۵a_0 &+ ۲/۵a_1 + ۱/۸۷۵a_2 = ۸/۷۶۸۰ \\ ۲/۵a_0 &+ ۱/۸۷۵a_1 + ۱/۵۶۲۵a_2 = ۵/۴۵۱۴ \\ ۱/۸۷۵a_0 &+ ۱/۵۶۲۵a_1 + ۱/۳۸۲۸a_2 = ۴/۴۰۱۵ \end{aligned}$$

و از حل آن داریم $a_0 = ۱/۰۰۵۱$، $a_1 = ۰/۸۶۴۶۸$ و $a_2 = ۰/۸۴۳۱۶$. پس چندجمله‌ای درجه دو تقریب به صورت $p_2(x) = ۰/۸۴۳۱۶x^2 + ۰/۸۶۴۶۸x + ۱/۰۰۵۱$ است و به کمک جدول

x_k	۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰
f_k	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳
$p_2(x_k)$	۱/۰۰۵۱	۱/۲۷۴۰	۱/۶۴۸۲	۲/۱۲۷۹	۲/۷۱۲۹
$f_k - p_2(x_k)$	−۰/۰۰۵۱	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۴	−۰/۰۱۰۹	۰/۰۰۵۴

خواهیم داشت $E_2 = \sum_{k=1}^{5}(f_k - p_2(x_k))^2 = ۲/۷۴ \times ۱۰^{-۴}$ و از آنجا خطا عبارت است از $\sqrt{E_2} \simeq ۰/۰۲$. △

مثال ۱۵.۴ *برنامه* dls.nb *بررسی شود.* △

تذکر ۹.۴ *درتقریب کمترین مربعات غیرخطی، اگر راه‌کار مطرح‌شده دنبال شود واضح است که با یک دستگاه غیرخطی مواجه می‌شویم. بعضی مواقع مانند موارد زیر*

$$y = ax^3 + b, \quad y = ax^3 + bx^2, \quad y = ae^{bx}, \quad y = \frac{a}{bx + c}, \quad y = \frac{ax^2}{bx^2 + c}, \quad y = a\cos x + b,$$

با تغییر متغیرهای مناسب می‌توان مسئله تقریب کمترین مربعات غیرخطی را به مسئله کمترین مربعات خطی تبدیل کرد.

مثال ۱۶.۴ *برای یافتن تابعی به یکی از شکل‌های زیر، مناسب داده‌های (x_i, y_i) راه‌کار ارایه دهید.*

$$y = ae^{bx}, \qquad y = ax^4 + bx^2.$$

برای مورد $y = ae^{bx}$ *داریم* $\ln y = \ln(ae^{bx})$ *و یا* $\ln y = \ln a + bx$ *و با تغییر متغیرهای* $Y = \ln y$ *و* $A = \ln a$ *کافی است خط* $Y = A + bx$ *را چنان یافت که مناسب داده‌های* $(x_i, \ln y_i)$ *باشد و در آخر قرار دهیم* $a = e^A$*. برای مورد* $y = ax^۴ + bx^۲$ *داریم* $\frac{y}{x^۲} = ax^۲ + b$ *و با تغییر متغیرهای* $Y = \frac{y}{x^۲}$ *و* $X = x^۲$ *کافی است خط* $Y = aX + b$ *را چنان یافت که مناسب داده‌های* $\left(x_i^۲, \frac{y_i}{x_i^۲}\right)$ *باشد.* △

۲.۲.۴ تقریب کم‌ترین مربعات پیوسته

فرض کنید تابع $f \in C[a,b]$ در دسترس باشد و قصد داشته باشیم چندجمله‌ای $p_n(x) = a_nx^n + \cdots + a_۱x + a_۰$ را چنان بیابیم که

$$E_۲(a_۰, \ldots, a_n) = \int_a^b (f(x) - p_n(x))^۲ dx$$

کمینه شود. این مسئله به مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته معروف است و برای تعیین ضرایب $a_۰, \ldots, a_n$ باید برای $i = ۰, ۱, \ldots, n$ داشته باشیم $\frac{\partial E_۲}{\partial a_i} = ۰$ و در نتیجه

$$۰ = \frac{\partial E_۲}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{j=۰}^n a_jx^j\right)^۲ dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_i} \left(f(x) - \sum_{j=۰}^n a_jx^j\right)^۲ dx$$

و یا $-۲\int_a^b x^i \left(f(x) - \sum_{j=۰}^n a_jx^j\right) dx = ۰$ و از آن‌جا

$$\sum_{j=۰}^n \left(\int_a^b x^{i+j} dx\right) a_j = \int_a^b f(x)x^i dx, \qquad i = ۰, ۱, \cdots, n$$

این دستگاه $(n+۱) \times (n+۱)$ به دستگاه معادلات نرمال معروف است (ثابت می‌شود جواب یکتا دارد) و از حل آن ضرایب $a_۰, \ldots, a_n$ به دست می‌آیند. می‌توان با قرار دادن $\alpha = [a_i]_{(n+۱)\times ۱}$ و برای $i, j = ۰, ۱, \ldots, n$

$$\beta = [\beta_i]_{(n+۱)\times۱}, \quad \beta_i = \int_a^b f(x)x^i dx, \qquad S = [s_{ij}]_{(n+۱)\times(n+۱)}, \quad s_{ij} = \int_a^b x^{i+j} dx = \frac{b^{i+j+۱} - a^{i+j+۱}}{i+j+۱}$$

این دستگاه را به صورت $S\alpha = \beta$ و یا به شکل گسترده زیر نیز بیان نمود

$$\begin{bmatrix} s_{۰۰} & s_{۰۱} & \cdots & s_{۰n} \\ s_{۱۰} & s_{۱۱} & \cdots & s_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{n۰} & s_{n۱} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_۰ \\ \beta_۱ \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

مثال ۱۷.۴ *می‌خواهیم تقریب کم‌ترین مربعات درجه دو (سهمی) تابع* $f(x) = \sin \pi x$ *را روی بازه* $[۰, ۱]$ *مشخص*

کنیم. دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_0 &+& \frac{1}{2}a_1 &+& \frac{1}{3}a_2 &=& \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 &+& \frac{1}{3}a_1 &+& \frac{1}{4}a_2 &=& \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 &+& \frac{1}{4}a_1 &+& \frac{1}{5}a_2 &=& \frac{\pi^2-4}{\pi^3} \end{array}$$

و از حل آن داریم $a_0 = \frac{12\pi^2-120}{\pi^3} \simeq -0/050465$ *و* $a_1 = -a_2 = \frac{720-60\pi^2}{\pi^3} \simeq 4/12251$*. چندجمله‌ای درجه دوتقریب* $p_2(x) = -4/12251x^2 + 4/12251x - 0/050465$ *است و* $E_2 = \int_0^1 (f(x)-p_2(x))^2 dx \simeq 0/0003$ *و از آنجا خطایی به اندازه* $\sqrt{E_2} \simeq 0/02$ *داریم.* △

مثال ۱۸.۴ *برنامه* cls.nb *بررسی شود.* △

در حل مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته اگر $a = 0$ و $b = 1$ آن‌گاه S ماتریس بدوضع هیلبرت می‌شود (برنامه hilbert.nb را ببینید). در ادامه قصد داریم مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته را طوری دنبال کنیم که با ماتریس هیلبرت مواجه نشویم.

تعریف ۱۳.۴ *تابع انتگرال‌پذیر* w *را روی بازه* I *تابع وزنی*[۷] *نامند اگر به ازای هر* x *در* I *داشته باشیم* $w(x) \geq 0$ *و در هر زیربازه از* I*،* w *متحد صفر نباشد. به عنوان مثال* $w(x) = 1 - x^2$ *بر بازه* $[-1, 1]$ *تابع وزنی است.*

تعریف ۱۴.۴ *فرض کنید* $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ *معرف یک مجموعه مستقل خطی از توابع و* w *یک تابع وزنی بر بازه* $[a, b]$ *باشد و هم‌چنین* $f \in C[a, b]$*. مسئله یافتن*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x) \tag{۱۲.۴}$$

به گونه‌ای که تابع $E_w(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b w(x)(f(x) - p(x))^2 dx$ *کمینه شود، به مسئله کم‌ترین مربعات وزن‌دار*[۸] *معروف است. مسئله کم‌ترین مربعات پیوسته حالت خاصی از مسئله کم‌ترین مربعات وزن‌دار است که در آن* $w(x) = 1$ *و برای* $j = 0, 1, \dots, n$*،* $\phi_j(x) = x^j$.

برای تعیین ضرایب $a_0, \dots, a_n$، برای $i = 0, 1, \dots, n$ باید داشته باشیم $\frac{\partial E_w}{\partial a_i} = 0$ و در نتیجه

$$0 = \frac{\partial E_w}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b w(x) \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x) \right)^2 dx = \int_a^b w(x) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x) \right)^2 dx$$

و یا $-2\int_a^b w(x)\phi_i(x) \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x) \right) dx = 0$ و از آن‌جا

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b w(x)\phi_i(x)\phi_j(x) dx \right) a_j = \int_a^b w(x) f(x) \phi_i(x) dx, \qquad i = 0, 1, \dots, n. \tag{۱۳.۴}$$

---

[۷] weight function

[۸] weighted least squares

تعریف ۱۵.۴ مجموعه توابع $\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزنی w متعامد[9] نامیده می‌شوند اگر

$$\int_a^b w(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \alpha_i>0, & i=j,\end{cases}$$

و اگر به ازای هر $i=0,1,\ldots,n$، $\alpha_i=1$ آن‌گاه مجموعه توابع را متعامدیکه[10] نامند.

تمرین ۹.۴ چندجمله‌ای‌های چبیشف بر بازه $[-1,1]$ نسبت به تابع وزنی $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ متعامد هستند و

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \frac{\pi}{2}, & i=j\neq 0,\\ \pi, & i=j=0.\end{cases}$$

قضیه ۱۲.۴ اگر مجموعه توابع $\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ بر بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزنی w متعامد باشند آن‌گاه ضرایب $a_0,\ldots,a_n$ در (۱۲.۴) به صورت زیر به دست می‌آیند

$$a_i=\frac{\int_a^b w(x)\phi_i(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)(\phi_i(x))^2dx},\qquad i=0,1,\ldots,n.$$

تعریف ۱۶.۴ مجموعه توابع $\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{2n}\}$ که در آن $\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ و

$$\phi_{2k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\quad \phi_{2k-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\qquad k=1,\ldots,n$$

بر بازه $[-\pi,\pi)$ نسبت به تابع وزنی $w(x)=1$ متعامد یکه هستند (بررسی کنید). تقریب کم‌ترین مربعات وزن‌دار تقریب مثلثاتی یا تقریب فوریه هر تابع $f\in C[-\pi,\pi)$ به صورت $p(x)=\sum_{j=0}^{2n}a_j\phi_j(x)$ است که در آن

$$a_j=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\phi_j(x)dx,\qquad j=0,1,\ldots,2n.$$

اگر $n\to\infty$ آن‌گاه p به یک سری تبدیل می‌شود که به سری فوریه تابع f بر بازه $[-\pi,\pi)$ معروف است و برای توصیف جواب معادله‌های دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای ابزار مفیدی است.

مثال ۱۹.۴ سری فوریه تابع $f(x)=e^x$ بر بازه $[-\pi,\pi)$ عبارت است از

$$e^x=\frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx-k\sin kx)\right).$$

در واقع $a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sinh\pi$، $a_{2k}=\frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(1+k^2)}\sinh\pi$ و $a_{2k-1}=\frac{2k(-1)^{k+1}}{\sqrt{\pi}(1+k^2)}\sinh\pi$. برنامه fourier.nb بررسی شود. △

---
[9] orthogonal
[10] orthonormal

۳.۴ تمرین‌ها

۱. فرض کنید $x_۰, x_۱, \dots, x_n$ نقاط متمایز باشند و برای هر $۰ \leq i \leq n$ داشته باشیم $\alpha_i = \prod_{j=۰, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)$ ثابت کنید $\sum_{i=۰}^{n} \frac{x_i^n}{\alpha_i} = ۱$.

۲. اگر Q یک چندجمله‌ای از درجه k باشد و $۰ \leq k \leq n$ ، ثابت کنید $\sum_{i=k}^{n} Q(x_i) L_i x = Q(x)$. ($L_i(x)$ها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ متناظر با نقاط $x_۰$ تا x_n هستند.)

۳. فرض کنید $x_۰, \dots, x_n$ نقاط متمایز باشند. نشان دهید $\sum_{i=۰}^{n} x_i^{n+۱} L_i(۰) = (-۱)^n \prod_{i=۰}^{n} x_i$. ($L_i(x)$ نشان‌دهنده چندجمله‌ای‌های لاگرانژ است.)

۴. نشان دهید مجموعه $\{L_۰(x), L_۱(x), \dots, L_n(x)\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی است.

۵. دو حکم زیر را اثبات کنید:

الف) تفاضلات تقسیم شده نیوتن نسبت به متغیرها متقارن است. یعنی اگر $(i_۰, \dots, i_n)$ جایگشتی از $(۰, \dots, n)$ باشد، آن‌گاه $f[x_۰, \dots, x_n] = f[x_{i_۰}, \dots, x_{i_n}]$.

ب) اگر f یک چندجمله‌ای درجه N باشد آن‌گاه برای $k > N$ داریم $f[x_۰, \dots, x_k] = ۰$.

۶. اگر $f(x) = \frac{۱}{x+c}$ که c ثابت است، نشان دهید

$$f[x_۰, \dots, x_n] = \frac{(-۱)^n}{(x_۰ + c)\cdots(x_n + c)}.$$

۷. اگر $f(x) = g(x) \cdot h(x)$، نشان دهید

$$f[x_۰, \dots, x_k] = \sum_{i=۰}^{k} g[x_۰, \dots, x_i] \cdot h[x_i, \dots, x_k].$$

۸. کدامیک از توابع زیر اسپلاین هستند؟

$$S(x) = \begin{cases} x, & ۰ \leq x < ۱, \\ ۳ - ۲x, & ۱ \leq x < ۳, \end{cases} \qquad S(x) = \begin{cases} x^۲, & ۰ \leq x < ۲, \\ ۶ + ۲(x-۲)^۲ + ۳(x-۲)^۲, & ۲ \leq x < ۳, \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} ۷(x-۲)^۲ + ۲(x-۱)^۳, & ۰ \leq x < ۱, \\ ۷(x-۲)^۲, & ۱ \leq x < ۳, \\ ۷(x-۲)^۲ - ۳(x-۳)^۳, & ۳ \leq x < ۴, \end{cases}$$

۹. فرض کنید اسپلاین مکعبی طبیعی S تابع f را در نقاط $f(-۱) = ۰, f(۰) = ۱, f(۱) = ۰$ درونیابی کند. مقدار $C_۱ = \frac{۱}{۶} S''(x_۱)$ را به دست آورید. همچنین مقدار $S(\frac{۱}{۲})$ را حساب کنید.