فصل ۳

ریشه‌یابی

هدف از این فصل یافتن ریشه معادله $f(x) = 0$ (صفر تابع f) است، یعنی α را به گونه‌ای می‌یابیم که داشته باشیم $f(\alpha) = 0$. در حالت کلی هیچ روش تحلیلی برای یافتن α زمانی که f یک چندجمله‌ای درجه پنج یا بالاتر باشد وجود ندارد. به عنوان مثال برای معادلات ساده‌ای مانند $x^5 - x^3 - 1 = 0$ روش حل تحلیلی وجود ندارد. هم‌چنین برای دسته بزرگی از معادلات که f شامل توابع متعالی باشد یا روش حل تحلیلی موجود نیست یا پیچیده است. به عنوان نمونه برای معادله ساده $x + \cos x = 0$ روش حل تحلیلی وجود ندارد. پس در این حالت‌ها روش‌های عددی را به کار گرفته و به کمک آن‌ها جوابی تقریبی برای معادله می‌یابیم.

۱.۳ بررسی کمّی ریشه‌ها

در این بخش قصد داریم وجود و تعداد ریشه‌های یک معادله داده‌شده را مورد بررسی قرار دهیم. در این راستا نه تنها می‌توان از آن دسته از قضایای ریاضیات عمومی که به بررسی رفتار تابع می‌پردازند (قضایای مربوط به اکسترمم‌ها) بهره برد بلکه قضیه بولتسانو (حالت خاصی از قضیه مقدار میانی) یک قضیه کلیدی است.

قضیه ۱.۳ (بولتسانو) *اگر f تابعی پیوسته در $[a,b]$ باشد و $f(a)f(b) < 0$، آن‌گاه معادله $f(x) = 0$ دست کم یک ریشه در (a,b) دارد و اگر f بر $[a,b]$ یکنوا (صعودی یا نزولی اکید) باشد آن ریشه منحصر به فرد است.*

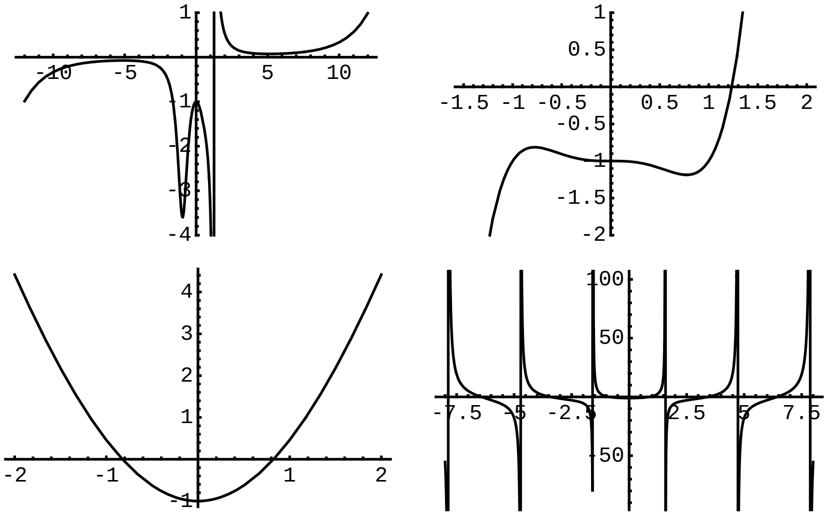
در این راستا با دو مسئله اساسی مواجه هستیم که عبارتند از

۱. یافتن بازه $[a,b]$ (تا آن جا که ممکن است کوچک) شامل فقط یک ریشه؛

۲. یافتن ریشه با دقت مطلوب با استفاده از یک روش با مرتبه همگرایی رضایت‌بخش.

برای بررسی مورد اول از ابزارهای زیر استفاده می‌کنیم

- بررسی رفتار تابع (رسم نمودار تابع)؛
- جدول‌بندی مقادیر تابع؛
- استفاده از قضایای ریاضی.



شکل ۱.۳: بررسی تعدد ریشه‌ها به کمک رسم

مثال ۱.۳ *معادله $\frac{3\cosh x - 2\cos x}{x^5 - x^3 - 1} = 0$ ریشه ندارد (شکل ۱.۳ سمت چپ بالا) در حالی که معادله $x^5 - x^3 - 1 = 0$ فقط یک ریشه در بازه $[1,2]$ دارد (شکل ۱.۳ سمت راست بالا). هم‌چنین معادله $x^2 - \cos x = 0$ دو ریشه قرینه (شکل ۱.۳ سمت چپ پایین) و معادله $x\tan x - 1 = 0$ بی‌نهایت ریشه مثبت و منفی دارد (شکل ۱.۳ سمت راست پایین).* △

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-۱۰	-۹۹۰۰۱	۰	-۱	۱٫۲۰	-۰٫۲۳۹۶۸	۱٫۲۲۰	-۰٫۱۱۳۱۴
-۸	-۳۲۲۵۷	۰٫۲	-۱٫۰۰۷۶۸	۱٫۲۲	-۰٫۱۱۳۱۴	۱٫۲۲۲	-۰٫۰۹۹۸۵۹
-۶	-۷۵۶۱	۰٫۴	-۱٫۰۵۳۷۶	۱٫۲۴	۰٫۰۲۵۰۰۱	۱٫۲۲۴	-۰٫۰۸۶۴۶۱۱
-۴	-۹۶۱	۰٫۶	-۱٫۱۳۸۲۴	۱٫۲۶	۰٫۱۷۵۴۲۱	۱٫۲۲۶	-۰٫۰۷۲۹۴۶
-۲	-۲۵	۰٫۸	-۱٫۱۸۴۳۲	۱٫۲۸	۰٫۳۳۸۸۲۲	۱٫۲۲۸	-۰٫۰۵۹۳۱۳
۰	-۱	۱٫۰	-۱	۱٫۳۰	۰٫۵۱۵۹۳	۱٫۲۳۰	-۰٫۰۴۵۵۶۱۳
۲	۲۳	۱٫۲	-۰٫۲۳۹۶۸	۱٫۳۲	۰٫۷۰۷۴۹۶	۱٫۲۳۲	-۰٫۰۳۱۶۹۰۳
۴	۹۵۹	۱٫۴	۱٫۶۳۴۲۴	۱٫۳۴	۰٫۹۱۴۲۹۶	۱٫۲۳۴	-۰٫۰۱۷۶۹۹۲
۶	۷۵۵۹	۱٫۶	۵٫۳۸۹۷۶	۱٫۳۶	۱٫۱۳۷۶۸۳	۱٫۲۳۶	-۰٫۰۰۳۵۸۷۴
۸	۳۲۲۵۵	۱٫۸	۱۲٫۰۶۳۷۰	۱٫۳۸	۱٫۳۷۶۸۳	۱٫۲۳۸	۰٫۰۱۰۶۴۵۸
۱۰	۹۸۹۹۹	۲٫۰	۲۳٫۰۰۰۰۰	۱٫۴۰	۱٫۶۳۴۲۴	۱٫۲۴۰	۰٫۰۲۵۰۰۱۱

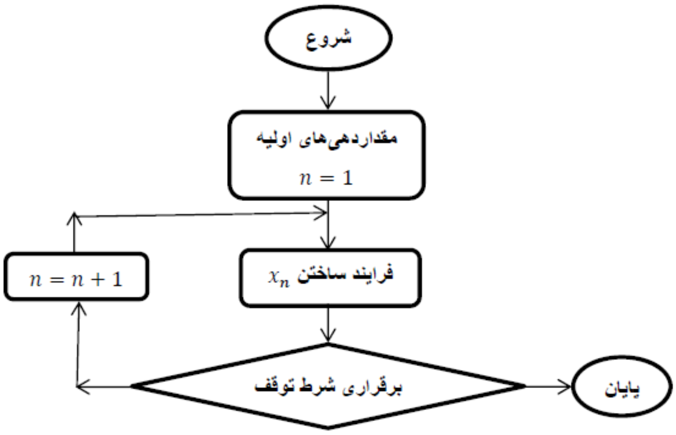
جدول ۱.۳: جدول‌بندی مقادیر تابع $f(x) = x^5 - x^3 - 1$

مثال ۲.۳ *با انتخاب a و b مناسب و $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $h = \frac{b-a}{n}$ و با $x_0 = a$ برای $i = 0, \ldots, n$ تعریف می‌کنیم $x_i = x_0 + ih$ و جدولی از مقادیر تابع f در نقاط $x_0, \ldots, x_n$ ساخته، سپس از قضیه بولتسانو کمک گرفته و از $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ نتیجه می‌گیریم f حداقل یک ریشه در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ دارد. جدول ۱.۳ را برای تابع $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ با انتخاب $a = -10$، $b = 10$ و $n = 10$ می‌سازیم. بنابراین $1.236 \le \alpha \le 1.238$ و در*

نتیجه با دقت ۲D *داریم* $\alpha = ۱/۲۴$. △

تذکر ۱.۳ *روش به کار رفته در مثال ۲.۳ برای توابعی که نزدیک ریشه رفتار پیچیده‌ای دارند مناسب نبوده و کارایی ندارد.*

مثال ۳.۳ *بدون رسم و جدول‌بندی ثابت می‌کنیم* $f(x) = x^۲ - (۱ - x)^۵$ *فقط یک ریشه دارد. به کمک آزمون سعی و خطا داریم* $f(۰) = -۱$ *و* $f(۱) = ۱$. *پس دست کم یک ریشه در بازه* $[۰, ۱]$ *موجود است. از طرفی* $f'(x) = ۲x + ۵(۱ - x)^۴$ *و اگر* $x \geq ۰$ *آن‌گاه* $f'(x) > ۰$ *و بنابراین* f *در* $[۰, \infty)$ *صعودی است. هم‌چنین* $f(x) = x^۵ - ۵x^۴ + ۱۰x^۳ - ۹x^۲ + ۵x - ۱$ *و از این که ضرایب توان‌های زوج منفی و ضرایب توان‌های فرد مثبت است نتیجه می‌گیریم که اگر* $x < ۰$ *آن‌گاه* $f(x) < ۰$ *و این یعنی* f *ریشه‌ای در* $(-\infty, ۰)$ *ندارد.* △



شکل ۲.۳: طرح کلی روش‌های تکراری

۲.۳ روش‌های عددی

به منظور بررسی دومین مسئله اساسی بیان‌شده در ابتدای فصل، روش‌های عددی برای حل مسئله ریشه‌یابی را مرور می‌کنیم. بیشتر روش‌های عددی، ساختاری تکراری دارند و به همین دلیل به آن‌ها روش‌های تکراری نیز گفته می‌شود. یک روش تکراری دنباله $\{x_n\}$ را تولید می‌کند که امیدواریم به α (صفر f) همگرا باشد. همان‌طور که در طرح کلی روش‌های تکراری آمده در شکل ۲.۳ مشاهده می‌کنید یک گام اساسی در این روش‌ها شرط توقف است که برای مسئله ریشه‌یابی انواع آن عبارتند از

۱) $|x_n - \alpha| < \epsilon$؛ ۲) $|f(x_n)| < \epsilon$؛ ۳) $|x_n - x_{n-۱}| < \epsilon$؛ ۴) تعیین بیش‌ترین تعداد تکرار؛

۵) $\frac{|x_n - x_{n-۱}|}{|x_n|} < \epsilon$ (زمانی که ریشه خیلی کوچک یا بزرگ باشد)؛ ۶) استفاده از کران بالای خطا[۱].

تذکر ۲.۳ *در عمل زمانی از اولین مورد استفاده می‌کنیم که به* α *دسترسی داشته باشیم. اگر کران بالای خطا در دسترس باشد، مطمئن‌ترین شرط توقف مورد ششم است.*

[۱] Upper error bound

تذکر ۳.۳ *برقراری نابرابری* $|f(x_n)| < \epsilon$ *برقراری نابرابری* $|x_n - \alpha| < \epsilon$ *را تضمین نمی‌کند. به عنوان مثال، صفر تابع* $f(x) = \tan^{-۱} x - ۱/۵۵$ *با دقت* $۳D$ *عبارت است از* $۴۸/۰۷۹$ *(رادیان). از طرفی داریم* $f(۵۰) \simeq ۸ \times ۱۰^{-۴}$ *در حالی که* $۵۰ - ۴۸/۰۷۹ = ۱/۹۲۱$.

تذکر ۴.۳ *اگر* $|x_n - x_{n-۱}| < \epsilon$ *برقرار باشد لزومی ندارد* $|x_n - \alpha| < \epsilon$ *برقرار باشد زیرا اگر* $\lim x_n = \alpha$ *آن‌گاه* $\lim |x_n - x_{n-۱}| = ۰$ *ولی عکس این مطلب درست نیست. به عنوان نمونه دنباله* $x_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}$ *واگرا است حال آن که داریم* $|x_n - x_{n-۱}| = \frac{۱}{n}$.

۱.۲.۳ روش دوبخشی

روش دوبخشی[۲] به روش نصف کردن، تنصیف و نیم‌سازی نیز شهرت دارد. ایده اصلی این روش آن است که، پس از حصول اطمینان از وجود ریشه منحصر به فرد در بازه $[a, b]$، بازه را نصف کرده و (به کمک قضیه بولتسانو) نیم‌بازه‌ای که ریشه در آن وجود ندارد را کنار گذاشته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. به شکل ۳.۳ و الگوریتم ۱.۳ توجه کنید.

شکل ۳.۳: بررسی روش دوبخشی به کمک رسم

الگوریتم ۱.۳ الگوریتم روش دوبخشی.

- **ورودی.** a, b, ϵ, f *با این فرض که تابع* f *در بازه* $[a, b]$ *صفر یکتا داشته باشد*
- **خروجی.** *مقدار* x *که به ازای آن* $|f(x)| < \epsilon$

۱) *قرار دهید* $x = \frac{a+b}{۲}$.

۲) *اگر* $|f(x)| < \epsilon$ *آن‌گاه* a، b *و* x *را چاپ کرده و متوقف شوید.*

۳) *اگر* $f(a)f(x) < ۰$ *قرار دهید* $b = x$ *و به گام ۱ برگردید.*

۴) *قرار دهید* $a = x$ *و به گام ۱ برگردید.*

[۲] Bisection method

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
۱	۱٫۰	۲٫۰	۱٫۵	۲٫۳۷۵
۲	۱٫۰	۱٫۵	۱٫۲۵	−۱٫۷۹۶۸۷
۳	۱٫۲۵	۱٫۵	۱٫۳۷۵	۰٫۱۶۲۱۱
۴	۱٫۲۵	۱٫۳۷۵	۱٫۳۱۲۵	−۰٫۸۴۸۳۹
۵	۱٫۳۱۲۵	۱٫۳۷۵	۱٫۳۴۳۷۵	−۰٫۳۵۰۹۸
۶	۱٫۳۴۳۷۵	۱٫۳۷۵	۱٫۳۵۹۳۷۵	−۰٫۰۹۶۴۱
۷	۱٫۳۵۹۳۷۵	۱٫۳۷۵	۱٫۳۶۷۱۸۷۵	۰٫۰۳۲۳۶
۸	۱٫۳۵۹۳۷۵	۱٫۳۶۷۱۸۷۵	۱٫۳۶۳۲۸۱۲۵	−۰٫۰۳۲۱۵
۹	۱٫۳۶۳۲۸۱۲۵	۱٫۳۶۷۱۸۷۵	۱٫۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۰٫۰۰۰۰۷۲
۱۰	۱٫۳۶۳۲۸۱۲۵	۱٫۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱٫۳۶۴۲۵۷۸۱۳	−۰٫۰۱۶۰۵
۱۱	۱٫۳۶۴۲۵۷۸۱۳	۱٫۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱٫۳۶۴۷۴۶۰۹۴	−۰٫۰۰۷۹۹
۱۲	۱٫۳۶۴۷۴۶۰۹۴	۱٫۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱٫۳۶۴۹۹۰۲۳۵	−۰٫۰۰۳۹۶
۱۳	۱٫۳۶۴۹۹۰۲۳۵	۱٫۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱٫۳۶۵۱۱۲۳۰۵	−۰٫۰۰۱۹۴
۱۴	۱٫۳۶۵۱۱۲۳۰۵	۱٫۳۶۵۲۳۴۳۷۵		

جدول ۲.۳: روش دوبخشی برای معادله $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

مثال ۴.۳ *معادله $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ریشه‌ای یکتا در بازه $[1,2]$ دارد. زیرا $f(1) = -5$، $f(2) = 14$ و برای $x \in [1,2]$ داریم $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$. با اِعمال روش دوبخشی، جدول ۲.۳ به دست می‌آید. پس از ۱۳ تکرار $x_{13} = 1{,}365112305$، α را با خطایی به اندازه*

$$|\alpha - x_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1{,}365234375 - 1{,}365112305| = 0{,}000122070,$$

تقریب می‌زند. چون $|a_{14}| < |\alpha|$ از

$$\delta(x_{13}) = \frac{|\alpha - x_{13}|}{|\alpha|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \le 0{,}9 \times 10^{-4} < 0{,}5 \times 10^{-3},$$

نتیجه می‌شود x_{13} حداقل سه رقم بامعنای درست دارد. از رابطه $|f(x_9)| < |f(x_{13})|$ گمان می‌کنیم x_9 بهتر از x_{13}، α را تقریب می‌زند ولی چون از α اطلاعی نداریم معلوم نیست آیا رابطه $|\alpha - x_9| < |\alpha - x_{13}|$ برقرار است یا نه! همچنین به طور مشابه ثابت می‌شود $\delta(x_9) < 0{,}5 \times 10^{-2}$ و در نتیجه x_9 حداقل دو رقم بامعنای درست دارد. △

تذکر ۵.۳ روش دوبخشی برای یافتن ریشه چندگانه با چندگانگی زوج کارایی ندارد.

قضیه ۲.۳ *اگر $f \in C[a,b]$ و $f(a)f(b) < 0$، آن‌گاه روش دوبخشی دنباله $\{x_n\}_{n\ge 1}$ را تولید می‌کند که به α (صفر f) همگرا است و داریم*

$$|x_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^n}, \qquad n \ge 1.$$

برهان. با یک روند استقرایی به راحتی ثابت می‌شود

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \qquad n \ge 1.$$

هم‌چنین واضح است که به ازای هر $n \ge 1$ داریم $a_n \le \alpha \le b_n$ و چون $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ در نتیجه

$$-\frac{b_n-a_n}{2} = a_n - x_n \le \alpha - x_n \le b_n - x_n = \frac{b_n-a_n}{2}.$$

بنابراین

$$|\alpha - x_n| \le \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b-a}{2^n}.$$

□

تذکر ۶.۳ *می‌توان نوشت $x_n = \alpha + O(\frac{1}{2^n})$ یعنی همگرایی $\{x_n\}_{n\ge 1}$ به α متناسب با همگرایی $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\ge 1}$ به صفر خواهد بود و چون $2^{-10} = \frac{1}{1024} < 0.001$، می‌توان نتیجه گرفت پس از ۱۰ تکرار، خطا چندان کاهش نمی‌یابد و در نتیجه همگرایی روش دوبخشی کند است.*

تمرین ۱.۳ *به کمک کران بالای خطای به دست آمده در قضیه ۲.۳، چند تکرار روش دوبخشی لازم است تا ریشه ساده (ریشه چندگانه با چندگانگی فرد) $f(x) = 0$ در بازه $[a,b]$ با دقت rD به دست آید؟*

مثال ۵.۳ *در ریاضیات مالی ثابت می‌شود اگر یک وام A تومانی با نرخ بهره ماهانه x در n قسط ماهانه به مبلغ P تومان مستهلک شود، رابطه $A = \frac{P}{x}(1-(1+x)^{-n})$ برقرار خواهد بود. اگر شخصی یک وام مسکن سی ساله به مبلغ ۱۲۱۵۰۰۰۰۰۰ تومان نیاز داشته باشد و قادر به پرداخت اقساط ماهانه ۹۰۰۰۰۰ تومان باشد حداکثر نرخ بهره‌ای که می‌تواند بپذیرد را با به کار بردن روش دوبخشی و با دقت $4D$ تعیین کنید.*
باید x را به قسمی تعیین کنیم که

$$1215000000 = \frac{900000}{x}(1-(1+x)^{-30\times 12}).$$

به عبارت دیگر باید صفر تابع

$$f(x) = 135 + \frac{(1+x)^{-360} - 1}{x},$$

مشخص شود. برای این منظور اگر $a = 0.00600$ و $b = 0.00800$ انتخاب شود از $f(a) = -12.32136$ و $f(b) = 17.09771$ نتیجه می‌گیریم حداقل یک ریشه در بازه $[0.00600, 0.00800]$ وجود دارد. با یک بررسی ساده مشخص می‌شود این ریشه منحصر به فرد است!؟ از طرفی از نابرابری $\frac{0.00800-0.00600}{2^n} < 0.5 \times 10^{-4}$ در می‌یابیم کمترین تعداد تکرار لازم برای رسیدن به دقت مطلوب، $n = 6$ خواهد بود. جدول ۳.۳ مقدار تقریبی $x_6 = 0.00672$ را مشخص می‌کند که با دقت $4D$ خواهیم داشت $x \simeq 0.0067$. تقریب بهتر، $x \simeq 0.00674992$ است و علت تفاوت محسوس دو مقدار $f(0.0067) \simeq -0.76719$ و $f(0.00674992) \simeq 4 \times 10^{-5}$ تنها کم بودن تعداد ارقام بامعنای ۰٫۰۰۶۷ است. △

n	a	b	$x = \frac{a+b}{۲}$	$f(x)$
۱	۰/۰۰۶۰۰	۰/۰۰۸۰۰	۰/۰۰۷۰۰	۳/۷۳۸۴۴
۲	۰/۰۰۶۰۰	۰/۰۰۷۰۰	۰/۰۰۶۵۰	−۳/۹۱۳۸۷
۳	۰/۰۰۶۵۰	۰/۰۰۷۰۰	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۱۲۷
۴	۰/۰۰۶۵۰	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۶۶۳	−۱/۸۵۵۱۵
۵	۰/۰۰۶۶۳	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۶۶۹	−۰/۹۲۱۷۵
۶	۰/۰۰۶۶۹	۰/۰۰۶۷۵	۰/۰۰۶۷۲	−۰/۴۵۸۹۵

جدول ۳.۳: روش دوبخشی برای معادله $۱۳۵ + \frac{(۱+x)^{-۳۶۰}-۱}{x} = ۰$

شکل ۴.۳: بررسی روش نابجایی به کمک رسم

۲.۲.۳ روش نابجایی

در روش نابجایی[۳] مانند روش دوبخشی، بازه $[a,b]$ را به دو زیربازه (لزومی ندارد برابر باشند) تقسیم کرده و زیربازه‌ای که ریشه در آن وجود ندارد را کنار گذاشته و این فرایند را تکرار می‌کنیم. به شکل ۴.۳ و الگوریتم ۲.۳ توجه کنید.

الگوریتم ۲.۳ الگوریتم روش نابجایی.

- **ورودی.** a, b, ϵ, f *با این فرض که تابع f در بازه $[a,b]$ صفر یکتا داشته باشد*
- **خروجی.** مقدار x *که به ازای آن* $|f(x)| < \epsilon$

۱) *قرار دهید* $x = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$.

۲) *اگر* $|f(x)| < \epsilon$ *آن‌گاه* a، b *و* x *را چاپ کرده و متوقف شوید.*

۳) *اگر* $f(a)f(x) < ۰$ *قرار دهید* $b = x$ *و به گام ۱ برگردید.*

۴) *قرار دهید* $a = x$ *و به گام ۱ برگردید.*

مثال ۶.۳ *اگر محاسبات میانی با دقت $5D$ انجام شود، با به کار بردن روش نابجایی بر بازه $[۱,۲]$ در حل معادله $f(x) = x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰ = ۰$ جدول ۴.۳ تولید می‌شود که مقدار تقریبی $x_۹ = ۱/۳۶۵۲۳$ را مشخص می‌کند که با دقت $۴D$ خواهیم داشت $x \simeq ۱/۳۶۵۲$.* △

[۳] Method of false position (regula falsi)

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
۱	۱٫۰	۲٫۰	۱٫۲۶۳۱۶	−۱٫۶۰۲۲۷
۲	۱٫۲۶۳۱۶	۲٫۰	۱٫۳۳۸۸۳	−۰٫۴۳۰۳۷
۳	۱٫۳۳۸۸۳	۲٫۰	۱٫۳۵۸۵۵	−۰٫۱۱۰۰۱
۴	۱٫۳۵۸۵۵	۲٫۰	۱٫۳۶۳۵۵	−۰٫۰۲۷۷۶
۵	۱٫۳۶۳۵۵	۲٫۰	۱٫۳۶۴۸۱	−۰٫۰۰۶۹۸
۶	۱٫۳۶۴۸۱	۲٫۰	۱٫۳۶۵۱۲	−۰٫۰۰۱۷۶
۷	۱٫۳۶۵۱۲	۲٫۰	۱٫۳۶۵۲۰	−۰٫۰۰۰۴۴
۸	۱٫۳۶۵۲۰	۲٫۰	۱٫۳۶۵۲۲	−۰٫۰۰۰۱۱
۹	۱٫۳۶۵۲۲	۲٫۰	۱٫۳۶۵۲۳	−۰٫۰۰۰۰۳

جدول ۴.۳: روش نابجایی برای معادله $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

تذکر ۷.۳ *روش نابجایی مانند روش دوبخشی همگرایی تضمین‌شده‌ای دارد و با آن که حجم عملیات آن از روش دوبخشی بیشتر است، بعضی مواقع سریع‌تر است. ولی ممکن است اکثر یا تمام عناصر دنباله $\{x_n\}_{n\geq 1}$ در یک طرف ریشه (α) قرار بگیرند (مانند مثال ۶.۳) که در این حالت همگرایی روش نابجایی ممکن است از روش دوبخشی نیز کندتر باشد. در این صورت یا از روش‌های دیگر استفاده می‌شود و یا اگر بعد از دو تکرار a (b) تغییر مکان نداد باید در محاسبات $\frac{f(a)}{2}$ $(\frac{f(b)}{2})$ با $f(a)$ $(f(b))$ جایگزین شده و تکرارها دنبال شوند*[4].

۳.۲.۳ روش تکرار ساده

روش تکرار ساده[5] که به روش تکرار نقطه ثابت[6] و هم‌چنین روش تکرار تابعی[7] نیز مشهور است، ایده ساده‌ای دارد که در ادامه آورده می‌شود. ابتدا معادله $f(x) = 0$ را به صورت $x = g(x)$ به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که اگر $f(\alpha) = 0$ آن‌گاه $\alpha = g(\alpha)$. سپس به جای یافتن صفر تابع f، نقطه ثابت تابع g را جستجو می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ *نقطه $z \in D_f$ نقطه ثابت تابع $y = f(x)$ نامیده می‌شود هرگاه $z = f(z)$ (محل برخورد نمودار f با نیمساز ناحیه اول و سوم).*

تذکر ۸.۳ *لزومی ندارد تمام ریشه‌های $f(x) = 0$، جواب‌های $x = g(x)$ باشند و برعکس ممکن است تمام نقاط ثابت $x = g(x)$، ریشه‌های $f(x) = 0$ نباشند. به عنوان مثال $f_1(x) = \sqrt{x} - 2\cos(x)$ یک صفر در $[1, 2]$ و $f_2(x) = \sqrt{x} + 2\cos(x)$ یک صفر در $[2, 3]$ و یک صفر در $[3, 4]$ دارد و اگر $x = 4\cos^2(x) = g(x)$ آن‌گاه g سه نقطه ثابت در $[1, 2]$، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ دارد. هم‌چنین $f(x) = x^2 + x - 1$ دو صفر در $[0, 1]$ و $[-2, -1]$ دارد و $g_1(x) = \sqrt{1-x}$ یک نقطه ثابت در $[0, 1]$ و $g_2(x) = -\sqrt{1-x}$ یک نقطه ثابت در $[-2, -1]$ دارد.*

---

[4] روش نابجایی اصلاح‌شده یا تغییریافته

[5] Simple iteration

[6] Fixed point iteration

[7] Functional iteration

قضیه ۳.۳ (نقطه ثابت) *آ) اگر $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ و $g \in C[a,b]$ آن‌گاه g در $[a,b]$ حداقل یک نقطه ثابت دارد؛*

ب) هم‌چنین اگر g' بر (a,b) موجود باشد و عدد ثابت و مثبت L چنان وجود داشته باشد که

$$\forall\, x \in (a,b), \qquad |g'(x)| \leq L < ۱,$$

آن‌گاه نقطه ثابت g در $[a,b]$ یکتا است؛

پ) به علاوه دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ تولیدشده توسط فرایند $x_n = g(x_{n-۱})$ به ازای هر $x_۰$ در $[a,b]$ به نقطه ثابت g همگرا است و داریم

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{L^n}{۱ - L}|x_۱ - x_۰|.$$

برهان. آ) اگر $a = g(a)$ یا $b = g(b)$ آن‌گاه نقطه ثابت g در یکی از دو انتهای بازه $[a,b]$ قرار دارد. در غیر این صورت اگر تابع h به صورت $h(x) = g(x) - x$ تعریف شود بلافاصله نتیجه می‌شود h تابعی پیوسته بر $[a,b]$ است و $h(a) = g(a) - a > ۰$ و $h(b) = g(b) - b < ۰$. پس بنابر قضیه بولتسانو h حداقل یک صفر در $[a,b]$ دارد.
ب) (برهان خلف) فرض کنید g دو نقطه ثابت متمایز α و β در $[a,b]$ داشته باشد یعنی $g(\beta) = \beta \neq \alpha = g(\alpha)$. بنابر فرضیات قضیه و توجه به قضیه مقدار میانگین برای مشتق داریم

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)(\alpha - \beta)| = |g'(\xi)||\alpha - \beta| \leq L|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|, \qquad \sharp$$

و از این تناقض نتیجه می‌شود $\alpha = \beta$.
پ) فرض کنید α نقطه ثابت منحصر به فرد g در $[a,b]$ باشد یعنی $\alpha = g(\alpha)$. با توجه به این مطلب که g بازه $[a,b]$ را به توی $[a,b]$ می‌نگارد، واضح است که عناصر دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ ($x_n = g(x_{n-۱})$) به ازای هر $x_۰$ در $[a,b]$، به بازه $[a,b]$ تعلق دارند و بنابر قضیه مقدار میانگین برای مشتق داریم

$$|x_n - \alpha| = |g(x_{n-۱}) - g(\alpha)| = |g'(\xi_{n-۱})||x_{n-۱} - \alpha| \leq L|x_{n-۱} - \alpha|, \qquad n \geq ۱.$$

با به کار بردن این نابرابری به طور بازگشتی داریم $|x_n - \alpha| \leq L^۲|x_{n-۲} - \alpha| \leq \cdots \leq L^n|x_۰ - \alpha|$ و یا

$$|x_n - \alpha| \leq L^n|x_۰ - \alpha|, \quad n \geq ۱, \tag{۱.۳}$$

و با توجه به $۰ < L < ۱$، خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}|x_n - \alpha| = ۰$. حال به کمک قضیه مقدار میانگین برای مشتق و نابرابری مثلثی داریم

$$|x_۱ - \alpha| = |g(x_۰) - g(\alpha)| = |g'(\xi)||x_۰ - \alpha| \leq L|x_۰ - \alpha| \leq L|x_۰ - x_۱| + L|x_۱ - \alpha|.$$

در نتیجه $(۱ - L)|x_۱ - \alpha| \leq L|x_۰ - x_۱|$. پس $|x_۱ - \alpha| \leq \frac{L}{۱-L}|x_۱ - x_۰|$. از طرفی بنابر (۱.۳) داریم

$$|x_n - \alpha| \leq L^{n-۱}|x_۱ - \alpha|, \qquad n \geq ۱.$$

از ترکیب دو نابرابری اخیر حکم ثابت می‌شود. □

اگر شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار باشد بلافاصله نتایج زیر به دست می‌آیند.

نتیجه ۱.۳.۳ $|x_n-\alpha| \le L^n \max\{x_0-a, b-x_0\}$.

برهان. به کمک رابطه (۱.۳) و با توجه به $\alpha\in[a,b]$، به نتیجه مطلوب می‌رسیم. □

نتیجه ۲.۳.۳ *اگر به ازای هر x در (a,b) داشته باشیم $0 < g'(x) \le L < 1$، آن‌گاه دنباله تولیدشده توسط روش تکرار ساده یعنی $\{x_n\}_{n\ge 1}$ یکنوا است و اگر به ازای هر x در (a,b) داشته باشیم $-1 < -L \le g'(x) < 0$، آن‌گاه عناصر متوالی دنباله تولیدشده توسط روش تکرار ساده در دو طرف α قرار می‌گیرند.*

برهان. فرض کنید $x_1 < x_0$. بنابر فرضیات و قضیه مقدار میانگین می‌توان نوشت

$$x_1 - x_2 = g(x_0) - g(x_1) = g'(\xi)(x_0 - x_1) > 0,$$

یعنی $x_2 < x_1$. در نتیجه با یک روند استقرایی یکنوا نزولی بودن این دنباله ثابت می‌شود. به روشی مشابه، از $x_1 > x_0$ یکنوا صعودی بودن دنباله نتیجه می‌شود. حال فرض کنید $x_0 < \alpha$. بنابر قضیه مقدار میانگین می‌توان نوشت $x_1 - \alpha = g(x_0) - g(\alpha) = g'(\xi)(x_0-\alpha) > 0$، یعنی $\alpha < x_1$. در نتیجه با یک روند استقرایی قسمت دوم نتیجه می‌شود. □

با توجه به کران خطا، هر چه L به صفر نزدیک‌تر باشد همگرایی سریع‌تر و هر چه L به یک نزدیک‌تر باشد همگرایی کندتر خواهد بود. به الگوریتم ۳.۳ توجه کنید.

الگوریتم ۳.۳ الگوریتم روش تکرار ساده.

- **ورودی.** x_0, ϵ, g *با این فرض که تابع g در فرضیات قضیه نقطه ثابت صدق کند*
- **خروجی.** *مقدار x_n که به ازای آن* $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

۱) *قرار دهید* $n=1$.

۲) *قرار دهید* $x_n = g(x_{n-1})$.

۳) *اگر* $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ *آن‌گاه x_n را چاپ کرده و متوقف شوید.*

۴) *قرار دهید* $n = n+1$ *و به گام ۲ برگردید.*

مثال ۷.۳ *برنامه* fixed-point.nb *را ببینید.* △

مثال ۸.۳ *تابع $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ روی بازه $I = [-1, 0]$ مفروض است. با انتخاب x_0 در بازه I، نشان دهید روش تکراری $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{6} f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$ به صفر تابع f در این بازه همگرا بوده و این ریشه را با استفاده از این روش تکرار ساده با نقطه شروع $x_0 = -0.7$ و با دقت $3D$ به دست آورید.*

از این‌که $g(x) = x - \frac{1}{6}f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$ پس $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ و از $g'(x) = 0$ نتیجه می‌شود $x_1 = \frac{1-\sqrt{19}}{3} \simeq -1.120$ و $x_2 = \frac{1+\sqrt{19}}{3} \simeq 1.786$ و چون $I \subset [x_1, x_2]$ بنابراین $\forall x \in I,\ g'(x) > 0$ یعنی تابع g

بر I *صعودی اکید است. از طرفی* $g(-۱) = -\frac{۵}{۶}$ و $g(۰) = -\frac{۱}{۶}$ *پس* $g : [-۱, ۰] \to [-\frac{۵}{۶}, -\frac{۱}{۶}] \subset [-۱, ۰]$. *هم‌چنین داریم*

$$-۱ < x < ۰ \;\Rightarrow\; -\frac{۴}{۳} < x - \frac{۱}{۳} < -\frac{۱}{۳} \Rightarrow\; \frac{۱}{۹} < (x-\frac{۱}{۳})^۲ < \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow\; \frac{۱}{۶} < -\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۳})^۲ + \frac{۱۹}{۱۸} < ۱$$

و چون $g'(x) = -\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۳})^۲ + \frac{۱۹}{۱۸}$ *پس* $|g'(x)| < ۱ \quad \forall x \in (-۱, ۰)$. *با آنکه* $g'(۰) = ۱$، *شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است. با توجه به مقادیر* x_n *به ازای* $n = ۱, \dots, ۱۰$ *گزارش‌شده در جدول ۵.۳ در می‌یابیم که* $\hat{x} = -۰/۷۵۵(۳D)$. *با آن‌که نمی‌توان برای* L *صادق در قضیه نقطه ثابت مقداری یافت ولی باز هم همگرایی نتیجه شده است.* △

n	۱	۲	۳	۴	۵
x_n	$-۰/۷۲۷۸$	$-۰/۷۴۱۹$	$-۰/۷۴۸۸$	$-۰/۷۵۲۰$	$-۰/۷۵۳۶$
n	۶	۷	۸	۹	۱۰
x_n	$-۰/۷۵۴۳$	$-۰/۷۵۴۶$	$-۰/۷۵۴۷$	$-۰/۷۵۴۸$	$-۰/۷۵۴۸$

جدول ۵.۳: روش تکرار ساده برای معادله $x^۳ - x^۲ + ۱ = ۰$

در شکل ۵.۳ نمونه‌هایی از همگرایی یا واگرایی روش تکرار ساده آورده شده است.

تذکر ۹.۳ *در حالت کلی بهتر است کران‌های* g و g' *را با بررسی رفتار آنها به دست آوریم زیرا ممکن است در استفاده از نامساوی‌ها مرتکب اشتباه شویم و کران‌های بدبینانه‌ای به دست آوریم.*

مثال ۹.۳ *تقریبی از بزرگترین ریشه معادله* $۲x - \ln x - ۴ = ۰$ *را با دقت* $۴D$ *به دست آورید.*
همان طور که در شکل ۶.۳ مشاهده می‌شود این معادله دو ریشه به ترتیب در بازه‌های $[۰, ۱]$ و $[۲, ۳]$ *دارد. با انتخاب* $g(x) = ۲ + \frac{۱}{۲}\ln x$ *داریم* $g'(x) = \frac{۱}{۲x}$. *چون* g' *در بازه* $[۲, ۳]$ *مثبت است پس* g *در این بازه صعودی است و بنابراین*

$$۲ < g(۲) = ۲ + \frac{۱}{۲}\ln ۲ \le g(x) \le g(۳) = ۲ + \frac{۱}{۲}\ln ۳ < ۳, \qquad \forall x \in [۲, ۳],$$

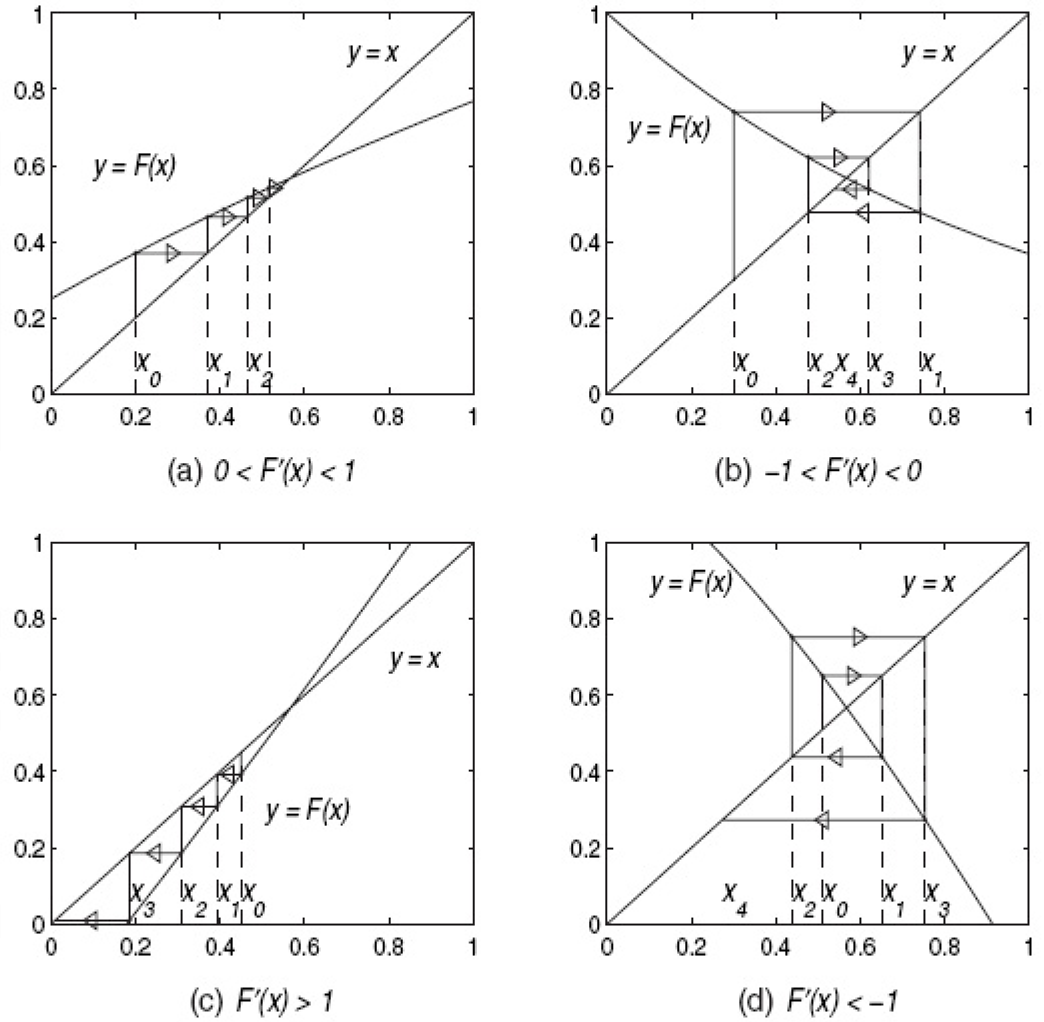
یعنی تابع g *به وضوح پیوسته بوده و بازه* $[۲, ۳]$ *را به توی بازه* $[۲, ۳]$ *می‌برد. از طرف دیگر چون در این بازه داریم* $g''(x) = \frac{-۱}{۲x^۲} < ۰$، *بنابراین* g' *در این بازه نزولی بوده و*

$$g'(۳) = \frac{۱}{۶} < g'(x) < g'(۲) = \frac{۱}{۴}, \qquad \forall x \in (۲, ۳),$$

و در نتیجه $L = \frac{۱}{۴}$. *بنابراین شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است و از نابرابری*

$$\frac{L^n}{۱ - L}\,|g(x_۰) - x_۰| \le ۰/۵ \times ۱۰^{-۴},$$

به ازای $x_۰ = ۲/۵$ *داریم* $n \ge ۶$. *نتایج جدول ۶.۳ حاکی از آن است که* $\alpha = ۲/۴۴۷۵(۴D)$. *چرا در تکرار هفتم به نقطه ثابت رسیده‌ایم؟* △



شکل ۵.۳: تعبیر هندسی روش تکرار ساده (برای $x = F(x)$)

شکل ۶.۳: نمودار توابع $\ln x$ و $۲x - ۴$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x_n	۲/۴۵۸۱۵	۲/۴۴۹۷۰	۲/۴۴۷۹۸	۲/۴۴۷۶۳	۲/۴۴۷۵۶	۲/۴۴۷۵۵	۲/۴۴۷۵۴	۲/۴۴۷۵۴

جدول ۶.۳: نتایج روش تکرار ساده برای مثال ۹.۳

قضیه ۴.۳ *اگر $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای باشد که توسط روش تکرار ساده به دست آمده باشد و به α (نقطه ثابت g) همگرا باشد و*

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-۱)}(\alpha) = ۰ \neq g^{(p)}(\alpha),$$

آن‌گاه مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ برابر p است.

برهان. با فرض $x_n - \alpha = h$ و بنابر قضیه تیلور داریم

$$g(x_n) = g(\alpha+h) = g(\alpha) + hg'(\alpha) + \frac{h^۲}{۲!}g''(\alpha) + \cdots + \frac{h^{p-۱}}{(p-۱)!}g^{(p-۱)}(\alpha) + \frac{h^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n),$$

که در آن ξ_n عددی بین α و x_n است. بنابر فرضیات قضیه داریم

$$x_{n+۱} = g(x_n) = g(\alpha) + \frac{h^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n) = \alpha + \frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}(\xi_n).$$

پس $\frac{x_{n+۱}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} = \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}$ و در نتیجه $\frac{|x_{n+۱}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \frac{|g^{(p)}(\xi_n)|}{p!}$. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+۱}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq ۰$ و این یعنی مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ برابر p است. □

مثال ۱۰.۳ *دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ در رابطه بازگشتی $x_{n+۱} = \frac{x_n(x_n^۲+۳a)}{۳x_n^۲+a}, \quad n = ۰, ۱, \ldots$ که در آن $a > ۰$، صدق می‌کند. حد دنباله و مرتبه همگرایی دنباله به حد آن را به دست آورید.*

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. با حدگیری خواهیم داشت $\alpha = \frac{\alpha(\alpha^۲+۳a)}{۳\alpha^۲+a}$ و از آنجا داریم $۲\alpha(\alpha^۲-a) = ۰$ و بنابراین $\alpha = ۰, \pm\sqrt{a}$. با معرفی $g(x) = \frac{x(x^۲+۳a)}{۳x^۲+a}$ می‌توان نوشت

$$g'(x) = \frac{۳x^۴ - ۶ax^۲ + ۳a^۲}{(۳x^۲+a)^۲}, \qquad g''(x) = \frac{۴۸ax(x^۲-a)}{(۳x^۲+a)^۳}, \qquad g'''(x) = \frac{۴۸a(-۹x^۴+۱۸ax^۲-a^۲)}{(۳x^۲+a)^۴}.$$

چون $g'(۰) \neq ۰$ مرتبه همگرایی دنباله به صفر، ۱ است. چون $g'(\pm\sqrt{a}) = g''(\pm\sqrt{a}) = ۰ \neq \frac{۳}{۲a} = g'''(\pm\sqrt{a})$ نتیجه می‌گیریم مرتبه همگرایی دنباله به $\pm\sqrt{a}$، ۳ است. △

تذکر ۱۰.۳ *اگر بتوان تابع g را به گونه‌ای انتخاب نمود که $g'(\alpha)$ صفر شود، بنابر قضیه ۴.۳، می‌توان انتظار همگرایی سریع‌تری داشت. به همین منظور فرض کنید g چنان انتخاب شده است که $\alpha = g(\alpha)$. با فرض $\lambda \neq ۰$ قرار دهید $x + \lambda x = g(x) + \lambda x$ و از آن جا $x = \frac{g(x)+\lambda x}{۱+\lambda}$. قرار دهید $g_\lambda(x) = \frac{g(x)+\lambda x}{۱+\lambda}$. حال λ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $g'_\lambda(\alpha) = ۰$. اما $g'_\lambda(x) = \frac{g'(x)+\lambda}{۱+\lambda}$ پس باید داشته باشیم $\lambda = -g'(\alpha)$. ولی از α همین قدر اطلاع داریم که $\alpha \in [a, b]$. پس با این فرض که $b-a$ کوچک باشد آن‌گاه $\alpha \simeq \frac{a+b}{۲}$ (یک تکرار از روش دوبخشی) و قرار می‌دهیم $\lambda = -g'(\frac{a+b}{۲})$.*

مثال ۱۱.۳ *تقریبی از ریشه $x - \tan(x) = ۰$ به دست آورید که به $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک باشد.*

با انتخاب $x = \tan(x) = g(x)$ واضح است که $g'(x) = ۱ + \tan^۲(x) > ۱$، یعنی g شرایط قضیه نقطه ثابت را ندارد.

اگر روش تکراری $x_n = g(x_{n-1})$ را با $x_0 = 4/5$ دنبال کنیم تکرارهای زیر به دست می‌آیند

$$x_1 = 4/64, \quad x_2 = 13/79, \quad x_3 = 2/76, \quad x_4 = -0/4.$$

حال اگر $a = 4/4$ و $b = 4/6$ داریم $\alpha \simeq 4/5$ و $\lambda = -g'(4/5) = -22/5$. پس $g_\lambda(x) = \frac{\tan(x) - 22/5x}{-21/5}$. اگر روش تکراری $x_n = g_\lambda(x_{n-1})$ را با $x_0 = 4/5$ ادامه دهیم، $x_1 = 4/4936$ و $x_2 = x_3 = \cdots = 4/4934$. △

تمرین ۲.۳ *در مثال قبل $g(x) = \tan^{-1}(x)$ را بررسی کنید.*

تذکر ۱۱.۳ *فرض کنید تابع g با ویژگی‌های زیر در دسترس باشد*

- g بر $[a,b]$ پیوسته باشد؛
- $g : [a,b] \to [a,b]$ یک به یک و پوشا باشد و یا $g : [a,b] \subset [c,d] \to [c,d]$؛
- g بر (a,b) مشتق‌پذیر بوده و $K > 1$ چنان موجود باشد که $\forall x \ : \ |g'(x)| \geq K$.

اگر بتوان ضابطه g^{-1} را به دست آورد و $G(x) = g^{-1}(x)$، آن‌گاه به وضوح از $\alpha = g(\alpha)$ خواهیم داشت $\alpha = G(\alpha)$ و

- G بر $[a,b]$ (یا (c,d)) پیوسته است و این بازه را به توی خود می‌نگارد؛
- G بر (a,b) (یا (c,d)) مشتق‌پذیر بوده و داریم $\forall x \ : \ |G'(x)| = \frac{1}{|g'(G(x))|} \leq \frac{1}{K} < 1$.

یعنی G در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق کرده و دنباله تولیدشده با $x_{n+1} = G(x_n)$ به ازای هر x_0 به α همگرا می‌شود.

مثال ۱۲.۳ *ریشه معادله $x^3 + x - 995 = 0$ را با دقت $9D$ به دست آورید.*
با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد که تنها ریشه معادله در فاصله $[9/9, 10]$ قرار دارد. اگر معادله را به صورت هم‌ارز آن $x = 995 - x^3$ بنویسیم آن‌گاه تابع $g(x) = 995 - x^3$ در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق نمی‌کند. اما بر روی بازه $[9/9, 10]$ داریم $g([9/9, 10]) = [-5, 24/701] \subseteq [9/9, 10]$ و چون $|g'(x)| = 3x^2$ پس روی بازه $[9/9, 10]$ داریم $|g'(x)| \geq 3 \times (9/9)^2 = 294/03$. از طرفی $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{995 - x}$، $g^{-1}([9/9, 10]) \subseteq [9/9, 10]$ و $|(g^{-1})'(x)| \leq \dfrac{1}{294/03} = L$. بنابراین شرایط قضیه نقطه ثابت برای g^{-1} برقرار است. به ازای $x_0 = 10$ داریم $x_1 = 9/949747 8956$. از رابطه $\dfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < 0/5 \times 10^{-9}$، تعداد گام‌های لازم $n \geq 4$ به دست می‌آید. در جدول ۷.۳ چند جمله از دنباله تولیدشده با استفاده از g^{-1} با مقدار آغازی $x_0 = 10$ و خطای تقریب داده شده است. بنابراین جواب معادله با دقت $9D$ عبارت است از $x = 9/949916528$. △

n	۱	۲	۳	۴
$x_n = g^{-1}(x_{n-1})$	۹/۹۴۹۷۴۷۸۹۵۶	۹/۹۴۹۹۱۷۰۹۶۰	۹/۹۴۹۹۱۶۵۲۶۳	۹/۹۴۹۹۱۶۵۲۸۳
$\left\lvert\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right\rvert$	۰/۰۵۰۲۵۲۱۰۴۴	۰/۰۰۰۱۶۸۶۳۲۶	۰/۰۰۰۰۰۰۵۶۷۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲

جدول ۷.۳: روش تکرار ساده برای معادله $x^3 + x - 995 = 0$

۴.۲.۳ روش نیوتن

این روش به روش نیوتن-رفسون[۸] و روش مماسی نیز معروف است. برای به دست آوردن طرح تکراری این روش، فرض کنید $f \in C^۲[a,b]$ و $\bar{x}$ تقریبی از α باشد به طوری که $f'(\bar{x}) \neq ۰$. با انتخاب $h = \alpha - \bar{x}$، بنا بر بسط تیلور داریم

$$f(\alpha) = f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{h^۲}{۲!}f''(\xi_{\bar{x}}),$$

که در آن $\xi_{\bar{x}}$ بین α و $\bar{x}$ است. اگر h کوچک باشد، $h^۲$ قابل چشم‌پوشی بوده و $۰ = f(\alpha) \simeq f(\bar{x}) + (\alpha - \bar{x})f'(\bar{x})$ که نتیجه می‌دهد $\alpha \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$. پس با انتخاب $x_۰$، می‌توان یک طرح تکراری به صورت زیر ساخت

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = ۰, ۱, \ldots .$$

طرح تکراری روش نیوتن را می‌توان با استفاده از تعبیر هندسی روش که در شکل ۷.۳ آورده شده نیز به دست آورد.

الگوریتم ۴.۳ الگوریتم روش نیوتن.

- **ورودی.** $f, \epsilon, x_۰$ *با این فرض که* $x_۰$ *به* α *نزدیک باشد*
- **خروجی.** *مقدار* x_n *که به ازای آن* $|f(x_n)| < \epsilon$

۱) *قرار دهید* $n = ۱$.

۲) *قرار دهید* $x_n = x_{n-۱} - \frac{f(x_{n-۱})}{f'(x_{n-۱})}$.

۳) *اگر* $|f(x_n)| < \epsilon$، x_n *را چاپ کرده و متوقف شوید.*

۴) *قرار دهید* $n = n + ۱$ *و به گام ۲ برگردید.*

شکل ۷.۳: تعبیر هندسی روش نیوتن

تذکر ۱۲.۳ *با انتخاب* $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ *ملاحظه می‌شود که، روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است.*

مثال ۱۳.۳ *می‌خواهیم نقطه ثابت تابع* $\cos x$ *را تعیین کنیم. به کمک رسم متوجه می‌شویم که نقطه ثابت تابع در بازه* $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ *قرار دارد. با انتخاب* $x_۰ = \frac{\pi}{۴}$ *و استفاده از طرح تکرار ساده* $x_{n+۱} = \cos x_n$ *به ازای* $n \geq ۰$ *نتایج سمت چپ*

[۸] Newton-Raphson

جدول ۸.۳ به دست می‌آید که دلالت بر مقدار تقریبی ۰/۷۴ دارد. اما با انتخاب $f(x) = \cos x - x$ و $x_۰ = \frac{\pi}{۴}$ و با دنبال کردن طرح تکراری نیوتن یعنی

$$x_n = x_{n-۱} - \frac{\cos x_{n-۱} - x_{n-۱}}{-\sin x_{n-۱} - ۱}, \qquad n \geq ۱,$$

نتایج سمت راست جدول ۸.۳ تولید می‌شود که نشان‌دهنده مقدار تقریبی ۰/۷۳۹۰۸۵۱۳۳۲ است. △

n	x_n
۰	۰/۷۸۵۳۹۸۱۶۳۵
۱	۰/۷۰۷۱۰۶۷۸۱۰
۲	۰/۷۶۰۲۴۴۵۹۷۲
۳	۰/۷۲۴۶۶۷۴۸۰۸
۴	۰/۷۴۸۷۱۹۸۸۵۸
۵	۰/۷۳۲۵۶۰۸۴۴۶
۶	۰/۷۴۳۴۶۴۲۱۱۳
۷	۰/۷۳۶۱۲۸۲۵۶۵

n	x_n
۰	۰/۷۸۵۳۹۸۱۶۳۵
۱	۰/۷۳۹۵۳۶۱۳۳۷
۲	۰/۷۳۹۰۸۵۱۷۸۱
۳	۰/۷۳۹۰۸۵۱۳۳۲
۴	۰/۷۳۹۰۸۵۱۳۳۲

جدول ۸.۳: روش نیوتن برای یافتن نقطه ثابت تابع $\cos x$

مثال ۱۴.۳ *ثابت می‌شود یکی از مدل‌های رشد جمعیت یک جامعه، تابعی بر حسب زمان t به صورت زیر است*

$$N(t) = N_۰ e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - ۱),$$

که در آن $N_۰$ جمعیت آغازی، ν میزان مهاجرت (که ثابت فرض می‌شود) و λ بیانگر ثابت نرخ تولد است. فرض کنید جمعیت آغازی یک جامعه ۱۰۰۰۰۰۰ نفر بوده و در سال اول ۴۳۵۰۰۰ نفر مهاجر داشته باشد. اگر در انتهای سال اول جمعیت جامعه ۱۵۶۴۰۰۰ نفر شده باشد ثابت نرخ تولد در این جامعه را مشخص کنید. سپس با استفاده از آن و با این فرض که میزان مهاجرت در سال دوم تغییر نکند، جمعیت جامعه را در پایان سال دوم پیش‌بینی کنید.

در واقع باید جواب معادله $۱۵۶۴۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰e^{\lambda} + \frac{۴۳۵۰۰۰}{\lambda}(e^{\lambda} - ۱)$ را به دست آوریم. به عبارت دیگر باید صفر تابع $f(\lambda) = ۱۰۰۰e^{\lambda} + \frac{۴۳۵}{\lambda}(e^{\lambda} - ۱) - ۱۵۶۴$ معین شود. به کمک روش نیوتن و انجام محاسبات با دقت $۷D$ و به ازای $\lambda_۰ = ۱$، به کمک رابطه بازگشتی

$$\lambda_{n+۱} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}, \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots,$$

به نتایج جدول ۹.۳ دست می‌یابیم. در تکرار پنجم چون $|\lambda_۵ - \lambda_۴| = ۰/۰۰۰۰۰۰۲ < ۰/۵ \times ۱۰^{-۶}$ تکرارها متوقف

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
λ_n	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۳۹۶۹۰۳۱	۰/۱۳۸۸۶۹۰	۰/۱۰۱۶۶۶۶	۰/۱۰۰۹۹۸۱	۰/۱۰۰۹۹۷۹

جدول ۹.۳: روش نیوتن در یافتن ثابت نرخ تولد

شده‌اند. در این صورت $\lambda = ۰/۱۰۰۹۹۸$ و جمعیت در انتهای سال دوم عبارت است از

$$N(۲) = ۱۰۰۰۰۰۰e^{۲\times ۰/۱۰۰۹۹۸} + \frac{۴۳۵۰۰۰}{۰/۱۰۰۹۹۸}(e^{۲\times ۰/۱۰۰۹۹۸} - ۱) = ۲۱۸۷۹۳۹.$$

اگر محاسبات میانی با دقت $۳D$ انجام شود، $\lambda = ۰/۰۷$ خواهد بود و $N(۲) = ۲۰۸۴۱۲۰$ با مقدار قبلی بیش از ۱۰۰۰۰۰ نفر (حدود ۵ درصد) تفاوت دارد. باید توجه داشت که اگر بخواهیم بر مبنای جمعیت در انتهای سال دوم تخصیص بودجه داشته باشیم این اختلاف می‌تواند خیلی از موازنه‌ها را بر هم زند. همچنین به ازای $\lambda = ۰/۰۷$ داریم $N(۱) = ۱۵۲۳۰۹۳$، در حالی که به ازای $\lambda = ۰/۱۰۰۹۹۸$ مقدار واقعی $N(۱) = ۱۵۶۴۰۰۰$ به دست می‌آید. $\triangle$

تمرین ۳.۳ در نظر بگیرید $f \in C[a,b]$ و $\alpha \in (a,b)$.

آ) *با این فرض که $f(\alpha) \neq ۰$، نشان دهید δای بزرگ‌تر از صفر چنان وجود دارد که به ازای هر x در $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ که $[\alpha-\delta,\alpha+\delta] \subseteq [a,b]$، داریم $f(x) \neq ۰$.*

ب) *فرض کنید $L > ۰$ داده شده باشد و $f(\alpha) = ۰$. نشان دهید δای بزرگ‌تر از صفر چنان وجود دارد که به ازای هر x در $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ که $[\alpha-\delta,\alpha+\delta] \subseteq [a,b]$، داریم $|f(x)| \leq L$.*

قضیه ۵.۳ *فرض کنید $f \in C^۲[a,b]$ و $\alpha \in [a,b]$ صفر ساده f باشد یعنی $f(\alpha) = ۰ \neq f'(\alpha)$. در این صورت δای مثبت موجود است که دنباله به دست آمده از روش نیوتن به ازای هر $x_۰$ در $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ به α همگرا است.*

برهان. اثبات بر پایه آنالیز روش نیوتن به عنوان یک روش تکرار ساده به صورت $x_n = g(x_{n-۱}), \quad n = ۱,۲,\ldots$ است که در آن $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. فرض کنید L عددی در بازه $(۰,۱)$ باشد. بازه‌ای مانند $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ می‌یابیم که شرایط قضیه نقطه ثابت برای تابع g در آن بازه برقرار باشد. بنابر قسمت آ تمرین ۳.۳، چون $f'(\alpha) \neq ۰$ پس $\delta_۱$ای بزرگ‌تر از صفر چنان وجود دارد که $\forall x \in [\alpha-\delta_۱,\alpha+\delta_۱] \subseteq [a,b],\ f'(x) \neq ۰$. پس g بر $[\alpha-\delta_۱,\alpha+\delta_۱]$ پیوسته است و

$$\forall x \in [\alpha-\delta_۱,\alpha+\delta_۱] \quad : \quad g'(x) = ۱ - \frac{(f'(x))^۲ - f(x)f''(x)}{(f'(x))^۲} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^۲}.$$

چون $f \in C^۲[a,b]$ در نتیجه $g \in C^۱[\alpha-\delta_۱,\alpha+\delta_۱]$. از طرف دیگر فرض $f(\alpha) = ۰$ نتیجه می‌دهد $g'(\alpha) = ۰$ و بنابر قسمت ب تمرین ۳.۳، δای می‌توان یافت که $۰ < \delta < \delta_۱$ و $\forall x \in [\alpha-\delta,\alpha+\delta] \subseteq [a,b],\ |g'(x)| \leq L$. بنابر قضیه مقدار میانگین، ξ بین x و α چنان وجود دارد که

$$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| = |g'(\xi)||x-\alpha| \leq L|x-\alpha| < |x-\alpha|.$$

حال اگر $x \in [\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ پس $|x-\alpha| < \delta$ و بنابراین $|g(x)-\alpha| < \delta$ و این یعنی g بازه $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ را به توی $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ می‌نگارد. تمام شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است و در نتیجه دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ تعریف‌شده با طرح

$$\forall n \geq ۱ \quad : \quad x_n = g(x_{n-۱}) = x_{n-۱} - \frac{f(x_{n-۱})}{f'(x_{n-۱})},$$

به ازای هر $x_۰$ در بازه $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ به α همگرا است. $\square$

تذکر ۱۳.۳ *بنابر قضیه ۵.۳، برای تضمین همگرایی روش نیوتن باید $x_{\circ}$ به α نزدیک باشد. بنابراین ابتدا چند تکرار یک روش با حجم عملیات کم مانند روش دوبخشی را دنبال کرده و نتیجه را به عنوان $x_{\circ}$ روش نیوتن اختیار می‌کنیم.*

قضیه ۶.۳ *تحت شرایط قضیه ۵.۳، مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل ۲ است.*

برهان. در روش نیوتن به عنوان یک روش تکرار ساده $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$، $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^{2}(x)}$ و $g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^{2}(\alpha)} = 0$. هم‌چنین $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ و بنابر قضیه ۴.۳ مرتبه همگرایی روش نیوتن در این حالت کمتر از دو نیست. □

مثال ۱۵.۳ *برای تابع $f(x) = \sin x$ واضح است که $f(0) = f''(0) = 0 \neq f'(0)$. بنابراین مرتبه همگرایی روش نیوتن در یافتن صفر تابع حداقل ۳ است. آیا مرتبه همگرایی ممکن است ۴ باشد؟* △

مثال ۱۶.۳ *می‌خواهیم $\sqrt[m]{a}$ را با روش نیوتن تعیین کنیم که در آن a و m اعدادی مثبت هستند. به همین منظور تابع $f(x) = x^m - a$ را تعریف می‌کنیم که $\alpha = \sqrt[m]{a}$ صفر آن است. طرح تکراری نیوتن به صورت زیر در می‌آید*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}} = \frac{(m-1)x_n^m + a}{m x_n^{m-1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

اگر $m = 2$ و $a = 2$ اختیار شود، این طرح به صورت $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ خلاصه می‌شود و نتایج

$$x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 1{,}416666667,\ x_3 = 1{,}414215686,\ x_4 = 1{,}414213562,\ x_5 = 1{,}414213562$$

به ازای $x_{\circ} = 1$ تولید می‌شود. △

مثال ۱۷.۳ *با استفاده از روش نیوتن یک طرح تکراری برای محاسبه وارون عدد ناصفر a به دست آورده و به کمک آن تقریبی برای $\frac{1}{3}$ تعیین کنید.*
اگر $f(x) = \frac{1}{x} - a$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ و از آنجا داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{\frac{-1}{x_n^2}},$$

و در نتیجه $x_{n+1} = x_n(2 - a x_n)$. *با فرض $a = 3$ و $x_{\circ} = 0{,}3$ خواهیم داشت* $x_1 = 0{,}33$، $x_2 = 0{,}3333$ و $x_3 = 0{,}33333333$. △

قضیه ۷.۳ *اگر α صفر چندگانه f باشد، آن‌گاه مرتبه همگرایی روش نیوتن یک است.*

برهان. فرض کنید α صفر چندگانه f از مرتبه تکرار $m > 1$ باشد، یعنی

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \neq f^{(m)}(\alpha).$$

در این حال می‌توان نوشت $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$ که در آن $h(\alpha) \neq 0$. بنابراین

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x) = (x-\alpha)^{m-1}(mh(x) + (x-\alpha)h'(x)).$$

در نتیجه $\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}$. پس

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n-\alpha)h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)},$$

و از آن جا داریم $x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{(x_n-\alpha)h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}$ و یا

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = 1 - \frac{h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}.$$

در آخر $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$ و بنابر تعریف، مرتبه همگرایی روش نیوتن در این حالت یک است و به وضوح هر چه مرتبه تکرار ریشه بیشتر باشد $1 - \frac{1}{m}$ (یعنی نرخ همگرایی) به ۱ نزدیک‌تر بوده و همگرایی روش کندتر خواهد بود. □

نتیجه ۱.۷.۳ *روش $x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ برای $n \geq 0$ که به روش نیوتن تعمیم‌یافته (ترمیم‌یافته ـ تغییریافته ـ اصلاح‌شده) نیز معروف است برای یافتن ریشه چندگانه با مرتبه تکرار $m > 1$ دارای مرتبه همگرایی حداقل دو است.*

برهان. مشابه اثبات قضیه ۷.۳ داریم $x_{n+1} - \alpha = \frac{(x_n-\alpha)^2 h'(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}$ و یا $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = \frac{|h'(\alpha)|}{m|h(\alpha)|}$ که اگر $h'(\alpha) \neq 0$ همگرایی مرتبه دو و اگر $h'(\alpha) = 0$ همگرایی مرتبه سه و شاید بالاتر خواهیم داشت. □

مثال ۱۸.۳ *$\alpha = 0$ صفر مرتبه چهارم $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$ است زیرا*

$$f'(x) = -2\sin x + 2x, \quad f''(x) = -2\cos x + 2, \quad f'''(x) = 2\sin x, \quad f^{(4)}(x) = 2\cos x.$$

و به وضوح $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \neq f^{(4)}(0)$. هم‌چنین به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت

$$f(x) = 2\cos x - 2 + x^2 = x^4\left(\frac{2}{4!} - \frac{2x^2}{6!} + \cdots\right).$$

با به کاربردن روش نیوتن به ازای $x_0 = 0/01$ خواهیم داشت $x_{12} = 0/000424341$ که نشان‌دهنده همگرایی کند روش است. اگر روش

$$x_{n+1} = x_n - 4\frac{2\cos x_n - 2 + x_n^2}{-2\sin x_n + 2x_n},$$

را به کار بریم، به ازای $x_0 = 0/01$ خواهیم داشت $x_2 = -0/163206 \times 10^{-7}$، اما برای محاسبه x_3 صورت و مخرج کسر صفر می‌شود (چون ریشه چندگانه است). △

قضیه ۸.۳ *اگر α صفر چندگانه f با مرتبه تکرار $m > 1$ باشد آن‌گاه α صفر ساده $f^{(m-1)}(x)$ بوده و روش $x_{n+1} = x_n - \frac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}$ برای $n \geq 0$، دنباله‌ای تولید می‌کند که با مرتبه همگرایی حداقل دو به α همگرا است.*

برهان. روش نیوتن برای یافتن ریشه ساده معادله $f^{(m-1)}(x) = 0$، دارای مرتبه همگرایی دست کم دو است. □

مثال ۱۹.۳ *$\alpha = 0$ صفر مرتبه چهارم $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$ و صفر ساده $f'''(x) = 2\sin x$ است. بنابراین طرح*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'''(x_n)}{f^{(4)}(x_n)} = x_n - \frac{2\sin x_n}{2\cos x_n} = x_n - \tan x_n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

به ازای $x_0 = ۰/۰۱$ نتیجه می‌دهد $x_1 = -۰/۳۳۳۳۴۷ \times ۱۰^{-۶}$، $x_2 = ۰/۱۲۳۳۴۹ \times ۱۰^{-۱۹}$ و $x_3 = ۰/۰$. $\triangle$

تذکر ۱۴.۳ *در به کار بردن روش نیوتن دو مشکل اساسی وجود دارد که عبارتند از: x_0 باید به α نزدیک باشد؛ $f'(x_n)$ باید وجود داشته باشد، مخالف صفر باشد و محاسبه آن ساده باشد. برای درک بهتر به شکل ۸.۳ نگاه کنید.*

شکل ۸.۳: تعبیر هندسی مشکلات اساسی روش نیوتن

۵.۲.۳ روش وتری

روش وتری یا روش خط قاطع[۹] بیشتر زمانی به کار می‌رود که اشکالات روش نیوتن بروز کند. با توجه به رابطه

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x},$$

اگر x به اندازه کافی به x_n نزدیک باشد، می‌توان نوشت $f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}$. با جای‌گذاری این رابطه در طرح تکراری نیوتن و با قرار دادن $x = x_{n-1}$ داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

به تعبیر هندسی روش وتری در شکل ۹.۳ و همچنین الگوریتم ۵.۳ توجه کنید.

شکل ۹.۳: تعبیر هندسی روش وتری

الگوریتم ۵.۳ الگوریتم روش وتری.

- **ورودی.** x_0, x_1, ϵ, f

---
[۹] Secant method

- **خروجی.** *مقدار x_{n+1} که به ازای آن $|f(x_{n+1})| < \epsilon$*

۱) *قرار دهید* $n = 1$.

۲) *قرار دهید* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

۳) *اگر* $|f(x_{n+1})| < \epsilon$ *آن‌گاه* x_{n+1} *را چاپ کرده و متوقف شوید.*

۴) *قرار دهید* $n = n + 1$ *و به گام ۲ برگردید.*

مثال ۲۰.۳ *همان طور که مشاهده شد* $\alpha = 0$ *ریشه مرتبه چهارم* $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2 = 0$ *است. با به کاربردن روش وتری به ازای* $x_0 = 0/01$ *و* $x_1 = 0/002$ *خواهیم داشت* $x_{10} = 0/000381888$. △

تذکر ۱۵.۳ *ثابت می‌شود مرتبه همگرایی روش وتری* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1/618$ *است.*

تذکر ۱۶.۳ *روش وتری برای شروع به دو مقدار آغازی نیاز دارد که لزومی ندارد دو طرف* α *واقع باشند؛ ولی روش نابجایی برای شروع به* a *و* b*ای نیاز دارد که* $f(a)f(b) < 0$. *هم‌چنین در روش وتری همیشه نقطه‌ای با کوچک‌ترین اندیس کنارگذاشته می‌شود ولی در روش نابجایی ممکن است یک نقطه در چند تکرار متوالی ثابت بماند.*

۶.۲.۳ روش Δ^2-ایتکن

فرض کنید $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای باشد که به طور خطی (مرتبه همگرایی ۱) به α همگرا باشد (در این حالت شرط همگرایی آن است که $0 < C < 1$) و هم‌چنین فرض کنید $\alpha - x_n$ و $\alpha - x_{n+1}$ و $\alpha - x_{n+2}$ هم‌علامت باشند و n به قدری بزرگ باشد که داشته باشیم $\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} \simeq C \simeq \frac{x_{n+2}-\alpha}{x_{n+1}-\alpha}$ و یا $x_{n+1}^2 - 2\alpha x_{n+1} + \alpha^2 \simeq x_{n+2}x_n - (x_{n+2} + x_n)\alpha + \alpha^2$ که نتیجه می‌دهد

$$\alpha \simeq \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \frac{x_n x_{n+2} - 2x_n x_{n+1} + x_n^2 - (x_n^2 - 2x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2)}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n},$$

و از آن جا $\alpha \simeq x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$. روش Δ^2-ایتکن بر این فرضیه استوار است که دنباله $\{\hat{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ که به صورت

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n},$$

ساخته می‌شود سریع‌تر از دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ به α همگرا است.

مثال ۲۱.۳ *دنباله* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *با* $x_n = \cos\frac{1}{n}$ *به طور خطی به* $\alpha = 1$ *همگرا است!؟ چند جمله از دنباله‌های* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *و* $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *در جدول ۱۰.۳ آمده است که دلالت بر همگرایی سریع‌تر دنباله* $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *دارد.* △

تعریف ۲.۳ *اگر* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *دنباله‌ای دلخواه باشد، برای* $n \geq 0$ *تفاضل پیشرو به صورت* $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ *تعریف می‌شود و به طور بازگشتی برای هر* $k \geq 2$ *می‌توان نوشت* $\Delta^k x_n = \Delta(\Delta^{k-1}x_n)$. *به عنوان نمونه داریم*

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

بنابراین در روش Δ^2*-ایتکن ضابطه دنباله* $\{\hat{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *به صورت* $\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$ *ساده می‌شود.*

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
x_n	۰/۵۴۰۳۰	۰/۸۷۷۵۸	۰/۹۴۴۹۶	۰/۹۶۸۹۱	۰/۹۸۰۰۷	۰/۹۸۶۱۴	۰/۹۸۹۸۱
$\hat{x}_n$	۰/۹۶۱۷۸	۰/۹۸۲۱۳	۰/۹۸۹۷۹	۰/۹۹۳۴۲	۰/۹۹۵۴۱		

جدول ۱۰.۳: مثالی از فرایند $\Delta^۲$ـ‌ایتکن

قضیه ۹.۳ *فرض کنید $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای به طور خطی همگرا به α باشد و برای nهای به قدر کافی بزرگ داشته باشیم $(x_{n+۱}-\alpha)(x_n-\alpha)>۰$. آن‌گاه دنباله $\{\hat{x}_n\}_{n=۰}^{\infty}$ سریع‌تر از دنباله $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ به α همگرا می‌شود؛ به عبارتی $\hat{x}_n-\alpha=o(x_n-\alpha)$. یعنی $\lim_{n\to\infty}\frac{|\hat{x}_n-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=۰$.*

برهان. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+۱}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=C$ قرار دهید $\delta_n=\frac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}-C$. به وضوح $\lim_{n\to\infty}\delta_n=۰$ و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\Delta^۲ x_n &= x_{n+۲}-۲x_{n+۱}+x_n = x_{n+۲}-\alpha-(x_{n+۱}-\alpha)-(x_{n+۱}-\alpha)+x_n-\alpha\\
&= (x_{n+۱}-\alpha)\left(\tfrac{x_{n+۲}-\alpha}{x_{n+۱}-\alpha}-۱\right)-(x_n-\alpha)\left(\tfrac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}-۱\right)\\
&= (x_n-\alpha)\Big(\tfrac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}\big(\tfrac{x_{n+۲}-\alpha}{x_{n+۱}-\alpha}-۱\big)-\big(\tfrac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}-۱\big)\Big)\\
&= (x_n-\alpha)((\delta_n+C)(\delta_{n+۱}+C-۱)-(\delta_n+C-۱)).
\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{x}_n-\alpha}{x_n-\alpha} &= ۱-\tfrac{(\Delta x_n)^۲}{(x_n-\alpha)\Delta^۲ x_n} = ۱-\tfrac{(x_{n+۱}-\alpha-(x_n-\alpha))^۲}{(x_n-\alpha)\Delta^۲ x_n}\\
&= ۱-\tfrac{(x_n-\alpha)\left(\frac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}-۱\right)^۲}{\Delta^۲ x_n} = ۱-\tfrac{(\delta_n+C-۱)^۲}{(\delta_n+C)(\delta_{n+۱}+C-۱)-(\delta_n+C-۱)}.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\frac{|\hat{x}_n-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=۱-\frac{(C-۱)^۲}{C(C-۱)-(C-۱)}=۱-۱=۰$. □

تذکر ۱۷.۳ *با به کار بردن روش $\Delta^۲$ـ‌ایتکن بر روی یک دنباله با مرتبه همگرایی یک، می‌توان به همگرایی سرعت داد. روش استفنسن[۱۰] روشی است که با اِعمال روش $\Delta^۲$ـ‌ایتکن (با کمی تغییر) بر روی دنباله‌ای که از یک روش تکرار ساده با همگرایی خطی به دست می‌آید دنباله‌ای با مرتبه همگرایی دو می‌سازد و بر خلاف روش نیوتن به مشتق نیاز ندارد[۴].*

۳.۳ روش نیوتن در حل دستگاه معادلات غیرخطی

در این بخش قصد داریم از بین روش‌های حل عددی دستگاه معادلات غیرخطی، فقط به بیان و بررسی روش نیوتن بپردازیم که روشی متداول و پرکاربرد است. ابتدا توجه داریم که در حالت کلی، حل این مسئله معادل است با یافتن

[۱۰] Steffensen's method

بردار $\boldsymbol{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$ در $\mathbb{R}^n$ به گونه‌ای که داشته باشیم

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \quad \vdots & \ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{cases}$$

که در آن f_i به ازای $i = 1, \ldots, n$، تابعی از $\mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}$ است. در اینجا با یک دستگاه n معادله n مجهولی غیرخطی مواجه هستیم و با معرفی تابع F از $\mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}^n$ به صورت

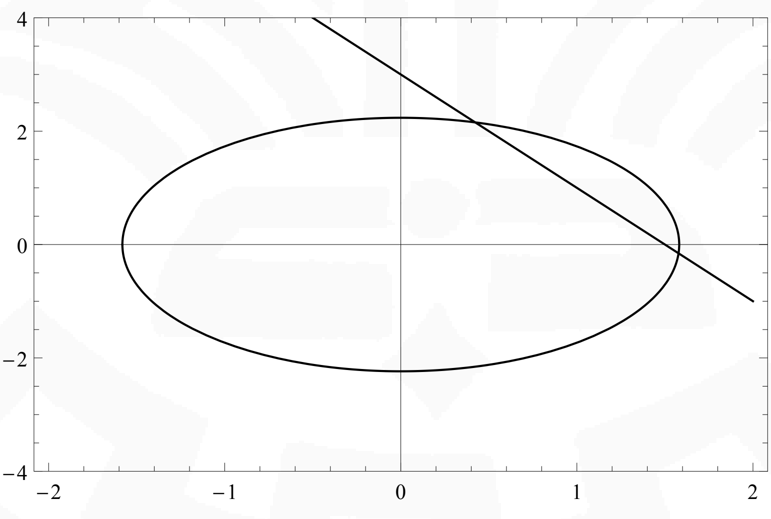
$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n) \ \cdots \ f_n(x_1, \ldots, x_n))^T,$$

می‌توان آن را به صورت فشرده $F(\boldsymbol{x}) = 0$ نوشت.

مثال ۲۲.۳ *منحنی‌های معادلات دستگاه زیر در شکل ۱۰.۳ رسم شده‌اند. به وضوح این دستگاه دو دسته جواب دارد.*

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0. \end{cases}$$

$\triangle$



شکل ۱۰.۳: محل‌های برخورد یک خط راست و یک بیضی

تذکر ۱۸.۳ *یک دستگاه معادلات غیرخطی در حالت کلی ممکن است دارای هیچ جواب، بی‌نهایت جواب و یا تعداد متناهی جواب باشد.*

روش نیوتن در حل معادله غیرخطی $f(x) = 0$ در زیربخش ۴.۲.۳ به کار گرفته شد و در این‌جا کافی است آن را برای حل دستگاه معادلات غیرخطی $F(\boldsymbol{x}) = 0$ تعمیم دهیم. به همین منظور فرض کنید $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n]^T$ جواب دقیق دستگاه معادلات غیرخطی $F(\boldsymbol{x}) = 0$ و $\boldsymbol{x}^{(0)} = [x_1^{(0)} \ \cdots \ x_n^{(0)}]^T$ یک جواب تقریبی نزدیک $\boldsymbol{\alpha}$ باشد یعنی

$\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{x}^{(\circ)}\|_\infty$ کوچک باشد[۱۱] و قرار دهید $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{x}^{(\circ)}+\boldsymbol{h}^{(\circ)}$ که در آن $\boldsymbol{h}^{(\circ)}=[h_1^{(\circ)}\ \cdots\ h_n^{(\circ)}]^T$ به بردار اصلاح‌کننده معروف است. بنابر قضیه تیلور برای توابع چندمتغیره به ازای $l=1,\ldots,n$ می‌توان نوشت

$$0=f_l(\boldsymbol{\alpha})=f_l(\boldsymbol{x}^{(\circ)}+\boldsymbol{h}^{(\circ)})=f_l(\boldsymbol{x}^{(\circ)})+(\nabla f_l(\boldsymbol{x}^{(\circ)}))^T\boldsymbol{h}^{(\circ)}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{h}^{(\circ)^T}H_l(\xi^{(\circ)})\boldsymbol{h}^{(\circ)},$$

که در آن $H_l(\boldsymbol{x})=[\frac{\partial^2 f_l(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}]_{n\times n}$ به ماتریس هسیان نظیر f_l معروف است و $\xi^{(\circ)}$ روی خط واصل $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{x}^{(\circ)}$ قرار دارد. از طرفی داریم

$$\left|\boldsymbol{h}^{(\circ)^T}H_l(\xi^{(\circ)})\boldsymbol{h}^{(\circ)}\right|=\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_i^{(\circ)}h_j^{(\circ)}\frac{\partial^2 f_l(\xi^{(\circ)})}{\partial x_i\partial x_j}\right|\le\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^2 f_l(\xi^{(\circ)})}{\partial x_i\partial x_j}\right|\right)\left\|\boldsymbol{h}^{(\circ)}\right\|_\infty^2,$$

و چون $\left\|\boldsymbol{h}^{(\circ)}\right\|_\infty$ کوچک است بنابراین به شرط همواری f_l خواهیم داشت $0\simeq f_l(\boldsymbol{x}^{(\circ)})+(\nabla f_l(\boldsymbol{x}^{(\circ)}))^T\boldsymbol{h}^{(\circ)}$ و از آن‌جا $F(\boldsymbol{x}^{(\circ)})+J(\boldsymbol{x}^{(\circ)})\boldsymbol{h}^{(\circ)}\simeq 0$ که در آن $J(\boldsymbol{x})=[\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}]_{n\times n}$ ماتریس ژاکوبین نظیر F است و با فرض $\det J(\boldsymbol{x})\neq 0$ می‌توان نوشت $\boldsymbol{h}^{(\circ)}\simeq -J(\boldsymbol{x}^{(\circ)})^{-1}F(\boldsymbol{x}^{(\circ)})$. سپس قرار می‌دهیم $\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(\circ)}+\boldsymbol{h}^{(\circ)}=\boldsymbol{x}^{(\circ)}-J(\boldsymbol{x}^{(\circ)})^{-1}F(\boldsymbol{x}^{(\circ)})$ و با تکرار این فرآیند طرح تکراری نیوتن به صورت زیر به دست می‌آید

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k-1)}-J(\boldsymbol{x}^{(k-1)})^{-1}F(\boldsymbol{x}^{(k-1)}),\qquad k=1,2,\ldots.$$

تذکر ۱۹.۳ *در عمل، در هر تکرار روش نیوتن ابتدا دستگاه خطی $J(\boldsymbol{x}^{(k-1)})\boldsymbol{h}^{(k-1)}=-F(\boldsymbol{x}^{(k-1)})$ را حل کرده سپس قرار می‌دهیم $\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k-1)}+\boldsymbol{h}^{(k-1)}$.*

مثال ۲۳.۳ *دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=9,\qquad x_1x_2x_3=1,\qquad x_1+x_2-x_3^2=0.$$

با فرض $\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ می‌توان نوشت $F(\boldsymbol{x})=0$ به طوری که $F(\boldsymbol{x})=[f_1(\boldsymbol{x})\ f_2(\boldsymbol{x})\ f_3(\boldsymbol{x})]^T$ و

$$f_1(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2-9,\quad f_2(\boldsymbol{x})=x_1x_2x_3-1,\quad f_3(\boldsymbol{x})=x_1+x_2-x_3^2.$$

در نتیجه

$$J(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2 & 2x_3\\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2\\ 1 & 1 & -2x_3\end{bmatrix},$$

[۱۱] اگر $\boldsymbol{x}=[x_1\ \cdots\ x_n]^T$، آن‌گاه $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_i|x_i|$.

و با انتخاب $\boldsymbol{x}^{(۰)} = [۲٫۵ \quad ۰٫۲۵ \quad ۱٫۵]^T$ *خواهیم داشت*

$$J(\boldsymbol{x}^{(۰)}) = \begin{bmatrix} ۵ & ۰٫۵ & ۳ \\ ۰٫۳۷۵ & ۳٫۷۵ & ۰٫۶۲۵ \\ ۱ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}, \qquad -F(x^{(۰)}) = \begin{bmatrix} ۰٫۴۳۷۵ \\ ۰٫۰۶۲۵ \\ -۰٫۵ \end{bmatrix}.$$

پس از حل دستگاه $J(\boldsymbol{x}^{(۰)})\boldsymbol{h}^{(۰)} = -F(\boldsymbol{x}^{(۰)})$ *خواهیم داشت* $\boldsymbol{h}^{(۰)} = [-۰٫۰۰۸۱ \quad -۰٫۰۰۹۳ \quad ۰٫۱۶۰۹]^T$. *در نتیجه* $\boldsymbol{x}^{(۱)} = \boldsymbol{x}^{(۰)} + \boldsymbol{h}^{(۰)} = [۲٫۴۹۱۹ \quad ۰٫۲۴۰۷ \quad ۱٫۶۶۰۹]^T$ *و با ادامه این فرآیند خواهیم داشت* $\boldsymbol{x}^{(۲)} = \boldsymbol{x}^{(۳)} = [۲٫۴۹۱۴ \ ۰٫۲۴۲۷ \ ۱٫۶۵۳۵]^T$. △

تمرین ۴.۳ *در حل هر یک از دستگاه‌های غیرخطی زیر،* $\boldsymbol{x}^{(۲)}$ *روش نیوتن را به دست آورید. فرض کنید* $\boldsymbol{x}^{(۰)} = ۰$.

آ)
$$\begin{cases} ۴x_۱^۲ - ۲۰x_۱ + \frac{۱}{۴}x_۲^۲ + ۸ = ۰ \\ \frac{۱}{۲}x_۱x_۲^۲ + ۲x_۱ - ۵x_۲ + ۸ = ۰ \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} \sin(۴\pi x_۱x_۲) - ۲x_۲ - x_۱ = ۰ \\ \frac{۴\pi-۱}{۴\pi}(e^{۲x_۱} - e) + ۴ex_۲^۲ - ۲ex_۱ = ۰ \end{cases}$$

پ)
$$\begin{cases} ۳x_۱ - \cos(x_۲x_۳) - \frac{۱}{۲} = ۰ \\ ۴x_۱^۲ - ۶۲۵x_۲^۲ + ۲x_۲ - ۱ = ۰ \\ e^{-x_۱x_۲} + ۲۰x_۳ + \frac{۱۰\pi-۳}{۳} = ۰ \end{cases}$$

ت)
$$\begin{cases} x_۱^۲ + x_۲ - ۳۷ = ۰ \\ x_۱ - x_۲^۲ - ۵ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ - ۳ = ۰ \end{cases}$$

تمرین ۵.۳ *فرض کنید تمام درایه‌های ماتریس‌های* $A(x) = [a_{ij}(x)]_{m\times n}$ *و* $B(x) = [b_{ij}(x)]_{n\times p}$ *نسبت به* x *مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید* $\frac{d}{dx}(AB) = \frac{dA}{dx}B + A\frac{dB}{dx}$ *که در آن* $\frac{dA}{dx} = [\frac{da_{ij}}{dx}]_{m\times n}$ *و* $\frac{dB}{dx} = [\frac{db_{ij}}{dx}]_{n\times p}$.

تمرین ۶.۳ *طرح تکراری روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات خطی* $A\boldsymbol{x} = b$ *با ماتریس ضرایب وارون‌پذیر به چه صورت در می‌آید؟*

۱.۳.۳ بررسی مرتبه همگرایی روش نیوتن

طرح تکراری روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی $F(\boldsymbol{x}) = ۰$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = g(\boldsymbol{x}^{(k-۱)}) := \boldsymbol{x}^{(k-۱)} - J(\boldsymbol{x}^{(k-۱)})^{-۱}F(\boldsymbol{x}^{(k-۱)}), \qquad k = ۱, ۲, \ldots.$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، به ازای $j = ۱, \ldots, n$ داریم $\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_j} - J(\boldsymbol{x})^{-۱}\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-۱}}{\partial x_j}F(\boldsymbol{x})$. با ضرب دو طرف این رابطه در $J(\boldsymbol{x})$ می‌توان نوشت $J(\boldsymbol{x})\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = J(\boldsymbol{x})e_j - \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} - J(\boldsymbol{x})\frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-۱}}{\partial x_j}F(\boldsymbol{x})$. اما با توجه به $J(\boldsymbol{x})e_j = \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial f_۱(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \ \cdots \ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right]^T$ خواهیم داشت

$$J(\boldsymbol{x})\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = -J(\boldsymbol{x})\frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-۱}}{\partial x_j}F(\boldsymbol{x}). \tag{۲.۳}$$

از طرف دیگر، چون $J(\boldsymbol{x})J(\boldsymbol{x})^{-۱} = I$ پس $\frac{\partial J(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}J(\boldsymbol{x})^{-۱} + J(\boldsymbol{x})\frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-۱}}{\partial x_j} = ۰$ یا $J(\boldsymbol{x})^{-۱}\frac{\partial J(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}J(\boldsymbol{x})^{-۱} + \frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-۱}}{\partial x_j} = ۰$ که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-۱}}{\partial x_j} = -J(\boldsymbol{x})^{-۱}\frac{\partial J(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}J(\boldsymbol{x})^{-۱},$$

و این دلالت بر آن دارد که $\frac{\partial J(\boldsymbol{x})^{-1}}{\partial x_j}$ قابل تعریف است به شرط آن که مشتقات جزئی مرتبه دوم f_iها موجود باشند. چون $F(\boldsymbol{\alpha}) = 0$، از (۲.۳) خواهیم داشت $J(\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial g(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} = 0$ که اگر $J(\boldsymbol{\alpha})$ وارون‌پذیر باشد آن‌گاه $\frac{\partial g(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$ و با توجه به $g(\boldsymbol{x}) = [g_1(\boldsymbol{x}) \ \cdots \ g_n(\boldsymbol{x})]^T$ داریم

$$\frac{\partial g_l(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j} = 0, \qquad j, l = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

حال اگر R ناحیه‌ای بسته، محدب و شامل $\boldsymbol{\alpha}$ باشد، به کمک قضیه تیلور برای توابع چندمتغیره، برای نقطه دلخواه $\boldsymbol{\beta}$ در R و به ازای $l = 1, \ldots, n$ داریم

$$g_l(\boldsymbol{\beta}) = g_l(\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})) = g_l(\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_l(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_j}(\beta_j - \alpha_j) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_l(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}(\beta_i - \alpha_i)(\beta_j - \alpha_j),$$

که در آن ξ روی خط واصل $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ قرار دارد (چون R محدب فرض شده است $\xi \in R$). بنابر (۳.۳) می‌توان نوشت

$$|g_l(\boldsymbol{\beta}) - g_l(\boldsymbol{\alpha})| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g_l(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}(\beta_i - \alpha_i)(\beta_j - \alpha_j)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 g_l(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2,$$

و اگر داشته باشیم $\max_{\boldsymbol{x} \in R}\left|\frac{\partial^2 g_l(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leq M, \quad 1 \leq i, j, l \leq n$ آن‌گاه $|g_l(\boldsymbol{\beta}) - g_l(\boldsymbol{\alpha})| \leq \frac{Mn^2}{2}\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2$ و از آنجا $\|g(\boldsymbol{\beta}) - g(\boldsymbol{\alpha})\|_\infty \leq \frac{Mn^2}{2}\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2$ و با انتخاب $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{x}^{(k-1)}$ و با توجه به روابط $\boldsymbol{\alpha} = g(\boldsymbol{\alpha})$ و $\boldsymbol{x}^{(k)} = g(\boldsymbol{x}^{(k-1)})$ می‌توان نوشت

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{\alpha}\right\|_\infty \leq \frac{Mn^2}{2}\left\|\boldsymbol{x}^{(k-1)} - \boldsymbol{\alpha}\right\|_\infty^2,$$

و این دلالت بر آن دارد که همگرایی روش نیوتن از مرتبه دو است (البته با توجه به همه مفروضات).

تمرین ۷.۳ *برای حل دستگاه معادلات غیرخطی $F(\boldsymbol{x}) = 0$، طرح تکراری زیر را به کار می‌بریم*

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k-1)} + A(\boldsymbol{x}^{(k-1)})F(\boldsymbol{x}^{(k-1)}), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

ماتریس A را به گونه‌ای به دست آورید که همگرایی روش از مرتبه دو باشد.

۴.۳ تمرین‌ها

۱. الف) با روش تکرار نقطه ثابت نشان دهید مقدار $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ برابر ۲ است.

ب) تقریبی برای A با دقت ۰٫۰۰۱ به دست آورید.

۲. معادله $5x - 4\cos(x) = 0$ مفروض است.

الف) نشان دهید این معادله دارای تنها یک ریشه است و ریشه را با روش تکرار نقطه ثابت و دقت $\epsilon = 0.0001$ به دست آورید.

ب) جواب معادله را با روش $\Delta^۲$ ایتکن با همان دقت به دست آورید.

۳. معادله $e^x\sin(x)+۲۵x+۱=۰$ مفروض است. نشان دهید این معادله دارای یک ریشه منفی است. همچنین نشان دهید برای اینکه خطا کمتر از ۰/۰۰۱ باشد چند تکرار از روش دوبخشی نیاز است؟ ریشه را به کمک روش دوبخشی با ۵ تکرار تقریب بزنید.

۴. اگر f یک تابع پیوسته باشد و نقطه ثابت نداشته باشد، ثابت کنید fof نیز نقطه ثابت ندارد.

۵. معادله $ax^۳+bx^۲+x-۲=۰$ مفروض است.

الف) a و b را طوری اختیار کنید که $x=۱$ ریشه مضاعف معادله فوق باشد.

ب) این ریشه را با استفاده از روش نیوتن تعمیم‌یافته و با دقت $\epsilon=\frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۴}$ به دست آورید.

پ) مرتبه همگرایی روش را به دست آورید.

۶. $\sqrt[۴]{۱۳}$ را با ۶ رقم اعشار به دست آورید.

۷. فرض کنید تابع f بر بازه $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(۰)<۰<f(۱)$ و اعداد حقیقی a و b موجود باشند به‌طوری‌که $\forall x\in[۰,۱]\quad ۰<a\leq f'(x)\leq b$. عدد ثابت m را طوری تعیین کنید که دنباله x_n تولیدشده توسط رابطه $x_{n+۱}=x_n+m(f(x_n))\quad n=۰,۱,\cdots$ به ازای هر $x_۰$ در $[۰,۱]$ به تنها ریشه معادله $f(x)=۰$ در بازه $[۰,۱]$ همگرا باشد.

۸. برای حل معادله $x^۲-۲=۰$ از توابع تکرار $g_۱(x)=\frac{x+۲}{x+۱}$ و $g_۲(x)=\frac{۱}{۲}(x+\frac{۲}{x})$ استفاده می‌کنیم. نشان دهید روش نقطه ثابت، با انتخاب نقطه اولیه مناسب $x_۰$ با استفاده از هر یک از توابع تکرار $g_۱$ و $g_۲$ به $\sqrt{۲}$ همگرا می‌شود. کدام یک از این دو تابع تکرار برای تقریب $\sqrt{۲}$ مناسب تر است؟ چرا؟

۹. برای به دست آوردن ریشه α معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن $a\alpha^۲\neq c\neq۰$ از رابطه تکراری $x_{n+۱}=\frac{bx_n^۲+۲cx_n}{c-ax_n^۲}$ و $x_۰$ مناسب استفاده می‌کنیم. مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ را به دست آورید.

۱۰. فرض کنید $\beta>۴(\frac{۳}{۴e})^{\frac{۳}{۴}}$. نشان دهید به ازای هر $x_۰$ مثبت، دنباله $\{x_n\}$ که از رابطه تکراری $x_{n+۱}=\frac{۱}{\beta}e^{-x_n^۴}$ به دست می‌آید، همگرا است.

۱۱. فرض کنید تابع f دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است و به ازای هر عدد حقیقی x داریم $f'(x)\geq M\geq۰$. نشان دهید معادله $f(x)=۰$ دارای یک ریشه منحصر به فرد است و اولین ریشه بین $x=۰$ و $x=\frac{-f(۰)}{M}$ قرار دارد.

۱۲. با استفاده از فرمول تکرار روش نیوتن، یک رابطه تکراری برای محاسبه معکوس عدد غیر صفر a به دست آورید.

۱۳. به طور مستقیم، نشان دهید که اگر α ریشه ساده معادله $f(x)=۰$ باشد و دنباله $\{x_n\}$ که از روش نیوتن به دست می‌آید به α همگرا باشد، آن‌گاه مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ حداقل دو است.

۱۴. فرض کنید $f\in C^۱[a,b]$ و α ریشه تکراری مرتبه m معادله $f(x)=۰$ است و

$$h(x)=f(x+f(x))-f(x).$$

الف) ثابت کنید α ریشه مرتبه $۲m-۱$ معادله $h(x)=۰$ است.

ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید α ریشه ساده معادله $r(x)=۰$ است که در آن، $r(x)=\frac{f^۲(x)}{h(x)}$.

۱۵. فرض کنید r ریشه معادله $f(x) = 0$ و x_n و x_{n+1} دو تقریب متوالی برای r در روش تکراری نیوتن باشد. فرض کنید f، f' و f'' بر بازه‌ای مانند I شامل x_n و x_{n+1} پیوسته باشد و ثابت‌های $K > 0$ و $L > 0$ وجود داشته باشند به طوری که $\forall x \in I$

$$| f'(x) | \geq L, \qquad | f''(x) | \leq K.$$

رابطه زیر را ثابت کنید

$$| x_{n+1} - r | \leq \frac{K}{2L} | x_{n+1} - x_n |^2 .$$